SUBIECTELE PENTRU EXAMENUL DE LICENŢĂ LA „MATEMATICĂ”, SPECIALITĂŢILE “MATEMATICĂ” ŞI „MATEMATICI APLICATE”
SESIUNEA 2019

Calcul diferenţial și integral, Analiză matematică

1. Proprietăţile globale ale funcţiilor continui de mai multe variabile definite pe mulţimi compacte. Teoremele Weierstrass, Cantor, Bolzano-Cauchy.
2. Noţiune de diferenţiabilitate a unei funcţii de mai multe variabile. Relaţia dintre diferenţiabilitatea funcţiei, continuitatea funcţiei şi derivatele parţiale ale funcţiei. Criteriul de diferenţiabilitate. Derivate parţiale de ordin superior ale unei funcţii de mai multe variabile şi teorema Schwartz despre egalitatea derivatelor parţiale mixte.
3. Extremele funcţiei de două variabile: condiţii necesare şi condiţii suficiente pentru extrem.
4. Definiţia integralei improprii de prima şi a doua speţă. Convergenţa integralei improprii de speţa I în cazul funcţiei pozitive, teoremele de comparaţie.
5. Serii numerice cu termeni pozitivi, criteriile Cauchy, D'Alembert, Raabe-Duhamel şi integral Cauchy-MacLaurin de convergenţă a seriilor cu termeni pozitivi. Serii alternante, criteriul lui Leibniz. Criteriul general Cauchy de convergenţă a seriilor cu termeni arbitrari. Serii absolut convergente şi semiconvergente. Criteriile Dirichlet şi Abel.
6. Serii de puteri: definiţie, proprietăţi. Teorema I a lui Abel. Formula Cauchy-Hadamard şi formula D'Alembert pentru calcularea razei de convergenţă a seriei de puteri.
7. Integrale duble: definiţie, proprietăţi, condiţii de existenţă. Calculul integralei duble prin reducerea la o integrală iterată. Schimbul de variabilă în integrala dublă. Integrala dublă în coordonatele polare.
8. Integrale curbilinii de prima și a doua speţă. Formule de calcul. Formula Green. Condiţii de independenţă a integralei curbilinii de conturul de integrare.

Algebră liniară, Structuri algebrice

9. Bază şi dimensiune într-un spaţiu vectorial. Subspaţii, operaţii cu subspaţii.
10. Operatori liniari. Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar. Reducerea matricelor la forma diagonală.
11. Forme (funcţii) biliniare. Forme (funcţii) pătratice. Reducerea formelor pătratice la forma canonică (metoda lui Lagrange, metoda lui Jacobi). Forme pătratice pozitiv definite. Criteriul lui Sylvester.
12. Grupuri, subgrupuri, grupuri factor. Morfisme de grupuri. Grupuri ciclice. Inele, ideale, inele factor, corpuri. Morfisme de inele. Teoreme de izomorfism (pentru grupuri, inele).

Geometrie analitică

13. Sistemul de coordonate afin şi cartezian rectangular. Operaţii cu vectori în coordonate. Dependenţa liniară a vectorilor. Transformări de coordonate. Produsul scalar, vectorial şi mixt al vectorilor: definiţii, proprietăţi. Produsele în coordonate carteziene rectangulare, aplicaţii.
14. Ecuaţii ale planului; poziţia reciprocă a două plane; distanţa de la un punct la un plan; unghiul dintre două plane; perpendicularitatea a două plane.
15. Diferite forme ale ecuaţiilor dreptei in spaţiu; poziţia reciprocă a două drepte, a dreptei şi planului; distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu; unghiul dintre dreaptă şi plan.

Ecuaţii diferenţiale

16. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Teorema lui Cauchy de existenţă şi unicitate a soluţiei. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi integrabile în cuadraturi (ecuaţii cu variabile separabile, liniare, Bernoulli).
17. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior. Noţiune de sistem fundamental de soluţii. Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi.
18. Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene. Metoda Lagrange, metoda cvasipolinomului de găsire a soluţiei particulare.

Analiză funcţională

19. Spaţii metrice. Convergenţa şirurilor în spaţiile metrice. Convergenţa în spaţiile R, C, R^m , C^m, l_p, C[a,b], C_p[a,b].

20. Aplicaţii de contracţie. Teorema Banach de punct fix al unei aplicaţii de contracţie, al unei aplicaţii generalizate de contracţie. Aplicaţii ale principiului de contracţie.
21. Spaţii liniare normate. Spaţii Banach. Spaţii Hilbert.
22. Operatori liniari, mărginiţi, continui. Norma unui operator liniar şi mărginit.
23. Operatori inversabili. Criteriul de inversabilitate a operatorilor liniari şi mărginiţi în spaţii liniare normate.

Analiză complexă

24. Derivata funcţiei de variabilă complexă, interpretarea geometrică, condiţiile Cauchy-Riemann. Formula integrală Cauchy.
25. Dezvoltarea în serii Laurent a funcţiilor analitice pe o coroană circulară. Clasificarea punctelor singulare izolate.
26. Noţiune de reziduu. Teorema fundamentală Cauchy cu privire la reziduuri. Calculul reziduurilor şi aplicaţii la calculul integralelor.

Topologie, geometrie diferenţială

27. Spaţii topologice, operaţii cu ele. Axiomele de separare T_0, T_1, T_2, T_3.
28. Curbe parametrizate în spaţii euclidiene. Reperul şi formulele lui Frénet. Interpretarea geometrică a curburii şi torsiunii curbei.

Logică matematică

29. Axiomele şi regulile de deducţie din calculul propoziţional. Teorema deducţiei şi aplicaţii.
30. Axiomele şi regulile de deducţie din calculul predicatelor. Cuantificatori.
31. Completitudinea calculului predicatelor. Teorema Gödel.

Teoria probabilităţilor

32. Repartiţii condiţionate discrete. Valoarea medie condiţionată. Proprietăţi. Variabile aleatoare discrete independente.
33. Caracteristicile numerice ale repartiţiilor: Bernoulli, binomială, Poisson, normală, uniformă.
34. Legea numerelor mari. Teorema Cebîşev; consecinţe.

Teoria grafurilor

35. Mulţimi stabile interior şi mulţimi stabile exterior într-un graf neorientat. Estimări ale numărului de stabilitate internă. Nucleul grafului.
36. Tipurile de subgrafuri într-un graf neorientat. Arbore parţial. Algoritmii Prim şi Kruscal. Teorema Kirchhoff.

Metode de optimizare

37. Dualitatea în programarea liniară. Teoreme de bază a cuplului primal-dual.
38. Probleme de extrem necondiţionat. Metode numerice de soluționare. Justificări teoretice.
39. Probleme de extrem condiţonat. Metoda multiplicatorilor Lagrange. Condiţii necesare și suficiente de existență.

Calcul variaţional

40. Extreme ale funcţionalelor definite pe spaţii liniare normate de funcţii. Diferenţiale (variaţii) ale funcţionalei. Condiţii necesare generale de extrem (de ordinul întâi şi doi). Condiţii necesare de extrem în problema elementară de calcul variaţional.
41. Condiţii suficiente de extrem al funcţionalelor definite pe un spaţiu liniar normat. Condiţii necesare Legendre, Jacobi şi Weierstrass. Condiţii suficiente de extrem local în problema elementară de calcul variaţional.

Analiză numerică

42. Metodele Euler şi Runge-Kutta de rezolvare a problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială ordinară $y' = f(x, y)$.
43. Formulele de cuadratura Newton-Cotes.