МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МССР
КИШИНЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. И. ЛЕНИНА

Дипломная работа

ЧЕБАН ДАВИД НИКОЛАЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ ПО ПУАССОНУ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор ЩЕРБАКОВ Б. А.

Кишинев - 1974

Оглавление

Предисловие

В качественной теории дифференциальных уравнений важную роль играют нелокальные проблемы, касающиеся условий существования тех или иных классов решений. Этому направлениию принадлежит настоящая работа, которая посвящена задаче об асимптотической устойчивости по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений.

Задача об асимптотической устойчивости по Пуассону ранее рассматривалась лишь для асимптотической периодичности и почти периодичности. В этом направлении рядом авторов (см. например [**6, 7, 8**]) получены отдельные интересные результаты. Однако указанная задача не получила достаточно полного решения и до настоящего времени не разработана содержательная теория в этом направлении. Использованные в этих работах методы носят частный характер и применимы лишь в случае асимптотической периодичности и почти периодичности.

В настоящей работе исследуется общая задача об асимптотической устойчивости по Пуассону решений дифференциальных уравнений, включающая в себя, в частности, и вопрос об асимптотической периодичности и почти периодмчности. Использованный при этом метод основан на результатах топологической теории динамических систем и применимы для разнообразных типов асимптотической устойчивости по Пуассону решений дифференциальных уравнений общего вида. Из полученных в данной работе результатов вытекают, в частности, некоторые факты для асимптотическоц периодичности и почти периодичности усиливающие в ряде случаев соответствующие предложения, доказанные ранее другими авторами.

Глава 1

Асимптотически устойчивые по Пуассону движения в динамических системах

1.1. Основные понятия из теории динамических систем.

Пусть X полное метрическое пространство, I группа действительных чисел.

Динамической системой в пространстве X называется (см. [**1**]) называют функцию $q = f(p,t)$, которая каждой точке p пространства X и каждому дествительному числу $t \in I$ ставит в соответствие определенную точку $q \in X$ и обладает следующими свойствами:

1.1 Начальное условие: $f(p,0) = p$ для любой точки $p \in X$;

2.1 Свойство непрерывности по совокупности аргументов:

$$\lim_{p \to p_0,\ t \to t_0} f(p,t) = f(p_0,t_0);$$

3.1 Свойтво группы: $f(f(p,t_1),t_2) = f(p,t_1+t_2)$ для любой точки $p \in X$ и любых действительных чиселt_1 t_2.

Введем следующие обозначепния: $I^+ = [0,+\infty)$, $f(A,K) = \{f(x,t) : x \in A,\ t \in K\}$ при любых $A \subseteq X$, $K \subseteq I$, $\Sigma_A = \overline{f(A,I)}$, $\Sigma_A^+ = \overline{f(A,I^+)}$.

Функция $f(p,t)$ при фиксированном p называется движением, а множество $f(p,I)$ называется траекторией этого движения. Множество $f(p,$ $I^+)$ называется положительной полутраекторией, исходящей из точки p.

Точка p и движение $f(p,t)$ называются устойчивым по Лагранжу (устойчивым по Лагранжу в положительном направлении) и обозначается уст. L (уст. L^+), если замыкание Σ_p (Σ_p^+) траектории $f(p,I)$ (полутраектории $f(p,I^+)$) является компактом.

Точку q называют ω (α)-предельной точкой движения $f(p,t)$, если существует такая последовательность $\{t_n\}$, стремящаяся к $+\infty$ ($-\infty$) что соответствующая последовательность образов $\{f(p,t_n)\}$ точки p стремится к q.

Совокупность всех ω (α)-предельных точек движения $f(p,t)$ обозначается через Ω_p (A_p) и называется ω (α)-предельным множеством этого движения.

Множество $A \subseteq X$ называют равномерно устойчивым по Ляпунову в положительном направлении относительно множества B и обозначают р.уст.Л^+B, если $A \subseteq \overline{B}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только $\rho(p,q) < \delta$, $p \in A$, $q \in B$ и $t \in I^+$, выполнено неравенство

$$\rho(f(p,t), f(q,t)) < \varepsilon. \tag{1.1.1}$$

Точки p и q называются проксимальными в положительном направлении, если $\inf\limits_{t\geq 0} \rho(f(p,t), f(q,t)) = 0$, то есть существует последовательность $\{t_n\}$ стремящаяся к $+\infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(p,t_n), f(q,t_n)) = 0$.

Точка p и движение $f(p,t)$ называются устойчивыми по Пуассону в положительном направлении и обозначают уст.P^+, если $p \in \Omega_p$.

Точка p и движение $f(p,t)$ называются τ ($\tau > 0$)-периодическим, если $f(p,\tau) = p$ и постоянным, если они τ периодичны при любом $\tau \in I$.

Число $\tau \in I$ называется ε смещением (почти периодом) точки p и движения $f(p,t)$, если $\rho(f(p,\tau), p) < \varepsilon$ ($\rho(f(p, t+\tau), f(p,t) < \varepsilon$ при всех $t \in I$).

Точка p и движение $f(p,t)$ называются почти рекуррентным (почти периодическим), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l > 0$ такое, что на любом отрезке длины l, найдется ε-смещение (почти период) точки p и движения $f(p,t)$.

Точка p и движение $f(p,t)$ называются рекуррентными, если они уст.L и почти рекуррентны.

Пусть (X,f) и (Y,g) две динамические системы. Непрерывное отображение h пространства X на Y называют гомоморфизм (X,f) на (Y,g), если $h(f(x,t)) = g(h(x),t))$ при всех $x \in X$ и $t \in I$.

Пусть $t \in I$. Определим отображение $f^t : X \mapsto X$ равенством $f^t(x) = f(x,t)$. Если $K \subseteq X$, то положим $E(K,X) = \overline{\{f^t :\ t \in K\}}$, черточкой обозначено замыкание в X^X.

1.2. Асимптотически устойчивые по Пуассону движения в динамических системах

Точку x и движение $f(x,t)$ назовем асимптотически постоянным (периодическим, почти периодическим, рекуррентным, устойчивым по Пуассону), если существует постоянная (периодическая, почти периодическая, рекуррентная, устойчивая по Пуассону) точка p такая, что

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(f(x,t), f(p,t)) = 0. \tag{1.2.2}$$

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы точка $x \in X$ была асимптотически постоянной (периодической, почти периодической) необходимо и достаточно, чтобы точка x была уст. L^+, $f(x,I^+)$ р.уст.Л$^+ f(x,I^+)$ и Ω_x совпадало с точкой покоя (периодической траекторией, замыканием почти периодической траектории).*

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x асимптотически постоянна (периодична, почти периодична), тогда существует постоянная (периодическая, почти периодическая) точка p такая, что имеет место равенство (1.2.2). Из (1.2.2) следует, что уст.L^+ и $\Omega_x = \Omega_p = \Sigma_p$. Таким образом осталось показать, что $f(x, I^+)$ р. уст. Л$^+ f(x, I^+)$. Из равенства (1.2.2) и почти периодичности точки p следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$ такие, что на любом отрезке длины l найдется число τ для которого

$$\rho(f(x,t), f(p,t)) < \varepsilon \tag{1.2.3}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из выше сказанного следует, что для числа $\varepsilon/3$ найдется пара чисел $\beta(\varepsilon/3)$ и $l(\varepsilon/3)$ такие, что на любом отрезке длины $l(\varepsilon/3)$ найдется число τ для которого

$$\rho(f(x,t), f(p,t)) < \varepsilon/3 \tag{1.2.4}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$. В компактном множестве Σ_x^+ интегральная непрерывность осуществляется равномерно, поэтому найдется такое $\gamma(\varepsilon)$, что для любых x_1 и $x_2 \in \Sigma_x^+$ из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \gamma$ следует

$$\rho(f(x_1,t), f(x_2,t)) < \varepsilon/3 \tag{1.2.5}$$

при всех $\beta \leq t \leq \beta + l$. Заметим, что γ можно выбрать меньше ε.

Пусть x_1 и $x_2 \in f(x, I^+)$, то есть $x_i = f(x, t_i)$ $(i = 1, 2$ и $t_i \geq 0)$, тогда

$$\rho(f(x_1,t), f(x_2,t) \leq \rho(f(x_1, t+\tau), f(x_1,t) +$$

$$\rho(f(x_1, t+\tau), f(x_2, t+\tau) + \rho(f(x_2, t+\tau), f(x_2, t).$$

Выберем $\tau \in [\beta - t, \beta - t + l]$, тогда из последнего неравенства, из (1.2.4) и (1.2.5) следует

$$\rho(f(x_1,t), f(x_2,t)) < \varepsilon \tag{1.2.6}$$

при всех $t \geq \beta$. В силу интегральной непрерывности на для чисел β и γ $(\gamma < \varepsilon)$ можно выбрать $\delta < \gamma$ так, чтобы из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(x_1$ и $x_2 \in \Sigma_x^+)$ следовало

$$\rho(f(x_1,t), f(x_2,t)) < \varepsilon \tag{1.2.7}$$

при всех $t \in [0, \beta]$. Пусть теперь $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(x_1, x_2 \in f(x, I^+), \delta < \gamma < \varepsilon)$ и $t \in I^+$, тогда $\rho(f(x_1,t), f(x_2,t)) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть x уст.L^+, $f(x, I^+)$ р.уст.Л$^+ f(x, I^+)$ и Ω_x совпадает с точкой покоя (периодической траекторией, замыканием почти периодической траектории). Согласно Лемме 6.4 из [**2**], существует точка $p \in \Omega_x$ такая, что x и p проксимальны, то есть существует $t_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \to +\infty} \rho(f(x, t_n), f(p, t_n)) = 0. \tag{1.2.8}$$

Из уст.L^+ точки x и р.уст.Л$^+ f(x, I^+)$ множества $f(x, I^+)$ следует, что Σ_x^+ р.уст.Л$^+ \Sigma_x^+$. Из уст.Л$^+ \Sigma_x^+$ множества Σ_x^+ и равенства (1.2.8) вытекает равенство (1.2.2). Теорема доказана. □

Теорема 1.2.2. *Следующие утверждения эквивалентны*

(1) *Точка x асимптотически почти периодична.*

(2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$, что на любом отрезке длины l найдется число τ для которого выполнено неравенство (2.1.39) при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$.*

(3) *Точка x уст. L^+ и $f(x, I^+)$ р. уст. Л$^+ f(x, I^+)$.*

(4) *Какова бы ни была последовательность $t_n \to +\infty$ из нее можно выделить подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{f\ (x, t_{k_n})\}$ сходится равномерно по $t \in I^+$.*

Доказательство. Заметим, что (1) → (2) следует из доказательства Теоремы 1.2.1.

Покажем, что (2) → (3). Из (2) следует что точка x уст.L^+. В самом деле. Пусть $\varepsilon > 0$, для числа $\varepsilon/2$ существуют такие числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$, что на любом отрезке длины l найдется число τ для которого

$$\rho(f(x,t), f(x, t+\tau)) < \varepsilon/2 \tag{1.2.9}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$. Покажем, что $M = f(x, [\beta, \beta + l])$ аппроксимирует $Q = \{f(x,t) :\ t \geq \beta\}$ с точностью до $\varepsilon/2$. В самом деле, если $t \geq \beta$, то существует $\tau \in [\beta - t, \beta - t + l]$, что выполнено (1.2.9) и следовательно $Q \subseteq S(M, \varepsilon/2)$. Поскольку множество M замкнуто и компактно, то оно обладает конечной $\varepsilon/2$ сетью, которая в силу включения $\overline{Q} \subseteq \overline{S(M, \varepsilon/2)}$ является ε сетью множества Q. В силу полноты пространства X множество Q компактно. Остается заметить, что $\Sigma_x^+ = M \bigcup \overline{Q}$. Наконец, из доказательства необходимости Теоремы 1.2.1 следует, что (2) и уст.L^+ влекут р. уст.Л$^+ f(x, I^+)$ множества $f(x, I^+)$.

Импликация (3) → (4) очевидна. Покажем, что (4) → (3). Допустим противное, то есть существует число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $\{\delta_n\}$, $\{t_n^i\}$ $(i = 1, 2)$ и $\{\bar{t}_n\}$ такие, что $\delta_n \to 0$

$$\rho(f(x, t_n^1), f(x, t_n^2)) < \delta_n \tag{1.2.10}$$

и

$$\rho(f(x, t_n^1 + \bar{t}_n), f(x, t_n^2 + \bar{t}_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{1.2.11}$$

Очевидно, что (4) влечет уст. L^+ точки x, поэтому последовательности $\{f(x, t_n^i)\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x}_i = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x,\ t_n^i)$. Из (1.2.10) следует, что $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$. Покажем, что последовательность $\{f(x, t_n^i)\}$ сходится к $\bar{x}$ равномерно по $t \in I^+$. Логически возможны два случая;

а. Последовательность $\{t_n^i\}$ ограничена и тогда, не умаляя общности рассуждении, можно считать ее сходящейся. Положим $t^i = \lim\limits_{n \to +\infty} {t_n}^i$, тогда $\bar{x} = f(x, t^i) = f(x, t^2)$. Имеет место

Лемма 1. *Пусть точка x уст. L^+ и $t_n \to t_0$, тогда*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \geq 0} \rho(f(x, t_n + t), f(x, t_0 + t)) = 0. \tag{1.2.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x уст.L^+ и $t_n \to t_0$. Допустим, что (1.2.12) не имеет места, тогда существуют последовательность $\{\bar{t}_n\}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\rho(f(x, t_n + \bar{t}_n), f(x, t_0 + \bar{t}_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{1.2.13}$$

В силу уст. L^+ точки x, последовательность $\{f(x, t_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x, \bar{t}_n)$, тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \leq \rho(f(x, t_n + \bar{t}_n), f(x, t_0 + \bar{t}_n)) = \\ \rho(f(f(x, \bar{t}_n), t_n), f(f(x, \bar{t}_n), t_0)).\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Переходя к пределу в (1.2.14) когда $n \to +\infty$ получим $\varepsilon_0 \leq 0$, что противоречит выбору числа ε_0. Лемма доказана. □

б. Последовательность $\{t_n^i\}$ неограничена. Согласно (4) последовательность $\{f(x, t_n^i\}$ можно считать сходящейся равномерно по $t \in I^+$. Итак мы показали, что не умаляя общности рассуждений можно считать

$$\bar{x} = \lim_{n\to+\infty} f(x, t_n^i) \quad (i = 1, 2)$$

причем сходимость в последнем равенстве равномерная по $t \in I^+$, тогда для числа $\varepsilon_0/2$ найдется натуральное n_0 число такое, что

$$\rho(f(x, t + t_n^1), f(x, t + t_n^2)) < \varepsilon_0/2 \tag{1.2.15}$$

при всех $t \in I^+$ и $n \geq n_0$. В частности и при $t = t_n$, то есть

$$\rho(f(x, t_n + t_n^1), f(x, t_n + t_n^2)) < \varepsilon_0/2 \tag{1.2.16}$$

Неравенство (1.2.16) противоречит неравенству (1.2.11). Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Покажем, что (3) → (1). Из доказательсива достаточности Теоремы 1.2.1 следует, что в Ω_x найдется точка p такая, что имеет место равенство (1.2.2). Согласно Теореме 6.26 из **[1]** Ω_x является минимальным множеством почти периодичеких движений. Теорема доказана. □

Теорема 1.2.3. *Для того, чтобы точка x была асимптотически τ-периодической, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f(x, k\tau)\}$ сходилась.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть точка x асимптотически τ-периодична, то есть существует τ-периодическая точка p такая, что имеет место равенство (1.2.2). Тогда

$$\rho(f(x, k\tau), p) = \rho(f(x, k\tau), f(p, k\tau)). \tag{1.2.17}$$

Переходя к пределу в (1.2.17), когда $k \to +\infty$ и учитывая (1.2.2) получим требуемый результат.

Достаточность. Пусть $\{f(x, k\tau)\}$ сходится. Положим

$$p = \lim_{k\to+\infty} f(x, k\tau).$$

Заметим, что

$$f(p,\tau) = f(\lim_{k\to+\infty} f(x,k\tau),\tau) = \lim_{k\to+\infty} f(x,(k+1)\tau) = p.$$

Таким образом точка p τ-периодична. Покажем, что x уст. L^+. В самом деле. Пусть $\{t_n\} \subseteq I^+$, тогда $t_n = k_n\tau + \bar{t}_n$ $(\tau > 0)$ и $\bar{t}_n \in [0,\tau)$. Последовательность $\{\bar{t}_n\}$ можно считать сходящейся и пусть $t_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{t}_n$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty} f(x,t_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x,k_n\tau+\bar{t}_n) = f(f(x,k_n\tau),\bar{t}_n) = f(p,t_0)$$

.

В силу уст. L^+ точки x на множестве Σ_x^+ интегральная непрерывность осуществляется равномерно. Так как $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x,k\tau) = p$ и имеет место равномерная интегральная непрерывность, то

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in[0,\tau]} \rho(f(x,k\tau+t),f(p,t)) = 0.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \rho(f(x,t),f(p,t)) = \rho(f(x,k\tau+\bar{t}),f(p,\bar{t})) \le \\ \sup_{\tilde{t}\in[0,\tau]} \rho(f(x,k\tau+\tilde{t}),f(p,\tilde{t}) \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

где $k = [t]$. Переходя к пределу в (1.2.18) когда $t \to +\infty$ ($k = [t] \to +\infty$, когда $t \to +\infty$) получим равенство (1.2.2). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для того, чтобы точка x была асимптотически постоянной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f(x, k\tau)\}$ сходилась при любом $\tau \in I$.*

1.3. Некоторые признаки асимптотической устойчивости по Пуассону движений динамических систем

Пусть (X,f) и (Y,g) динамические системы. Говорят (см. [**2**]), что (X,f) является расширением (Y,g) при гомоморфизме h, если h является гомоморфизмом (X,f) на (Y,g).

Пусть $y \in Y$. Слоем X_y называют полный прообраз точки y при отображении h. Положим $E_y(S) = \{\xi :\ \xi \in E(S,X),\ \xi(X_y) \subseteq X_y\}$.

Говорят, что точка $x_0 \in X$ равномерно устойчива по Ляпунову в положительном направлении относительно гомоморфизма h и обозначают р. уст.Л^+h, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $\rho(f(x,t_0),f(x_0,t_0)) < \delta$ и $h(x) = h(x_0)$, то $\rho(f(x,t),f(x_0,t)) < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$.

Лемма 2. *Пусть $y \in Y$ и (X,f) расширение (Y,g) при гомоморфизме h. Если x_1 и x_2 проксимальны в положительном направлении и хотя бы одна из точек x_i ($i = 1,2$) р. уст.Л^+h, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(f(x_1,t),f(x_2,t)) = 0$.*

Доказательство. Пусть $y \in Y$ и $x_i \in X_y$ $(i = 1, 2)$ проксимальны в положительном направлении, то существует $t_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(f(x, t_n), f(x_2, t_n)) = 0. \tag{1.3.19}$$

Пусть, для определенности X_1 р.уст.Л^+h и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta(\varepsilon)$ из условия р.уст.Л^+h точки x_1. Согласно (1.3.19) существует натуральное n_0 число такое, что $\rho(f(x_1, t_n), f(x_2, t_n)) < \delta$ при всех $n \geq n_0$. Согласно выбору δ $\rho(f(x_1, t), f(x_2, t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_{n_0}$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана. □

Обозначим через $I_\alpha = \{t \in I : \ t \geq \alpha > 0\}$. Очевидно I_α подполугруппа группы I. Элемент $u \in E(S, X)$ называют идемпотентом, если $u^2 = u$.

Лемма 3. *Если $\xi(\bar{x}) = \bar{x}$, где $\xi \in E(I_\alpha, X)$ и $\alpha > 0$, то $\bar{x}$ устойчива по Пуассону в положительном направлении.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in X$ и при некотором $\alpha > 0$ и $\xi \in E(I_\alpha, X)$, $\xi(\bar{x}) = \bar{x}$. Тогда существует последовательность $t_n \geq \alpha > 0$ такая, что $\xi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x, t_n)$ при всех $x \in X$, в частности

$$\xi(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(\bar{x}, t_n) = \bar{x}.$$

Из последнего равенства $(t_n \geq \alpha > 0)$ следует, что $\bar{x}$ устойчива по Пуассону в положительном направлении. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть $u \in E_y(I_\alpha)$ $(\alpha > 0)$ - идемпотент. Какова бы ни была точка $x \in X_y$ точка $\bar{x} = u(x)$ - устойчива по Пуассону в положительном направлении и $\bar{x}$ проксимальна с x. Если р.уст.Л^+h, то x - асимптотически устойчива по Пуассону в положительном направлении.*

Доказательство. Пусть $u \in E_y(I_\alpha)$ идемротент, тогда $u^2(x) = u(x)$, то есть $u(\bar{x}) = \bar{x}$. Согласно Лемме 3 $\bar{x}$ устойчива по Пуассону в положительном направлении. Заметим, что $u(\bar{x}) = u(x)$. Покажем, что x и $\bar{x}$ проксимальны. Так как $u \in E(I_\alpha, X)$, то существует последовательность $\{t_n\} \subseteq I_\alpha$ такая, что $u(\tilde{x}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\tilde{x}, t_n)$ при всех $\tilde{x} \in X$. Так как $u(\bar{x}) = u(x)$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\bar{x}, t_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x, t_n)$. Возможны два случая. Либо последовательность $\{t_n\}$ ограничена и тогда очевидно $\bar{x} = x$, либо неограничена и следовательно $\inf\limits_{t\geq 0} \rho(f(\bar{x}, t), f(x, t)) = 0$.

Таким образом x и $\bar{x}$ проксимальны. Если x р.уст.Л^+h, то из Леммы 2 следует равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(f(\bar{x}, t), f(x, t)) = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть (X, f) расширение (Y, g) при гомоморфизме h. Если существуют $\alpha > 0$, $\{t_n\} \subseteq I_\alpha$ и компакт $Q \subseteq X$ такие, что:*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y, t_n) = y$ *при некотором* $y \in Y$.

2. *X_y и $X_{y_n} \subseteq Q$, где $y_n = g(y, t_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Тогда

$$E^*_y(I_\alpha) = \overline{\{f^t\big|_{X_y} :\ t \in I_\alpha\}} \bigcap \{\xi \in E(I_\alpha, X) :\ \xi(X_y) \subseteq X_y\}$$

непусто.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$, $\{t_n\} \subseteq I_\alpha$, $y \in Y$ и $Q \subseteq X$ такие, что имеют место 1 и 2, где Q - компакт из X. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\} \subseteq Q^{X_y}$ определенная равенством $\xi_n(x) = f(x, t_n)$ при всех $x \in X_y$ и $n = 1, 2, \ldots$. Так как X_y и Q компактны, то согласно теореме Тихонова последовательность $\{\xi_n\}$ компактна в Q^{X_y}. Чтобы не осложнять обозначения будем считать что $\{\xi_n\}$ сходится и положим $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n$. Покажем, что $\xi \in E_y(I_\alpha)$. В самом деле, пусть $x \in X_y$, тогда $\xi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x, t_n)$ и

$$h(\xi(x)) = h(\lim_{n\to+\infty} f(x, t_n)) = \lim_{n\to+\infty} g(y, t_n) = y.$$

Таким образом $\xi(X_y) \subseteq X_y$. □

Теорема 1.3.4. *Пусть (X, f) расширение (Y, g) при гомоморфизме h. Если существует α, $\{t_n\} \subseteq I_\alpha$ и компакт $Q \subseteq X$ такие, что*

a. *$\lim\limits_{n\to+\infty} g(y, t_n) = y$ при некотором $y \in Y$.*

b. *X_y и $X_{y_n} \subseteq Q$, где $y_n = g(y, t_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Тогда

1. *В X_y существует устойчивая по Пуассону в положительном направлении точка.*
2. *Всякая р.уст.Л^+h точка $x_0 \in X_y$ асимптотически устойчива по Пуассону в положительном направлении.*

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$, $\{t_n\} \subseteq I_\alpha$ и компакт $Q \subseteq X$ такие, что имеют место *a.* и *b*. Из Леммы 5 следует, что $E_y(I_\alpha)$ непусто. Согласно Леммы 2.12 [**2**] $E_y(I_\alpha)$ компактная полугруппа, тогда на основании Леммы 3.4 [**2**] в $E_y(I_\alpha)$ существует идемпотент u. Согласно Лемме 4 в X_y существует устойчивая по Пуассону в положительном направлении точка.

Пусть $x_o \in X_y$ р.уст.Л^+h, тогда согласно той же Леммы 4 x_0 асимптотически устойчива по Пуассону в положительном направлении. □

Теорема 1.3.5. *Пусть (X, f) расширение (Y, g) при гомоморфизме h. Если $y \in Y$ рекуррентна, а $x_0 \in X_y$ уст. L^+ и р.уст.Л^+h, то x_0 асимптотически рекуррентна.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X_y$ уст. р.уст.Л^+h. Согласно Лемме @@.29 [**3**] существует рекуррентная точка $m \in X_y$ такая что x_0 и m проксимальны. Согласно Лемме 2 $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(f(x_0, t), f(m, t)) = 0$. Теорема доказана. □

Лемма 6. *Пусть* (X, f) *расширение* (Y, g) *при гомоморфизме* h, $x_n \in X_{y_n}$ *(* $y_n \in Y$, $y = \lim\limits_{n\to+\infty}$*), тогда предел всякой сходящейся подпоследовательности последовательности* $\{x_n\}$ *(*$n = 1, 2, \ldots$*) принадлежит* X_y.

Доказательство. Пусть $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Покажем что $x \in X_y$. В самом деле

$$h(x) = h(\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} h(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = y.$$

☐

Следствие 2. *Пусть* $x \in X_y$, *тогда* $h(\Omega_x) \subseteq \Omega_y$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in \Omega_x$, тогда сществует $t_n \to +\infty$ такая что $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x, t_n)$. Положим $\bar{y} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(y, t_n)$. Очевидно $\bar{y} \in \Omega_y$ и согласно Лемме 6 $h(\bar{x}) = \bar{y}$. ☐

Следствие 3. X_y *замкнуто.*

Следствие 4. *Пусть* $x_0 \in X_{y_0}$ *уст.*L^+, *тогда* $\Omega_{x_0} \bigcap X_y$ *какова бы ни была точка* $y \in \Omega_{y_0}$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X_{y_0}$ уст.L^+ и $y \in \Omega_{y_0}$, тогда существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $y = \lim\limits_{n\to+\infty} g(y_0, t_n)$. В силу уст. L^+ точки x_0 последовательность $\{f(x_0, t_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $x = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0, t_n)$, тогда и согласно Лемме 6 $x \in X_y$. Таким образом $x \in \Omega_{x_0} \bigcap X_y$. ☐

Следствие 5. *Пусть* $x_0 \in X_{y_0}$ *уст.* L^+, *тогда* $h(\Omega_{x_0}) = \Omega_{y_0}$.

Доказательство. Согласно Следствию 2 $h(\Omega_{x_0}) \subseteq \Omega_{y_0}$ $(x_0 \in X_{t_0})$. Покажем что $\Omega_{y_0} \subseteq h(\Omega_{x_0})$. Пусть $y \in \Omega_{y_0}$. Согласно Следствию 4 $\Omega_{x_0} \bigcap X_y \neq \emptyset$. Если $x \in \Omega_{x_0} \bigcap X_y$, то $y = h(x)$ и следовательно $y \in h(\Omega_{x_0})$. Таким образом $\Omega_{y_0} \subseteq h(\Omega_{x_0})$, а значит и $\Omega_{y_0} = h(\Omega_{x_0})$. ☐

Теорема 1.3.6. *Пусть* (X, f) *расширение* (Y, g) *при гомоморфизме* h *и* $x_i \in X_{y_i}$ *(*$i = 1, 2$*). Если*

1. *Точки* x_i *уст.* L^+.
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(g(y_1, t), g(y_2, t)) = 0$.
3. X_y *содержит не более одной уст.* L^+ *точки какова бы ни была точка* $y \in \Omega_{y_1} = \Omega_{y_2}$, *тогда*

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(f(x_1, t), f(x_2, t)) = 0. \tag{1.3.20}$$

Доказательство. Пусть x_i уст. L^+, тогда Ω_{x_i} состоит из уст. L точек. Согласно Следствию 4 $X_y \bigcap \Omega_{x_i}$ для любого $y \in \Omega_{y_1} = \Omega_{y_2}$. Учитывая 3. заключаем, что в X_y содержится ровно одна уст. L точка.

Пусть все условия 1. – 3. выполнены, а (1.3.20) не имеет места, то есть найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(f(x_1, t_n), f(x_2, t_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{1.3.21}$$

В силу уст. L^+ точек x_1 и x_2 последовательности $\{f(x_i, t_n)\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_i, t_n)$. Заметим, что $\bar{x}_i \in \Omega_{x_i}$ и следовательно $\bar{x}_i$ уст. L. Пусть $\bar{y}_i = h(\bar{x}_i)$. Согласно Следствию 2 $\bar{y}_i \in \Omega_{y_1} = \Omega_{y_2}$. Покажем, что $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. В самом деле. Из равенства 2. следует равенство

$$\lim_{n\to+\infty} g(y_1, t_n) = \lim_{n\to+\infty} g(y_2, t_n). \tag{1.3.22}$$

Поскольку $x_i \in X_{y_i}$ $(i = 1, 2)$, то из (1.3.22) следует равенство

$$\lim_{n\to+\infty} g(h(x_1), t_n) = \lim_{n\to+\infty} g(h(x_2), t_n). \tag{1.3.23}$$

Таким образом

$$\bar{y}_1 = h(\bar{x}_1) = h(\lim_{n\to+\infty} f(x_1, t_n)) = \lim_{n\to+\infty} g(h(x_1), t_n) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} g(h(x_2), t_n) = h(\bar{x}_2) = \bar{y}_2.$$

Остается заметить, что $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = y \in \Omega_{y_1} = \Omega_{y_2}$ и $\bar{x}_i \in X_y$. Из неравенства (1.3.21) следует, что $\varepsilon_0 \leq 0$ поскольку $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Последнее противоречит выбору числа ε_0. Теорема доказана. □

Говорят [**4**], что точка $x \in X$ равномерно сравнима по возвращаемости с точкой $y \in Y$, если существует равномерно непрерывное отображение $\tilde{h} : g(y, I) \mapsto f(x, I)$ такое что $h(g(y, t)) = f(x, t)$ при всех $t \in I$.

Положим $\mathfrak{M}_x = \{\{t_n\} : \text{таких что } \{f(x, t_n)\} \text{ сходится } \}$.

Известно [**4**], что точка $x \in X$ равномерно сравнима по возвращаемости с уст. L точкой $y \in Y$ тогда и тлько тогда, когда $\mathfrak{M}_y \subseteq \mathfrak{M}_x$.

Теорема 1.3.7. *Пусть (X, f) hасширение (Y, g) при гомоморфизме h. Если $x \in X_y$ уст. L и $X_{\bar{y}}$ содержит не более одной уст. L точки при любом $\bar{y} \in \Sigma_y$, то x равномерно сравнима с y.*

Доказательство. Пусть $x \in X_y$ уст. L и $\bar{y} \in \Sigma_y$ тогда существует $\{\bar{t}_n\}$ такая что $\bar{y} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(y, \bar{t}_n)$. Так как x уст. L, то последовательность $\{f(x, \bar{t}_n)\}$ компактна. Пусть $\bar{x}$ предельная точка последовательности $\{f$ $(x,\ \bar{t}_n)\}$. Согласно Лемме 6 $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$ и $\bar{x}$ уст. L. Так как в $X_{\bar{y}}$ содержится не более одной уст. L точки, то в $X_{\bar{y}}$ содержится ровно одна уст. L точка. Покажем что $\mathfrak{M}_y \subseteq \mathfrak{M}_x$. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_y$. Положим $\tilde{y} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(y, t_n)$. Повторяя предыдущие рассуждения получим, что каждая предельная точка последовательности $\{f(x, t_n)\}$ содержится в $X_{\tilde{y}}$, а поскольку в $X_{\tilde{y}}$ содержится ровно одна уст. L точка, то множество предельных точек последовательности $\{f(x, t_n)\}$ состоит ровно из одной точки. Учитывая уст. L точки x заключаем, что $\{f(x, t_n)\}$ сходится. Теорема доказана. □

Будем говорить, что точка $x \in X$ асимптотически равномерно сравнима по возвращаемости с точкой $y \in Y$, если существует точка $p \in X$, равномерно сравнимая с $y \in Y$ такая, что имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(f(x,t), f(p,t)) = 0.$$

Из результатов работы [**4**] и приведенного определения вытекает

Следствие 6. *Если точка $x \in X$ асимптотически равномерно сравнима с постоянной (τ-периодической, почти периодической, рекуррентной) точкой $y \in Y$, то x асимптотически постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна).*

Теорема 1.3.8. *Пусть (X, f) расширение (Y, g) при гомоморфизме h. Если*

1. *$q \in \Omega_q$ уст. L^+.*
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(g(y,t), g(q,t)) = 0$.
3. *$X_{\bar{q}}$ содержит не более одной уст. L точки при любом $\bar{q} \in \Omega_q$.*

Тогда всякая уст. L^+ точка x из X_y асимптотически равномерно сравнима с q.

Доказательство. Доказательство сформулированной теоремы вытекает из Теоремы 1.3.6, 1.3.7 и соответствующего определения. ☐

Следуя Америо [**5**], точку $x \in X$ назовем разделенной относительно M, если существует число $r > 0$ такое, что $\rho(f(x,t), f(\tilde{x},t)) \geq r$ при всех $t \in I$ какова бы ни была точка $\tilde{x} \in M$ $(\tilde{x} \neq x)$.

Лемма 7. *Если каждая точка компактного множества $M \subseteq X$ разделена относительно M, то M состоит из конечного числа точек.*

Доказательство. Пусть M компактно, каждая из точек M разделена относительно M, а утверждение Леммы 7 несправедливо, то есть существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ различных точек в M. В силу компактности M, последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Выберем число $r > 0$ из условия разделенности точки x относительно M, тогда в частности

$$\rho(x, \tilde{x}) \geq r \tag{1.3.24}$$

при всех $\tilde{x} \in M$ $(\tilde{x} \neq x)$. С другой стороны $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, поэтому существует такое натуральное число n_0, что

$$\rho(x, x_n) < r \tag{1.3.25}$$

при всех $n \geq n_0$. Неравенство (1.3.25) противоречит (1.3.24). ☐

Лемма 8. *Пусть (X, f) расширение (Y, g) при гомоморфизме h. Если*

1. *X компактно.*
2. *Y минимально.*

3. *Любая точка* $x \in X$ *разделена относительно* $X_{h(x)}$.

Тогда существует число $r > 0$ *такое что, если* $x_1 \neq x_2$ $(h(x_1) = h(x_2))$, *то* $\rho(f(x_1, t), f(x_2, t)) \geq r$.

Доказательство. Пусть $y_0 \in Y$. Согласно Следствию 2 X_{y_0} замкнуто и согласно 1. компактно. Из 3. и Леммы 7 следует, что X_{y_0} состоит из конечного числа точек. Пусть $X_{y_0} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_{y_0}}\}$. Положим

$$r = \inf_{i \neq j,\ t \in I} \rho(f(x_i, t), f(x_j, t)).$$

Из 3. следует, что $r > 0$. Покажем что обладает требуемым в лемме свойством.

Прежде всего заметим что X_y состоит из конечного числа точек при любом $y \in Y$. Причем число точек в X_y равно числу числу точек в X_{y_0}. В силу минимальности Y, существует последовательность $\{t_n\}$ такая что $y = \lim_{n \to +\infty} g(y_0, t_n)$. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\} \subseteq X^X$, определенных равенством $\xi_n(x) = f(x, t_n)$ при всех $x \in X$. Согласно теореме Тихонова $\{\xi_n\}$ компактна в X^X. Будем считать что $\{\xi_n\}$ сходится и положим $\xi = \lim_{n \to +\infty} \xi_n$. Обозначим через $\bar{x}_i = \xi(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n_{y_0}$, $x_i \in X_{y_0})$. Согласно Лемме 6 $\bar{x}_i \in X_y$ $(i = 1, 2, \dots, n_{y_0})$. Покажем что $\bar{x}_i$ различны. Поскольку $\xi(x) = \lim_{n \to +\infty} \xi_n(x)$ при каждом $x \in X$. В частности при каждом $t \in I$

$$\xi(f(x_i, t)) = \lim_{n \to +\infty} f(f(x_i, t), t_n) = \lim_{n \to +\infty} f(f(x_i, t_n), t) =$$
$$f(\xi(x_i), t) = f(\bar{x}_i, t).$$

Согласно выбору числа $r > 0$

$$\rho(f(x_i, t), f(x_j, t)) \geq r \tag{1.3.26}$$

при всех $t \in I$. Из неравенства (1.3.26) следует неравенство

$$\rho(f(x_i, t + t_n), f(x_j, t + t_n)) \geq r. \tag{1.3.27}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.3.27) и учитывая равенство

$$f(\bar{x}_i, t) = \lim_{n \to +\infty} f(x_i, t + t_n)$$

получим, что

$$\rho(f(\bar{x}_i, t), f(\bar{x}_j, t)) \geq r \tag{1.3.28}$$

при всех $t \in I$. Из (1.3.28) следует, что точки $\bar{x}_i$ различны, таким образом $n_y \geq n_{y_0}$, где n_y число точек в X_y. Используя минимальность Y и повторяя приведенные выше рассуждения заключаем, что $n_{y_0} \geq n_y$ и следовательно $n_{y_0} = n_y$. Таким образом $X_y = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n_{y_0}}\}$. Из неравенства (1.3.28) следует, что r обладает требуемым свойством. ☐

Теорема 1.3.9. *Пусть* (X, f) *расширение* (Y, g) *при гомоморфизме* h *и* $y_0 \in Y$. *Если*

1. y_0 *асимптотически почти периодична.*

2. *Любая точка* $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$ *при любом* $\bar{y} \in \Omega_{y_0}$ *разделена относительно* $X_{\bar{y}}$.

Тогда всякая уст. L^+ *точка* $x_0 \in X_{y_0}$ *асимптотически почти периодична.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X_{y_0}$ уст. L^+ и y_0 асимптотически почти периодична. Согласно Теореме 1.2.2 для асимптотической почти периодичности точки x_0 достаточно показать, что из любой последовательности $t_n \to +\infty$ можно выбрать подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{f(x_0, t_{k_n})\}$ сходится равномерно по $t \in I^+$.

Предположим противное. Пусть существует $t_n \to +\infty$ такая, что $\{f(x_0, t_{k_n})\}$ сходится (этого всегда можно добится в силу уст. L^+ точки x_0) причем любая ее подпоследовательность не сходится равномерно по $t \in I^+$. Так как y_0 асимптотически почти периодична, то на основании Теоремы 2.2.15 последовательность $\{g(y_0, t_n)\}$ можно считать сходящейся равномерно по $t \in I^+$.

Так как x_0 уст. L^+, то Ω_{x_0} компактно. Согласно Теореме 1.2.1 Ω_{y_0} является минимальным множеством. Очевидно

$$\tilde{h} = h\big|_{\Omega_{x_0}}$$

является гомомрфизмом $(\Omega_{x_0}, f))$ на (Ω_{y_0}, g). Заметим что для гомоморфизма $\tilde{h}$ выполнены все условия Леммы 8. Обозначим через r число существование которого гарантируется Леммой 8. Обозначим через $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0, t_n)$. Можно считать что $f(\bar{x}, t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0, t+t_n)$, Положим

$$\varphi_{mn}(t) = \rho(f(x_0, t+t_m), f(x_0, t+t_n)) \tag{1.3.29}$$

и

$$I^+_{mn} = \{t \in I^+ : \ \varphi_{mn}(t) \le r/2\}.$$

Так как последовательность $\{f(x_0, t+t_n)\}$ сходится при каждом фиксированном $t \in I^+$, то при достаточно больших m и n $I^+_{mn} \neq \emptyset$ причем

$$I^+ = \bigcup_{m<n} I^+_{mn}.$$

Положим

$$\delta_{mn} = \sup_{t \in I^+_{mn}} \varphi_{mn}(t).$$

Если

$$\lim_{m,n\to+\infty} \delta_{mn} = 0, \tag{1.3.30}$$

то $\{f(x_0, t_n)\}$ сходится равномерно на I^+. Действительно, при условии (1.3.30) для любого $\varepsilon > 0$, где $0 < \varepsilon < r/2$, имеем $\delta_{mn} < \varepsilon$ при $n > m \ge n_)$. Отсюда $\varphi_{mn}(t) < \varepsilon$ если $t \in I^+_{mn}$, причем $\varphi_{mn}(t) > r/2$, если $t \in I^+_{mn}$. Но функция φ_{mn} непрерывна на I^+ поэтому $I^+_{mn} = I^+$ при $m > n \ge n_0$ и, следовательно, $\{f(x_0, t_n)\}$ сходится равномерно на I^+. В этом случае теорема доказана.

Предположим противное, то есть что соотношение (1.3.30) не имеет места. Тогда

$$\limsup_{m,n\to+\infty} \delta_{mn} = 2\gamma > 0, \tag{1.3.31}$$

и, следовательно, найдутся последовательности $\{m_l\}$ и $\{n_l\}$ такие, что $\delta_{m_l n_l} \geq \gamma$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Отсюда в силу определения δ_{mn} вытекает что существует последовательность $\{t_l\} \subseteq I^+$ при которой $\varphi_{m_l n_l}(t_l) \geq \gamma/2$ и значит

$$\gamma/2 \leq \rho(f(x_0, t_l + t_{m_l}), f(x_0, t_l + t_{n_l})) \leq r/2. \tag{1.3.32}$$

Так как $\{t_{m_l}\}$ и $\{t_{n_l}\}$ подпоследовательности $\{t_n\}$ и x_0 уст. L^+, то из последовательностей $\{f(x_0, t_l + t_{m_l})\}$ и $\{f(x_0, t_l + t_{n_l})\}$ можно выбрать одновременно сходящиеся подпоследовательности: $\tilde{x} = \lim\limits_{s\to+\infty} f(x_0, t_l^{'} + \mu_s)$ и , где $t_l^{'} = t_{m_s}$, $\lambda_s = t_{m_{l_s}}$ и $\mu_s = t_{n_{l_s}}$. Переходя к пределу в неравенстве (1.3.32) по подпоследовательности $\{r_s\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ будем иметь

$$\gamma/2 \leq \rho(\bar{x}, \tilde{x}) \leq r/2. \tag{1.3.33}$$

Пусть $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$ и $\tilde{x} \in X_{\tilde{y}}$. Покажем что $\bar{y} = \tilde{y}$. Обозначим через $y = \lim\limits_{n\to+\infty} g(y_0, t_n)$. В силу выбора $\{\lambda_s\}$ и $\{\mu_s\}$ имеет место равенство

$$\lim_{s\to+\infty} g(y_0, \lambda_s) = \lim_{s\to+\infty} g(y_0, \mu_s)$$

причем сходимость в последнем равенстве равномерная по $t \in I^+$. Откуда следует что

$$\lim_{s\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \rho(g(y_0, t + \lambda_s), g(y_0, t + \mu_s)) = 0 \tag{1.3.34}$$

и следовательно

$$\rho(\bar{y}, \tilde{y}) \leq \rho(\bar{y}, g(y_0, t_s^{'} + \lambda_s)) + \\ \rho(g(y_0, t_s^{'} + \lambda_s), g(y_0, t_s^{'} + \mu_s)) + \rho(g(y_0, t_s^{'} + \mu_s), \tilde{y}). \tag{1.3.35}$$

Из (1.3.35), (1.3.34) и равенства $\bar{y} = \lim\limits_{s\to+\infty} g(y_0, t_s^{'} + \lambda_s)$ (аналогично для $\tilde{y} = \lim\limits_{s\to+\infty} g(y_0, t_s^{'} + \mu_s)$) следует равенство $\bar{y} = \tilde{y}$. Таким образом $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ различные точки одного и того же слоя. В силу выбора $r > 0$ должно иметь место неравенство

$$\rho(f(\bar{x}, t), f(\tilde{x}, t)) \geq r. \tag{1.3.36}$$

Однако неравенство (1.3.36) противоречит неравенству (1.3.33). Теорема доказана. □

Пусть (X, f) расширение (Y, g) при гомомрфизме h. Будем говорить, что точка $x \in X_y$ устойчива в положительном направлении при постоянных возмущениях из $g(y, I^+)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое

$\delta(\varepsilon) > 0$, что если

$$\sup_{t\geq 0} \rho(g(y,t_1+t), g(y,t_2+t)) < \delta \ (t_1,t_2 \geq 0) \quad \text{и} \quad \rho(f(x,t_1), f(x,t_2)) < \delta,$$

тогда

$$\rho(f(x,t_1+t), f(x,t_2+t)) < \varepsilon$$

при всех $t \in I^+$.

Теорема 1.3.10. *Пусть* (X,f) *расширение* (Y,g) *при гомоморфизме* h *и*

1. y_0 *асимптотически почти периодична.*
2. $x_0 \in X_{y_0}$ *уст.* L^+.
3. x_0 *устойчива в положительном направлении при постоянных возмущениях из* $g(y_0, I^+)$.

Тогда x_0 *асимптотически почти периодмчна.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X_{y_0}$, выполнены условия $1.-3.$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta(\varepsilon)$ из условия устойчивости в положительном направлении точки x_0 при постоянных возмущениях из $g(y_0, I^+)$. Из Теоремы 1.2.2 следует, что для асимптотической почти периодичности точки x_0 достаточно показать, что из любой последовательности $t_n \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{f(x_0, t_{k_n}\}$ сходится равномерно по $t \in I^+$. Пусть $x = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0,t_n)$. Последовательности $\{f(x_0,t_n)\}$ и $\{g(y_0,t_n)\}$ можно считать сходящимися, причем вторая сходится равномерно по $t \in I^+$, следовательно существует такое натуральное число n_0, что

$$\sup_{t\geq 0} \rho(g(y_0, t+t_n), g(y_0, t+t_n)) < \delta$$

и

$$\rho(f(x_0,t_n), f(x_0,t_m)) < \delta,$$

и следовательно

$$\rho(f(x_0, t+t_n), f(x_0, t+t_n)) < \varepsilon \tag{1.3.37}$$

при всех $t \in I^+$. Из неравенства (1.3.37) следует, что $\{f(x_0,t_n)\}$ сходится равномерно по $t \in I^+$. Согласно Теореме 1.2.2 точка x_0 асимптотически почти периодична. Теорема доказана. □

1.4. Асимптотически устойчивые по Пуассону функции и динамические системы сдвигов

Пусть $\mathfrak{B}$ банахово пространство с нормой $||\cdot||$. Через $C(I,\mathfrak{B})$ обозначим пространство всех непрерывных функций, определенных на I и принимающих значения в $\mathfrak{B}$ с метрикой

$$\rho(\varphi,\psi) = \sup_{L>0} \min\{\max_{|t|\leq L} ||\varphi(t) - \psi(t)||; 1/L\}$$

для любых φ и ψ из $C(I,\mathfrak{B})$. Если $\varphi \in C(I,\mathfrak{B})$ и $\tau \in I$ символом φ^τ будем обозначать сдвиг функции φ на τ.

Рассмотрим отображение $\sigma : C(I, \mathfrak{B}) \times I \mapsto C(I, \mathfrak{B})$, определенное условием $\sigma(\varphi, \tau) = \varphi^{\tau}$ при любых $\varphi \in C(I, \mathfrak{B})$ и $\tau \in I$. Можно показать [**4**], что отображение σ удовлетворяет всем аксиомам динамических систем. Определяемая этим отображением динамическая система $(C(I, \mathfrak{B})$, $\sigma)$ служит удобным способом исследования общих свойств непрерывных функций [**4**]. На этом пути рассмотрим некоторые классы функций.

Будем говорить, что функция $\varphi \in C(I, \mathfrak{B})$ обладает свойством (A), если этим свойством обладает движение $\sigma(\varphi, t)$, порожденное функцией в динамической системе $(C(I, \mathfrak{B}), \sigma)$.

В качестве свойства (A) может быть уст. L^{+}, р.уст.Л^{+}h, периодичность, почти периодичность, асимптотическая почти периодичность и т. д.

Заметим, что равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\varphi_1^t, \varphi_2^t) = 0$$

эквивалентно равенству

$$\lim_{t \to +\infty} ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| = 0,$$

где φ_1 и φ_2 из $C(I, \mathfrak{B})$.

Из последнего замечания следует, что функция $\varphi \in C(I, \mathfrak{B})$ асимптотически постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна, устойчива по Пуассону) тогда и только тогда, когда существуют функции p и $\omega \in C(I, \mathfrak{B})$ такие, что

1. $\varphi(t) = p(t) + \omega(t)$ при всех $t \in I$.
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} ||\omega(t)|| = 0$, а p постоянная (τ-периодческая, почти периодична, рекуррентна, устойчива по Пуассону).

Таким образом, данное нами определение асимптотической почти периодичности функций совпадает с определением Фреше [**6**].

Из данных выше определений и Теорем 1.2.1, 1.2.2 и 1.2.3 вытекают

Теорема 1.4.11. *Для того чтобы функция $\varphi \in C(I, \mathfrak{B})$ была асимптотически постоянной (периодической, почти периодической) необходимо и достаточно, чтобы функция φ была уст. L^{+}, $\sigma(\varphi, I^{+})$ р.уст.Л$^{+}$ $\sigma(\ \varphi,\ I^{+})$ и Ω_{φ} состояло из постоянной функции (траектории периодической функции, замыкания траектории почти периодической функции).*

Теорема 1.4.12. *Пусть $\varphi \in C(I, \mathfrak{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Функция φ асимптотически почти периодчна.*
2. *φ уст. L^{+} и $\sigma(\varphi, I^{+})$ р.уст.Л$^{+}\sigma(\varphi, I^{+})$.*
3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$ такие, что на любом отрезке длины l найдется число τ для которого*

$$||\varphi(t + \tau) - \varphi(t)|| < \varepsilon$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$.

4. *Какова бы ни была последовательность* $\{t_n\}$ *неотрицательных чисел такая что* $t_n \to +\infty$ *из нее можно выбрать подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что последовательность* $\{\varphi(t+t_{k_n})\}$ *сходится равномерно по* $t \in I^+$.

В случае, когда $\mathfrak{B}$ конечномерно, то эквивалентность условий 1., 3. и 4. составляет содержание известной теоремы Фреше [**6**].

Теорема 1.4.13. *Функция* φ *асимптотически* τ*-периодична, тогда и только тогда, когда последовательность* $\{\varphi^{k\tau}\}$ *сходится в пространстве* $C(I, \mathfrak{B})$.

Следствие 7. *Функция* φ *асимптотически постоянна, тогда и только тогда, когда последовательность* $\{\varphi^{k\tau}\}$ *сходится, при любом* $\tau \in I^+$.

Обозначим через E^n n-мерное (комплексное или действительное) евклидово пространство с нормой $||\cdot||$ и пусть $W \subseteq E^n$ область из E^n. Через $C(I \times W, E^n)$ $(L_p(I \times W, E^n))$ обозначим пространство всех нерерывных (локально суммируемых по t вместе с p-ой ($p \geq 1$) степенью и непрерывных по x) функций, определенных на $I \times W$ и принимающих значения в E^n с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{L>0} \min\{ \max_{|t|+||x|| \leq L} ||f(t,x) - g(t,x)||; 1/L\}$$

$$(\ \rho(f,g) = \sup_{L>0} \min\{ (\int_{|t| \leq L} \max_{||x|| \leq L, \ x \in W} ||f(t,x) - g(t,x)||^p dt)^{1/p}; 1/L\} \ ).$$

Рассмотрим отображение $\sigma : C(I \times W, E^n) \times I \mapsto C(I \times W, E^n)$ $(\sigma : L_p(I \times W, E^n) \times I \mapsto L_p(I \times W, E^n)$) определенное условием $\sigma(f,\tau) = f^\tau$ при любых $f \in C(I \times W, E^n)$ ($f \in L_p(I \times W, E^n)$) и $\tau \in I$. Можно показать (см. [**4**] и [**7**]), что отображение σ удовлетворяет всем аксиомам динамических систем.

Замечание 1.4.1. *Все результаты данной главы справедливы и для каскадов, то есть когда вместо* I *берется группа целых чисел* $\mathbb{Z}$.

Глава 2

Асимптотически устойчивые по Пуассону решения дифференциальных уравнений

2.1. Дифференциальные уравнения и связанные с ними расширения динамических систем

Пример 1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$x' = f(t,x) \tag{2.1.38}$$

где $f \in C(I \times W, E^n)$. *Обозначим через* $Y = C(I \times W, E^n)$ *и* (Y, σ_2) *динамическую систему сдвигов на* Y. *Через* X *обозначим множество всех пар* $(\varphi, f) \in C(I, E^n) \times C(I \times W, E^n)$ *таких, что* φ *является решением уравнения (2.1.38), а* (X, σ_1) *динамическую систему сдвигов на* X. *Определим отображение* $h : X \mapsto Y$ *следующим образом* $h(\varphi, f) = f$ *для любых* $(\varphi, f) \in X$, *тогда* h *является гомоморфизмом динамической системы* (X, σ_1) *на* (Y, σ_2).

Пример 2. *Пусть* $\varphi \in C(I, E^n)$ *решение уравнения (2.1.38). Обозначим через* $K = \overline{\varphi(I)}$, $f|_{I \times K}$ *и* $\Sigma_{f|_K} = \overline{\sigma(f|_K, I)}$. *Положим* $Y = \Sigma_{f|_K}$ *и* $X = \Sigma_{(\varphi, f|_K)}$. *Определим отображение* $h : X \mapsto$ *следующим условием* $h(\psi, f) = f$ *для любой* $(\psi, f) \in X$. *Отображение* h *является еомоморфизмом* (X, σ_1) *на* (Y, σ_2).

Пример 3. *Пусть* $a_i \in C(I, E)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. *Рассмотрим уравнение*

$$x^n + a_1(t)x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)x + a_n(t) = r(t,x), \tag{2.1.39}$$

где $r \in C(I \times, E)$. *Обозначим через* $f = (a_1, a_2, \dots, a_n, r)$ *и положим* $Y = \Sigma_f$.

Под решением уравнения (2.1.39) будем понимать непрерывную функцию удовлетворяющую уравнению (2.1.39).

Наряду с уравнением (2.1.39) рассмотрим алгебраическое уравнение

$$x^n + a_1(t)x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)x + a_n(t) = 0. \tag{2.1.40}$$

Если дискриминант $D(t)$ *уравнения (2.1.40) отличен от нуля, то существует ровно* n *решений уравнения (2.1.40), причем когда*

$$\inf_{t \in I} D(t) > 0,$$

то

$$\inf_{t \in I} |\lambda_i(t) - \lambda_j(t)| > 0$$

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$ *решения (2.1.40).*

Пусть λ *решение уравнения (2.1.39). Положим* $X = \Sigma_{(\lambda,f)}$. *Определим отображение* $h : X \mapsto Y$ *равенством* $h(\lambda, f) = f$, *тогда* h *будет гомоморфизмом* (X, σ_1) *на* (Y, σ_2).

2.2. Асимптотически равномерно согласованные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x) + r(t, x), \tag{2.2.41}$$

где f и $r \in C(I \times W, E^n)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} ||r(t, x)|| = 0$ равномерно по x на компактах из W. Наряду с уравнением (2.2.41) рассмотрим семейство уравнений

$$y' = g(t, y), \tag{2.2.42}$$

где $g \in \Omega_f$ и

$$z' = f(t, z). \tag{2.2.43}$$

Будем говорить, что решение $\varphi \in C(I, E^n)$ уравнения (2.2.41) ограничено на I^+ (I), если $\overline{\varphi(I^+)}$ $(\overline{\varphi(I)})$ компакт.

Лемма 9. *Пусть* φ *ограниченное на* I^+ *решение уравнения (2.2.41),* $f \in \Omega_f$ *и* $\lim\limits_{t \to +\infty} ||r(t, x)|| = 0$ *равномерно по* x *на компактах из* W.

Тогда уравнение (2.2.43) обладает ограниченным на I *решением* $\psi \in \Omega_\varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C(I, E^n)$ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.41) и $f \in \Omega_f$. Так как $f \in \Omega_f$, то существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{t_n}$. Тогда очевидно $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{t_n} + r^{t_n}$ и φ^{t_n} является ограниченным на $[-t_n, +\infty)$ решением уравнения с правой частью $f^{t_n} + r^{t_n}$. Согласно Лемме 3.1.1 [4] последовательность $\{\varphi^{t_n}\}$ можно считать сходящейся. Положим $\psi = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi^{t_n}$. Очевидно $\psi \in \Omega_\varphi$ и согласно Лемме 3.1.1 [4] есть решение уравнения (2.2.43). Заметим что $\overline{\psi(I)} \subseteq \overline{\varphi(I^+)}$. Лемма доказана. □

Теорема 2.2.14. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция* f *уст.* L^+.
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} ||r(t, x)|| = 0$ *равномерно по* x *на любом компакте из* W.
3. *Каждое уравнение семейства (2.2.42) допускает не более одного ограниченного на* I *решения.*

Тогда для любых ограниченных на I^+ *решений* φ_1 *и* φ_1 *соответственно (2.2.41) и (2.2.43) выполняется равентсво*

$$\lim_{t \to +\infty} ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| = 0.$$

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 ограниченные на I^+ решения уравнений (2.2.41) и (2.2.43) соответсвенно. Из 1. и 2. следует, что $\tilde{f} = f + r$ уст. L^+ и имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\tilde{f}^t, f^t) = 0.$$

Согласно Лемме 3.1.1 [4] φ_1 и φ_2 уст. L^+. Рассмотрим гомоморфизм $h : (X, \sigma_1) \mapsto (Y, \sigma_2)$ построенный в Примере 1. Заметим что $(\tilde{f}, \varphi_1) \in X_{\tilde{f}}$ $((f, \varphi_2) \in X_f)$, $(\tilde{f}, \varphi_1)$ $((f, \varphi_2))$ уст. L^+ и X_g содержит, согласно 3., не более одной уст. L точки при любом $g \in \Omega_f$. Согласно Теореме 1.3.6

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\varphi_1^t, \varphi_2^t) = 0.$$

Из последнего равенства следует что

$$\lim_{t\to+\infty} ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| = 0.$$

□

Будем говорить что решение $\varphi \in C(I, E^n)$ уравнения (2.2.41) асимптотически равномерно согласовано по возвращаемости с правой частью, если существует функция $p \in C(I, E^n)$ равномерно сравнимая с $f\big|_{I\times\overline{p(I)}}$ и

$$\lim_{t\to+\infty} ||\varphi(t) - p(t)|| = 0.$$

Теорема 2.2.15. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция f уст. L^+ и $f \in \Omega_f$.*
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} ||r(t, x)|| = 0$ *равномерно по x на каждом компакте из W.*
3. *Каждое из уравнений семейства (2.2.42) допускает не более одного ограниченного на I решения.*

Тогда всякое ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.41) является асимптотически равномерно согласованным.

Доказательство. Пусть φ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.41). Согласно Лемме 9 уравнение (2.2.43) обладает ровно одним ограниченным решением. Обозначим через $p \in C(I, E^n)$ единственное ограниченное на I решение уравнения (2.2.43). Согласно Теореме 3.4.2 [4] p равномерно сравнимо с $f\big|_{I\times\overline{p(I)}}$. Из Теоремы 2.2.14 следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} ||\varphi(t) - p(t)|| = 0.$$

Теорема доказана. □

Следствие 8. *Пусть $n = 1$ и f строго монотонна по x равномерно по $t \in I$, $f \in \Omega_f$, уст. L^+ и $\lim\limits_{t\to+\infty} ||r(t, x)|| = 0$ равномерно по x на каждом отрезке E. Тогда всякое ограниченное на I^+ решение φ уравнения (2.2.41) асимптотически равномерно согласовано.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = Ax + f(t) + \lambda F(t,x) + R(t,x), \tag{2.2.44}$$

где A nxn-матрица, F и $R \in C(I \times W, E^n)$, $f \in C(I, E^n)$ и φ решение уравнения (2.2.44).

Наряду с уравнением (2.2.44) рассмотрим семейство уравнений

$$y' = Ay + g(t) + \lambda G(t,x), \tag{2.2.45}$$

при всех $G \in \Omega_{F_{K^+}}$, где $F_{K^+} = F|_{I \times K^+}$ и $g \in \Omega_f$ $(K^+ = \overline{\varphi(I^+)})$, λ - малый параметр.

Теорема 2.2.16. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Спектр матрицы A не пересекается с мнимой осью.*
2. *(f, F) уст. P^+ и L^+.*
3. *$\lim\limits_{t \to +\infty} ||R(t,x)|| = 0$ равномерно по x на любом огранченном подмножестве из W.*
4. *Функция F удовлетворяет условию Липшица по x на каждом ограниченном множестве из W.*

Тогда при достаточно малых λ, всякое ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.44) асимптотически равномерно согласовано.

Доказательство. Пусть φ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.44) и выполнены условия 1. – 4.. Согласно Теореме 4.3.1 [**4**] при достаточно малых λ каждое из уравнений семейства (2.2.45) имеет не более одного ограниченного на I решения. Согласно Теореме 2.2.15 φ асимптотически равномерно согласовано. □

Замечание 2.2.2. *Из Теорем 2.2.15 и 2.2.16 вытекают различные признаки существования асимптотически постоянных (периодических, почти периодических, рекуррентных) решений.*

Например для случая почти периодичности имеют место следующие предложения.

Следствие 9. *Пусть f почти периодична по t равномерно по tx на каждом отрезке из E $(n = 1)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} ||r(t,x)|| = 0$ и f строго монотонна по x равномерно по $t \in I$.*

Тогда всякое ограниченное на I^+ решение (2.2.41) асимптотически почти периодично.

Это предложение уточняет результаты работы [**8**].

Следствие 10. *Пусть φ ограниченное на I^+ решение уравнения*

$$x' = A(t)x + f(t). \tag{2.2.46}$$

Если матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ асимптотически почти периодичны и каждое из уравнений семейства

$$x' = B(t)x \quad (B \in \Omega_A) \tag{2.2.47}$$

не допускает нетривиальных ограниченных на I решений, то φ асимптотически почти периодично.

Следствие 10 является аналогом второй теоремы Фавара [**5**].

Следствие 11. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Спектр матрицы A не пересекается с мнимой осью.*
2. *f и F почти периодичны.*
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} ||R(t,x)|| = 0$ *равномерно по x на любом компакте из W.*
4. *Функция F удовлетворяет условию Липшица.*

Тогда всякое ограниченное на I^+ решение уравнеия (2.2.44) при достаточно малых λ асимптотически почти периодично.

2.3. Асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений

Говорят [**5**], что ограниченное на I решение φ уравнения (2.2.42) разделено на I^+ (I^+), если существует компакт Q, при котором выполняется одно из условий:

1. φ единственное решение принимающее значения из Q.
2. Решение φ является Q компактным $(\overline{\varphi(I)} \subseteq Q)$ и существует такое число $l > 0$, что для всякого Q-компактного решения ψ уравнения (2.2.42) отличного от φ при всех $t \in I$ $(t \in I^+)$ выполняется неравенство $||\varphi(t) - \psi(t)|| \leq l$.

Теорема 2.3.17. *Пусть выполнены условия:*

1. *f почти периодична по t равномерно по x на каждом компакте из W.*
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} ||r(t,x)|| = 0$ *равномерно по x на каждом компакте из W.*
3. *Каждое ограниченное на I решение всякого уравнения 1.2.3) разделено на I.*

Тогда всякое ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.41) асимптотически почти периодично.

Доказательство. Пусть φ ограниченное решение (2.2.41) и выполнены условия 1. – 3.. Согласно Лемме 3.1.1 [4] φ уст. L^+. Рассмотрим гомомрфизм $h : (X,\sigma_1) \mapsto (Y,\sigma_2)$ построенный в Примере 2. Из 1., 2. и 3. следует, что каждая точка из X_g при любом $g \in \Omega_f$ разделена относительно X_g и $(\varphi, f+r) \in X_{f+r}$ уст. L^+. Согласно Теореме 1.3.9 $(\varphi, f+r)$ асимптотически почти периодична, а следовательно и φ асимптотически почти периодична. Теорема доказана. □

Заметим что утверждение близкое по своему содержаниию Теореме было доказано в работе [**9**]. А именно в предположении что f почти периодчна, $r = 0$ и все ограниченные на I решения разделены на I^+ каждого из уравнений (2.2.42) доказана асимптотичекая почти периодичность ограниченных на I решений уравнения (2.2.41).

В упомянутой работе утверждается, что приведенное выше предложение обощает теорему Америо [**5**], однако нетрудно заметить что из почти периодичности f, разделенности на I^+ ограниченных на I решений всех уравнений вида (2.2.42) и того, что $r = 0$ следует разделенность на I всех ограниченных на I решений всех уравнений (2.2.42). И следовательно упомянутое предложение совпадает с теоремой Америо.

Теорема 2.3.17 является аналогом теоремы Америо.

Рассмотрим алгбераическое уравнение

$$x^n + a_1(t)x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)x + a_n(t) = 0. \tag{2.3.48}$$

Известно, что если дискриминант $D(t) = D(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$ уравнения (2.3.48) удовлетворяет условию $|D(t)| \geq \alpha > 0$, то существует ровно n решений уравнения (2.3.48) причем

$$\inf_{t\in I} |\lambda_j(t) - \lambda_i(t)| > 0 \tag{2.3.49}$$

при всех $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ почти периодмчны и $|D(t)| \geq \alpha > 0$, то упомянутым выше свойством обладают все уравнения вида

$$y^n + b_1(t)y^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(t)y + b_n(t) = 0, \tag{2.3.50}$$

где $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \Omega_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}$.

Теорема 2.3.18. *Пусть a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ асимптотически почти периодичны, то есть $a_i = p_i + \omega_i$, где p_i почти периодические функции и имеют место равенства $\lim\limits_{t\to+\infty} |\omega_i(t)| = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Тогда все ограниченные на I^+ решения уравнения (2.3.48) асимптотически почти периодичны, если

$$\inf_{t\in I} |D(t)| > 0.$$

Доказательство. Пусть λ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.3.48) и выполнены условия теоремы. Рассмотрим гомомрфизм $h : (X, \sigma_1) \mapsto (Y, \sigma_2)$ построенный в Примере 3. Очевидно все условия Теоремы 1.3.9 выполнены и следовательно λ асимтотически почти периодична. □

Последнее предложение является аналогом теоремы Бора-Фландерса [**3**].

Будем говорить что решение φ уравнения (2.2.43) устойчиво при постоянных возмущениях из $\sigma(f, I^+)$ в положительном направлении, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$ что, есди

$$\sup_{t\geq 0} \rho(f^{t+t_1}, f^{t+t_2}) < \delta$$

и

$$\rho(\varphi^{t_1}, \varphi^{t_2}) < \delta$$

$(t_1, t_2 \geq 0)$, то

$$\sup_{t\geq 0} \rho(\varphi^{t+t_1}, \varphi^{t+t_2}) < \varepsilon.$$

Теорема 2.3.19. *Пусть φ ограниченное на I^+ устойчивое при постоянных возмущениях на $\sigma(f + r, I^+)$ в положительном направлении решение уравнения (2.2.41). Если почти периодична и $\lim\limits_{t\to+\infty} ||r(t, x)|| = 0$ равномерно по x на каждом компакте из W, то φ асимптотически почти периодична.*

Доказательство. Сформулированное предложение доказывется по той же схеме, что и Теорема 2.3.17 с использованием Теоремы 1.3.10. □

Последяя теорема обобщает результаты работы [**10**].

2.4. Асимптотически рекуррентные и устойчивык по Пуассону решения дифференциальных уравнений

Будем говорить, что решение φ уравнения (2.2.42) равномерно устойчиво по Ляпунову в положительном направлении и обозначать р.уст.Л$^+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$ что для всякого решения ψ уравнения (2.2.43), удовлетворяющее условию $\rho(\varphi^{t_0}, \psi^{t_0}) < \delta$ выполняется неравенство $\rho(\varphi^t, \psi^t) < \delta$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$.

Теорема 2.4.20. *Пусть f рекуррентна. Тогда всякое ограниченное на I^+ р.уст. Л$^+$ решение уравнения (2.2.43) асимптотически рекуррентно.*

Доказательство. Пусть φ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.43). Согласно Лемме 3.1.1 [**4**] φ уст. L^+. Рассмотрим гомоморфизм $h : (X, \sigma_1) \mapsto (Y, \sigma_2)$ построенный в Примере 2. Заметим $(\varphi, f) \in X_f$ что уст. L^+ и из р.уст.Л$^+$ решения φ уравнения (2.2.43) вытекает, что (φ, f) р.уст.^+h. Согласно Теореме 1.3.5 φ асимптотически рекуррентно. □

Лемма 10. *Пусть φ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.43), $K^+ = \overline{\varphi(I^+)}$, и $\Phi^+ = \{\psi$: решение уравнения (2.2.43) таких, что $\overline{\psi(I^+)} \subseteq K^+\}$. Если $t_n \to +\infty$ такая, что $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{t_n}$, тогда*

$$F^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n^+$$

компактно в $C(I, E^n)$, где $\Phi_0 = \Phi^+$ и $\Phi_n^+ = \{\psi^{t_n} : \ \psi \in \Phi^+\}$.

Доказательство. Пусть φ ограниченное на I^+ решение уравнения (2.2.43). Пусть $[a, b] \subseteq I$. Так как $\{f^{t_n}\}$ сходится, то существует число $M = M(a, b) > 0$ такое, что

$$\max_{t\in[a,b],\ x\in K^+} ||f^{t_n}(t, x)|| \leq M.$$

Пусть $\psi \in F^+$ произвольная функция из F^+, тогда $\overline{\psi(I^+)} \subseteq K^+$ и существует число n_0 такое, что ψ есть решение уравнения с правой частью f^{t_n} и следовательно $||\psi^{'}(t)|| \le M$ при всех $t \in [a,b]$, а значит $||\psi(t_1) - \psi(t_2)|| \le M|t_1 - t_2|$. Согласно теореме Арцеля

$$F^+_{a,b} = \{\psi|_{[a,b]} : \ \psi \in F^+\}$$

компактно. Лемма доказана. □

Теорема 2.4.21. *Пусть* φ *ограниченное на* I^+ *решение уравнения (2.2.43) и* $f \in \Omega_f$, *тогда*

1. *Уравнение (2.2.43) допускает уст.* P^+ *решение.*
2. *Если* φ *р.уст.Л*$^+$ *решение уравнения (2.2.43), то оно асимптотически устойчиво по Пуассону в положительном направлении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство сформулированной теоремы вытекает из Теоремы 1.2.1 и Лемммы 10 и строится по той же схеме что и Теоремы 2.4.20. □

Замечание 2.4.3. *Результаты Главы 2 имеют место также и для интегральных уравнений Вольтерра, функционально-дифференциальных уравнений и разностных уравнений.*

Литература

[1] Сибирский К. С., *Введение в топологическую динамику.* Кишинев, РИО АН МССР, 1970.

[2] Бронштейн И. У., *Минимальные группы преобразований.* Кишинев, РИО АН МССР, 1969.

[3] Бронштейн И. У., *Второе издание книги* [**2**]. Готовится к печати.

[4] Щербаков Б. А., *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1972.

[5] Демидович Б. П., *Лекции по математической теории устойчивости.* Москва, Наука, 1967

[6] Frechet M., Les Fonctions Asymptotiquement Presque-Periodiques, *Rev. Sci.* 79 (7-8), (1941), pp. 341–354.

[7] Sell G. R., Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations, *Van Nostrand–Reinbold, London,* 1971.

[8] Gheorghiu N., Soluţii Aproape Periodice şi Asimptotic Aproape Periodice ale unor Ecuaţii Diferenţiale Nelineare de Ordine 1. *An. Ştiinţ. Univ. "Al.I. Cuza"din Iaşi.*, No.1, s.1, Fasc. 1-2, 17-20, 1955.

[9] Fink A. M., Semi-Separated Conditions for Almost Periodic Solutions. *J. Diff. Equat.*, 11(2):245-251, 1972.

[10] Coppel W. A., Almost Periodic Properties of Ordinary Differential Equations. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 76, 1967, pp. 27–49.