МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МССР
КИШИНЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. И. ЛЕНИНА

ЧЕБАН ДАВИД НИКОЛАЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПУАССОНУ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные и интегральные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор **Б. А. ЩЕРБАКОВ**

Кишинев - 1977

Диссертация выполнена на
кафедре дифференциальных уравнений
Кишиневского госуниверситета им. В. И. Ленина

Оглавление

Введение

В качественной теории дифференциальных уравнений важную роль играют нелокальные проблемы, касающиеся условий существования тех или иных классов решений. Сюда относятся вопросы ограниченности, периодичности, почти периодичности, устойчивости по Пуассону, вопросы существования различного рода предельных режимов, конвергентность, диссипативность и т.д. Этому направлению принадлежит и настоящая работа, которая посвящена изучению асимптотически устойчивых по Пуассону (в частности, асимптотически почти периодических) движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений.

С прикладной точки зрения движения динамических систем естественно разделяются на переходные (неустановившиеся) и установившиеся. Под переходными понимают такие движения, которые при неограниченном возрастании времени асимптотически приближаются к некоторому установившемуся движению, т.е. движению, которое обладает некоторым свойством повторяемости и устойчивости.

При попытке более точного определения неустановившегося движения мы приходим к понятию асимптотически устойчивого по Пуассону движения. Такие движения представляют особый интерес для приложений и наблюдаются, например, в системах, обладающих устойчивым колебательным режимом (например, при явлении конвергенции).

Отметим, что поведение движения при неограниченном возрастании времени определяется структурой его предельного множества .

Задаче об асимптотической устойчивости по Пуассону ранее изучалась в основном для асимптотической периодичности и асимптотической почти периодичности.

Впервые понятие асимптотической почти периодичности функций было введен и изучено в работах М. Фреше. Позднее эти результаты обобщались на асимптотически почти периодические последовательности в работах Фан Ку и А. Прекупану и на абстрактные асимптотически почти периодические функции в работах Б.Г. Араркцяна и А. Прекупану, асимптотически почти периодические функции и, наконец, для функций определенных локально-компактных топологических группах .

Другой цикл работ (И. Георгиу, И. Барбалат, Г. Кордуняну, В. А. Коппель, Т. Йошизава, А. М. Финк, Р. К. Миллер, Дж. Сейферт и др.) посвящен задаче об асимптотической почти периодичности решений дифференциальных уравнений.

Наконец, в ряде работ В. В. Немыцкого, К. С. Сибирского, И. У. Бронштейна, В. Ф. Черния, А. И. Герко, Н. П. Бхатия, С. Н. Чоу и других изучаются движения динамических систем по своим свойствам, близким к асимптотически почти периодическим (в смысле ниже приводимого определения).

В настоящей работе изучается общая задача об асимптотической устойчивости по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уруавнений.

Применяемый в настоящей работе метод исследования основан на результатах топологической теории динамических систем и приложим для разнообразных типов асимптотической устойчивости по Пуассону. Идея применения методов теории динамических систем к изучению неавтономных дифференциальных уравнений сама по себе не нова. Она уже более трех десятилетий успешно применяется для решения различных задач в теории линейных и нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Впервые такой подход к неавтономным дифференциальным уравнениям был применен в работах В. М. Миллионщикова, Б. А. Щербакова, Л. Г. Дейсача и Дж. Селла, Р. К. Миллера, Дж. Сейферта, Дж. Селла, позднее в работах В. В. Жикова, И. У. Бронштейна, а затем и многих других авторов.

Из полученных в настоящей работе результатов вытекают, в частности, некоторые факты для асимптотической периодичности и асимптотической почти периодичности в большинстве своем являющиеся новыми, а в ряде случаев усиливающиеся утверждения, доказанные ранее другими авторами.

Перейдем к обзору результатов приводимых в диссертации.

В первой главе вводятся и изучаются асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем. Рассматривается задача об асимптотической устойчивости по Пуассону решений операторных уравнений.

Пуст X полное метрическое пространство с метрикой ρ, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и $(X, \mathbb{R}, \pi)$ динамическая система на X.

Точку x или, что тоже самое, движение $\pi(x, \cdot)$ назовем асимптотически постоянным (асимптотически τ-периодическим, асимптотически почти периодическим, асимптотически рекуррентным, асимптотически устойчивым по Пуассону), если существует постоянное (τ-периодическое, почти периодическое, рекуррентное, устойчивое по Пуассону) движение $\pi(p, \cdot)$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, pt) = 0. \tag{0.0.1}$$

Теорема 0.0.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Точка $x \in X$ асимптотически почти периодична.*
2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого*

неравенство

$$\rho(\pi(x, t+\tau), \pi(x, t)) < \varepsilon \tag{0.0.2}$$

выполняется при всех $t \geq \beta$ *и* $t+\tau \geq \beta$.

3) *Точка* x *уст.* L^+ *и* Σ_x^+ *р. уст.* *Л*$^+\Sigma_x^+$.
4) *Какова бы ни была последовательность* $t_n \to +\infty$ *из нее можно выделить подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что* $\{\pi(x, t_{k_n})\}$ *сходится равномерно по* $t \in \mathbb{T}_+$, *т.е. существует* $p \in X$ *такая, что выполнено* (0.0.1).

Теоремы аналогичные сформулированной приводятся и для других классов асимптотической устойчивости по Пуассону.

Отметим, что в литературе встречаются движения, которые называют также асимптотически почти периодическими (см. например). В работе выясняется связь между этими понятиями. Строится пример показывающий, что эти понятия различны.

Пусть Y полное метрическое пространство с метрикой d и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическая система на Y. Для $y \in Y$ обозначим через $\mathcal{L}_y$ множество всех последовательностей $\{t_n\}$ таких, что $\{\sigma(y, t_n)\}$ сходится.

Будем говорить, что точка $x \in X$ сравнима в пределе с точкой $y \in Y$, если $\mathcal{L}_y \subseteq \mathcal{L}_x$. Это понятие для асимптотически устойчивых по Пуассону точек аналогично понятию сравнимости дляустойчивых по Пуассону точек, введенное Б. А. Щербаковым. Оно играет важную роль при изучении асимптотически устойчивых по Пуассону решений дифференциальных уравнений.

Теорема 0.0.2. *Пусть* $y \in Y$ *устойчива по Лагранжу в положительном направлении и асимптотически устойчива по Пуассону в положительном направлении. Для того, чтобы точка* $x \in X$ *была сравнима в пределе с необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное отображение* $h : \omega_y \to \omega_x$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

1.
$$h(\sigma(q, t)) = \pi(h(q), t) \tag{0.0.3}$$
при всех $q \in \omega_y$) *и* $t \in \mathbb{R}$.
2. $h(P_y) \subseteq P_x$.

Теорема 0.0.3. *Пусть y асимптотически постоянна (асимптотически* τ*-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна). Если точка x сравнима в пределе с y, то точка x также асимптотически постоянна (асимптотически* τ*-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна).*

Пусть $h : X \to Y$ – гомоморфизм динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$h(x) = y, \tag{0.0.4}$$

где $y \in Y$. Наряду с уравнением (0.0.4) рассмотрим семейство "ω-предельных"уравнений

$$h(x) = q, \quad (q \in \omega_y). \tag{0.0.5}$$

Теорема 0.0.4. *Если решение x уравнения* (0.0.4) *уст. L^+ и каждое уравнение семейства* (0.0.5) *допускает не более одного решения из ω_x, то x сравнимо в пределе с $y \in Y$.*

Следствие 1. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (0.0.4) *и y асимптотически постоянна* (*асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна*). *Если каждое уравнение семейства* (1.4.62) *допускает не более одного решения из ω_x, то x асимптотически постоянно* (*асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

Решение x уравнения (0.0.4) назовем разделенным в множестве $M \subseteq X$, ксли существует такое число $r > 0$, что каково бы ни ьыло решение p из M ($p \neq x$) уравнения (0.0.4) выполнено неравенство

$$\rho(\pi(x,t), \pi(p,t)) \geq r$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 0.0.5. *Пусть точка $y \in Y$ асимптотически постоянна (асимптотически периодчна, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и x – уст. L^+ решение уравнения* (0.0.4). *Если при каждом $q \in \omega_y$ все решения из ω_x уравнения* (0.0.5) *разделены в ω_x, то x асимптотически почти постоянна (асимптотически периодична, асимптотически рекуррентна).*

В конце этой главы изучаются асимптотически устойчивые по Пуассону функции, то есть такие функции, которые порождают динамической системе Бебутова асимптотически устойчивые по Пуассону движения.

Вторая глава посвящена изучениию асимптотически устойчивых по Пуассону дифференциальных уравнений. Попутно в этой главе получаются некоторые общие результаты для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Известно [**41**], что существует весьма общая и глубокая зависимость, в силу которой характер возвращаемости решений дифференциальных уравнений согласован с возвращаемостью правой части. В диссертации доказывается, что аналогичная зависимость между возвращаемостью в пределе правой части уравнения и решениями дифференциальных уравнений имеет место и в случае, когда правая часть уравнения асимптотически устойчива по Пуассону.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x), \tag{0.0.6}$$

где $f \in C(\mathbb{R}\times W, E^m)$. Наряду с уравнением (0.0.6) рассмотрим семейство -предельных уравнений

$$y' = g(t, y) \qquad (g \in \omega_f). \tag{0.0.7}$$

Решение φ уравнения (0.0.6) назовем согласованным в пределе с правой частью, если оно сравнимо в пределе с функцией $f_Q = f\big|_{\mathbb{R}\times Q}$, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, то есть $\mathcal{L}_{f_Q} \subseteq \mathcal{L}_\varphi$.

Теорема 0.0.6. *Пусть φ ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (0.0.6) и $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если φ согласованное в пределе решение и правая часть f уравнения (0.0.6) асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по переменной t равномерно относительно $x \in Q$, то и решение асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна).*

Теорема 0.0.7. *Пусть φ ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (0.0.6) и $f_Q = f\big|_{\mathbb{R}\times Q}$ уст. L^+, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если каждое уравнение семейства (0.0.7) допускает не более одного решения из ω_φ, тогда φ согласовано в пределе.*

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x' = A(t)x, \tag{0.0.8}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E^m])$. Наряду с уравнением (0.0.8) рассмотрим неоднородное уранение

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{0.0.9}$$

и семейство уравнений

$$x' = \tilde{A}(t)x \qquad (\tilde{A} \in \omega_A). \tag{0.0.10}$$

Теорема 0.0.8. *Пусть φ ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (0.0.10), матрица A и функция f уст. L^+. Если каждое уравнение семейства (0.0.10) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, тогда φ согласовано в пределе.*

Следствие 2. *Пусть φ ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (0.0.9), A и f асимптотически почти периодичны. Если каждое уравнение семейства (0.0.10) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, тогда φ асимптотически почти периодично.*

Это утверждение обобщает на асимптотическую почти периодичность, известную теорему Фавара.

Теорема 0.0.9. *Пусть A и f уст. L^+. Если уравнение (0.0.8) удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии (э.д.) на $\mathbb{R}_+$, то*

1. *неоднородное уравнение (0.0.9) имеет по крайнем мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение φ.*

2. *всякое ограниченное на $\mathbb{R}_+$ рещение уравнения (0.0.9) согласовано в пределе.*

В связи с теоремами 0.0.8 и 0.0.9 возникают следующие вопросы:

1. Пусть A и f уст. L^+ и каждое уравнение семейства (0.0.10) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Будет ли при этих условиях уравнение (0.0.9) иметь хотя бы одно ограниченное на решение ?
2. Являются ли эквивалентными следующие условия:
   а. уравнение (0.0.8) удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}_+$.
   б. каждое уравнение семейства (0.0.10) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.

В диссертации дается по положительный ответ на оба эти вопроса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = A(t)x + f(t) + F(t,x). \tag{0.0.11}$$

Пусть E_0 множество всех начальных точек $x \in E^m$ решений из $C_b(\mathbb{R}_+, E^m)$ уравнения (0.0.8). Обозначим через P проектор, проектирующий E^m на E_0. Имеет место

Лемма 1. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, E^m)$ уст. L^+. Если уравнение (0.0.8) удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}_+$, то какова бы ни была уст. L^+ функция $f \in C(\mathbb{R}, E^m)$ уравнение (0.0.9) имеет единственное уст. L^+, согласованное в пределе решение φ_0, удовлетворяющее условию $P\varphi_0(0) = 0$. Кроме того, существует $M > 0$, не зависящая от f такая, что $||\varphi_0|| \leq M||f||$.*

Теорема 0.0.10. *Пусть A, f и $F_{Q_\rho} = F\big|_{\mathbb{R}\times Q_r}$, где Q_r шаровая окрестность множества $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, уст. L^+. Если*

1. *уравнение (0.0.8) удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}_+$.*
2. *$||F(t,x)|| \leq rM^{-1}$ при всех $x \in Q_r$ и $t \in \mathbb{R}_+$, M где число, существование которго гарантируется леммой 1.*
3. *удовлетворяет условию Липшица по $x \in Q_r$ с константой Липшица $L < M^{-1}$,*

то уравнение (0.0.11) имеет единственное уст. L^+, согласованное в пределе решение φ, удовлетворяющее условию $P\varphi(0) = 0$.

Теорема 0.0.11. *Пусть A, f и F_{Q_r} уст. L^+. Если*

1. *уравнение (0.0.8) удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}_+$.*
2. *F удовлетворяет условию Липшица по $x \in Q_r$ с константой Липшица L,*

то существует число ε_0 такое, что при каждом $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение

$$x' = A(t)x + f(t) + \varepsilon F(t,x) \tag{0.0.12}$$

имеет единственное уст. L^+, согласованное в пределе решение φ_ε, удовлетворяющее условию $P\varphi_\varepsilon(0) = 0$. Кроме того, последовательность $\{\varphi_\varepsilon\}$ сходится к ε_0 при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.

Следствие 3. *Пусть A и f асимптотически почти периодичны. Если*

1. *F асимптотически почти периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно относительно $x \in Q_r$.*
2. *уравнение (0.0.8) удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}_+$.*
3. *F удовлетворяет условию Липшица по $x \in Q_r$,*

то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение (0.0.12) имеет единственное асимптотически почти периодическое решение φ_ε, удовлетворяющее условию $P\varphi_\varepsilon(0) = 0$. Кроме того, последовательность $\{\varphi_\varepsilon\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$ к φ_0.

Следствие 3 обощает на случай асимптотической почти периодичности теорему Бирюк.

Далее приводятся признаки асимптотической устойчивости по Пуассону решений дифференциальных уравнеий не вытекающих из общих теорем о согласованности в пределе. В частности получается аналог теоремы Америо на случай асимптотической устойчивости по Пуассону.

В конце главы доказывается, что линейная система с почти периодическими коэффициентами является грубой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}$. Приводится два грубых свойства линейной системы с ограниченными коэффициентами.

Все приводимы в диссертации, за исключением теоремы 1.2.14, полученной в соавторстве с научным руководителем, получены автором самостоятельно.

Результаты диссертации могут найти применение в касественной теории дифференциальных уравнений и теории колебаний при изучении предельных колебательных режимов.

Основные результаты докладывались на третей и четвертой Всесоюзных конференциях по качественной теории дифференциальных уравнений (г. Самарканд и г. Рязань соответственно), а также на семинарах по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ, Белорусском и Кишиневском университетах.

По теме диссертации автором опубликованы работы [**30**]-[**37**].

Автор глубоко признателен свокму научному руководителю Борису Алексеевичу Щербакову за постановку задачи и внимательное руководство.

Глава 1

Асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем

1.1. Основные понятия и определения

Приведем некоторые понятия и обозначения, принятые в теории динамических систем **[3]**,**[22]**,**[27]**,**[41]**, которые мы будем использовать в настоящей работе.

Пусть X – полное метрическое пространство, $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$) – группа действительных (целых) чисел, $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{Z}_+$) – полугруппа неотрицательных действительных (целых) чисел, $\mathbb{S}$ – одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$ ($\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}$, где $\mathbb{S}_+ = \{s | s \in \mathbb{S},\ s \geq 0\}$) – подполугруппа аддитивной группы S.

Тройку $(X, \mathbb{T}, \pi)$, где $\pi : X \times \mathbb{T} \to X$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

$$\pi(x, 0) = x \quad (x \in X,\ 0 \in \mathbb{T}) \tag{1.1.13}$$

и

$$\pi(\pi(x, t), \tau) = \pi(x, t + \tau) \quad (x \in X;\ t, \tau \in \mathbb{T}) \tag{1.1.14}$$

называют динамической системой. При этом, если $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$) или $\mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}$), то система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется полугрупповой (групповой). В случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$) динамическая система называется потоком, а если $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется каскадом. Для краткости будем писать вместо $\pi(x, t)$ просто xt или $\pi^t x$.

В дальнейшем, как правило, X – полное метрическое пространство с метрикой ρ.

Функцию $\pi(x, \cdot) : \mathbb{T} \to X$ при фиксированном $x \in X$ называют движением точки x, а множество $\pi(x, \mathbb{T}) = \Sigma_x$ траекторией этого движения или точки x.

Непустое множество $M \subseteq X$ называют полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным, если $\pi(M, t) \subseteq M$ ($\pi(M, t) \supseteq M$, $\pi(M, t) = M$) при всех $t \in \mathbb{T}$.

Отметим, что введенные понятия инвариантности различны для полугрупповых систем и эквивалентны для групповых систем.

Замкнутое инвариантное множество, не содержащее собственного подмножества, являющегося замкнутым и инвариантным, называется минимальным.

Точка $p \in X$ называется ω-предельной точкой движения $\pi(x, \cdot)$ и точки $x \in X$, если существует последовательность $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ такая, что $t_n \to +\infty$ и $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(x, t_n)$.

Совокупность всех ω-предельных точек движения $\pi(x, \cdot)$ обозначают через ω_x и называют ω-предельным множеством этого движения.

Точку x и движение $\pi(x, \cdot)$ называют устойчивым по Лагранжу в положительном направлении и обозначают уст. L^+, если $H^+(x) = \overline{\Sigma}_x^+$ является компактом, где $\Sigma_x^+ = \pi(x, \mathbb{T}_+)$ и $\mathbb{T}_+ = \{t | t \in \mathbb{T},\ t \geq 0\}$.

Точку x и движение $\pi(x, \cdot)$ называют устойчивым по Лагранжу и обозначают уст. L, если $H(x) = \overline{\Sigma}_x$ является компактом, где $\Sigma_x = \pi(x, \mathbb{T})$.

Точку $x \in X$ называют постоянной или точкой покоя, если $xt = x$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и τ-периодической, если $x\tau = x$ $(\tau > 0,\ \tau \in \mathbb{T})$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\tau \in \mathbb{T}$ называют ε-смещением (ε-почти периодом) точки x, если $\rho(x\tau, x) < \varepsilon$ $(\rho(x(t+\tau), xt) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T})$. Точка $x \in X$ называется почти рекуррентной (почти периодической), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что на любом отрезке из $\mathbb{T}$ длины l, найдется ε-смещение (ε-почти период) точки x.

Если точка $x \in X$ почти рекуррентна и множество $H(x) = \overline{\Sigma}_x$ компактно, то точку x называют рекуррентной.

Говорят, что точка $x \in X$ устойчива по Пуассону в положительном направлении, если $x \in \omega_x$.

Движение $\pi(x, \cdot) : \mathbb{T} \to X$ полугрупповой динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют продолжаемым на $\mathbb{S}$, если существует непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \to X$ такое, что $\pi^t\varphi(s) = \varphi(t+s)$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $s \in \mathbb{S}$. При этом через α_x^φ обозначим $\{y | \exists t_n \to -\infty,\ t_n \in \mathbb{S}_-\ \varphi(t_n) \to y\}$, где φ продолжение на $\mathbb{S}$ движения $\pi(x, \cdot)$. Множество α_x^φ назовем α-предельным множеством движения φ, а его точки – α-предельными для движения φ.

Наряду с динамической системой $(X, \mathbb{T}, \pi)$ рассмотрим систему $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$, где Y – полное метрическое пространство с метрикой α.

Говорят, что последовательность $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ направляет точку $x \in X$ к точке $p \in X$, если $p = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$. Последовательность $\{t_n\}$ называют собственной последовательностью точки x, если $x = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$.

Через $\mathfrak{M}_{x,p}$ обозначают множество всех последовательностей, направляющих x к p, через $\mathfrak{N}_x$ – множество всех собственных последовательностей точки x (т.е. $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{M}_{x,x}$) и $\mathfrak{M}_x = \cup\{\mathfrak{M}_{x,p} : p \in X\}$.

Точку $x \in X$ называют сравнимой по характеру возвращаемости с $y \in Y$ или, короче, сравнимой с y, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что всякое δ-смещение точки y есть ε-смещение для $x \in X$. В работах Б. А. Щербакова показано, что точка $x \in X$ сравнима с $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_y \subseteq \mathfrak{N}_x$.

Точку $x \in X$ называют равномерно сравнимой по характеру возвращаемости с $y \in Y$ или, короче, равномерно сравнимой с y, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было $t \in \mathbb{T}$, всякое δ-смещение точки yt есть ε-смещение для xt, т.е. такое $\delta > 0$, что для всяких двух чисел $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, для которых $d(yt_1, yt_2) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(xt_1, xt_2) < \varepsilon$. В случае, когда $y \in Y$ устойчива по Лагранжу (т.е. Σ_y относительно компактно) Б. А. Щербаковым доказано, что $x \in X$ равномерно сравнима с $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_y \subseteq \mathfrak{M}_x$.

Точки x_1 и x_2 из X называют проксимальными (дистальными) в положительном направлении, если

$$\inf\{\rho(x_1t, x_2t) : t \in \mathbb{T}_+\} = 0 \quad (\inf\{\rho(x_1t, x_2t) : t \in \mathbb{T}_+\} > 0).$$

Множество $A \subseteq X$ называется равномерно устойчивым по Ляпунову в положительном направлении относительно множества $B \subseteq X$ (обозначение – р. уст. Л^+B), если $A \subseteq \overline{B}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $\rho(p, r) < \delta$ $(p \in A,\ r \in B)$ влечет неравенство $\rho(pt, rt) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$.

Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ $(\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \subseteq \mathbb{S})$ – две динамические системы. Отображение $h : X \to Y$ называется гомоморфизмом (соответственно изоморфизмом) динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, если отображение h непрерывно (соответственно гомеоморфно) и $h(\pi(x, t)) = \sigma(h(x), t)$ при всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{T}_1$. При этом говорят, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ есть расширение динамической системы $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, а $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ – фактор динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ при гомоморфизме h. Динамическую систему $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ называют также базой расширения $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Тройку $((X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h)$, где h – гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, будем называть неавтономной динамической системой.

Пусть $t \in \mathbb{T}$. Определим отображение $\pi^t : X \to X$ равенством $\pi^t(x) = \pi(x, t)$. Если $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{T}$ и $M \subseteq X$, то положим $E^*(M, \mathcal{F}) = \overline{\{\pi^t|M : t \in \mathcal{F}\}}$, где чертой обозначено эамыкание в X^M, и $E(M, \mathcal{F}) = \{\xi|\ \xi \in E^*(M, S), \xi(M) \subseteq M\}$.

Прямым произведением динамических систем $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ называют динамическую систему $(X \times Y, \mathbb{T}, \lambda)$, в которой действие задается покоординатно, т. е. $\lambda((x, y), t) = (\pi(x, t), \sigma(y, t))$ при всех $(x, y) \in X \times Y$ и $t \in \mathbb{T}$.

1.2. Асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем

Движение $\pi(x, \cdot)$ назовем асимптотически постоянным (асимптотически τ-периодическим, асимптотически почти периодическим, асимптотически рекуррентным, асимптотически устойчивым по Пуассону), если существует постоянное (τ-периодическое, почти периодическое, рекуррентное, устойчивое по Пуассону) движение $\pi(p, \cdot)$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, pt) = 0. \tag{1.2.15}$$

Обозначим через $P_x = \{p \mid p \in \omega_x \cap \omega_p, \lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt, pt) = 0\}$. Очевидно, движение $\pi(t, \cdot)$ асимптотически устойчиво по Пуассону, тогда и только тогда, когда $P_x \neq \emptyset$. Из определения асимптотической устойчивости по Пуассону, вообще говоря, не следует, что P_x состоит из одной точки. Ниже приводимая лемма указывает простое условие, при котором P_x состоит ровно из одной точки.

Лемма 2. *Пусть $x \in X$ асимптотически устойчива по Пуассону. Если точки из ω_x попарно дистальны в положительном направлении, то P_x состоит из одной точки.*

Доказательство. В силу асимптотической устойчивости по Пуассону движения $\pi(x, \cdot)$ множество P_x непусто. Допустим, что в P_x имеются две различные точки p_1 и p_2. По условию леммы p_1 и p_2 положительно дистальны. С другой стороны, для каждой из точек p_1 и p_2 выполнено равенство (1.2.15) и, следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(p_1 t, p_2 t) = 0. \tag{1.2.16}$$

Равенство (1.2.16) противоречит положительной дистальности точек p_1 и p_2. Лемма доказана. □

Следствие 4. *Если движение $\pi(x, \cdot)$ асимптотически почти периодично, то P_x состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. Пусть x асимптотически почти периодично. Тогда из равенства (1.2.15) следует, что ω_x почти периодическое минимальное множество и $P_x \subseteq \omega_x$. Так как ω_x является почти периодическим минимальным множеством, то любые различные точки из ω_x дистальны в положительном направлении. В частности точки P_x попарно дистальны в положительном направлении. Согласно лемме 2 состоит ровно из одной точки.

Таким образом в случае асимптотической почти периодичности точка $p \in P_x$, учавствующая в определении асимптотической рочти периодичности x, определяется однозначно. □

Лемма 3. [**27**] *Если множество A р. уст. Л^+B, то $\overline{A}$ р. уст. Л$^+\overline{B}$.*

Лемма 4. [**27**] *Если Σ_x^+ р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$, а $\omega_x \neq \emptyset$, то ω_x является минимальным множеством.*

Замечание 1.2.1. *Утверждения лемм 3 и 4 в* [**27**] *доказаны для групповых систем в случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Однако, нетрудно проверить, что имеющиеся в* [**27**] *рассуждения, позволяют доказать эти утверждения и в случае $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{Z}_+$.*

Следствие 5. *Если точка x уст. L^+ и Σ_x^+ р. уст. $L^+\Sigma_x^+$, то ω_x – непустое компактное минимальное множество, состоящее из почти периодических движений.*

Теорема 1.2.12. *Для того чтобы точка $x \in X$ (и движение $\pi(x, \cdot)$) была асимптотически постоянной (асимптотически τ-периодической, асимптотически почти периодической), необходимо и достаточно, чтобы точка x была уст. L^+, Σ_x^+ р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ и ω_x совпадало с точкой покоя (τ-периодической траекторией, замыканием почти периодической траектории).*

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична). Тогда существует постоянная (τ-периодическая, почти периодическая) точка p такая, что имеет место равенство (1.2.15). Из равенства (1.2.15) следует, что x уст. L^+ (т. к. почти периодическая точка уст. L^+) и $\omega_x = \omega_p = H(p)$. Таким образом, осталось показать, что Σ_x^+ р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$. Из равенства (1.2.15) и почти периодичности точки p следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$ такие, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t + \tau), xt) < \varepsilon \tag{1.2.17}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из вышесказанного следует, что для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ найдется пара чисел $\beta(\frac{\varepsilon}{3})$ и $l(\frac{\varepsilon}{3})$ такие, что на любом отрезке длины $l(\frac{\varepsilon}{3})$ найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t + \tau), xt) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.2.18}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$. В компактном множестве Σ_x^+ интегральная непрерывность осуществляется равномерно, поэтому найдется такое γ (ε) > 0, что для любых точек $x_1, x_2 \in \Sigma_x^+$ из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \gamma$ следует

$$\rho(x_1 t, x_2 t) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.2.19}$$

при всех $t \in [\beta, \beta + l]$. Заметим, что γ может быть выбрано меньше ε. Пусть x_1 и x_2 из Σ_x^+, то есть $x_i = xt_i$ ($t_i \in \mathbb{T}_+$, $i = 1, 2$), тогда $\rho(x_1 t, x_2 t) \leq \rho(x_1(t + \tau), x_1 t) + \rho(x_1(t + \tau), x_2(t + \tau)) + \rho(x_2(t + \tau), x_2 t)$. Выберем $\tau \in [\beta - t, \beta - t + l] \subset \mathbb{T}_+$, тогда из последнего неравенства и неравенств (1.2.18) и (1.2.19) следует

$$\rho(x_1 t, x_2 t) < \gamma \tag{1.2.20}$$

при всех $t \geq \beta$. В силу равномерной интегральной непрерывности на Σ_x^+ для чисел β и γ ($\gamma < \varepsilon$) можно выбрать $\delta < \gamma$ так, чтобы из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ($x_1, x_2 \in \Sigma_x^+$) следовало $\rho(x_1 t, x_2 t) < \gamma$ при всех $t \in [0, \beta]$. Пусть теперь $\rho(x_1, x_2) < \delta$, ($x_1, x_2 \in \Sigma_x^+$, $\delta < \gamma < \varepsilon$) и $t \in \mathbb{T}_+$, тогда $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть x уст. L^+, Σ_x^+ р. уст.Л$^+\Sigma_x^+$ и ω_x совпадает с точкой покоя (τ-периодической траекторией, замыканием почти периодической траектории). Для любого натурального n, согласно условию теоремы, найдутся $\beta_n \geq 0$, $l_n > 0$ и $\tau_n \in [n, n + l_n]$ такие, что

$$\rho(x(t+\tau_n), xt) < \frac{1}{n} \tag{1.2.21}$$

при всех $t \geq \beta_n$ и $t+\tau_n \geq \beta_n$. В силу уст. L^+ точки x последовательность $\{x\tau_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n\to+\infty} x\tau_n$, тогда $p \in \omega_x$ и согласно следствию 5 точка p является почти периодической.

Покажем, что последовательность $\{x\tau_n\}$ сходится к p равномерно на $\mathbb{T}_+$, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{\rho(x(t+\tau_n), pt) : t \in \mathbb{T}_+\} = 0. \tag{1.2.22}$$

Действительно, так как $\{x\tau_n\}$ сходится, то она является фундаментальной. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ выбрано из условия р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ множества Σ_x^+. Тогда найдется $N(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x\tau_n, x\tau_m) < \delta$ при всех $n, m \geq N(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$\rho(x(t+\tau_n), x(t+\tau_m)) < \varepsilon \tag{1.2.23}$$

при всех $t \in \mathbb{T}_+$. Переходя в неравенстве (1.2.23) к пределу, когда $m \to +\infty$ (при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{T}_+$), получим

$$\rho(x(t+\tau_n), pt) \leq \varepsilon \tag{1.2.24}$$

при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и $n \geq N(\varepsilon)$. Покажем теперь, что $p \in P_x$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(xt, pt) &\leq \rho(xt, x(t+\tau_n)) \\ &+\rho(x(t+\tau_n), pt) \leq \frac{1}{n} + \varepsilon \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $t \geq \beta_n$ и, следовательно, $p \in P_x$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 5. *Если x уст. L^+ и $t_n \to t_0$ ($t_0 \in \mathbb{T}$), то*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{\rho(x(t+t_n), x(t+t_0)) : t \in \mathbb{T}\} = 0. \tag{1.2.26}$$

Доказательство. Пусть x уст. L^+ и $t_n \to t_0$. Допустим, что равенство (1.2.26) не имеет места. Тогда существуют последовательность $\{\bar{t}_n\}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\rho(x(t_n+\bar{t}_n), x(t_0+\bar{t}_n)) \geq \varepsilon \tag{1.2.27}$$

В силу уст. L^+ точки x последовательность $\{\pi(x, \bar{t}_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x\bar{t}_n$, тогда

$$\varepsilon_0 \leq \rho(x(t_n+\bar{t}_n), x(t_0+\bar{t}_n)) = \rho((x\bar{t}_n)t_n, (x\bar{t}_n)t_0). \tag{1.2.28}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.2.28), когда $n \to +\infty$ получим неравенство $\varepsilon_0 \leq 0$, которое противоречит выбору числа ε_0. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1.2.13. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Точка $x \in X$ асимптотически почти периодична.*

2) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие числа* $\beta \geq 0$ *и* $l > 0$, *что на любом отрезке длины* l *найдется число* τ, *для которого неравенство* (1.2.17) *выполняется при всех* $t \geq \beta$ *и* $t + \tau \geq \beta$.
3) *Точка* x *уст.* L^+ *и* Σ_x^+ *р. уст.* $Л^+\Sigma_x^+$.
4) *Какова бы ни была последовательность* $t_n \to +\infty$ *из нее можно выделить подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что* $\{\pi(x, t_{k_n})\}$ *сходится равномерно по* $t \in \mathbb{T}_+$, *т.е. существует* $p \in X$ *такая, что выполнено* (1.2.22).

Доказательство. Заметим, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из определения асимптотической почти периодичности (см. доказательство теоремы 1.2.12).

Покажем, что из 2) следует 3). Из условия 2) следует, что точка x уст. L^+. В самом деле. Пусть $\varepsilon > 0$. Для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существуют такие числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t+\tau), xt) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.2.29}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$. Покажем, что $M = \pi([\beta, \beta + l], x)$ аппроксимирует $Q = \{\pi(t, x) : t \geq \beta\}$ с точностью до $\varepsilon/2$. В самом деле, если $t \geq \beta$, то существует $\tau \in [\beta - t, \beta - t + l]$, что выполняется (1.2.26) и следовательно $Q \subseteq S(M, \frac{\varepsilon}{2})$. Поскольку множество M замкнуто и компактно, то оно обладает конечной $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью, которая в силу включения $\overline{Q} \subseteq \overline{S}(M, \frac{\varepsilon}{2})$ является $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью множества Q. В силу полноты пространства X множество Q компактно. Остается заметить, что $\Sigma_x^+ = \pi([0, \beta], x) \cup Q$. Наконец, из доказательства необходимости теоремы 1.2.12 следует, что условие 2) и уст. L^+ точки x дают р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ множества Σ_x^+.

Пусть x уст. L^+, Σ_x^+ р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ и $t_n \to +\infty$. В силу уст.L^+ точки x из $\{t_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $xt_{k_n} \to P$. В силу р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ множества Σ_x^+, рассуждая также, как и при доказательстве достаточности теоремы 1.2.12, получим равенство (1.2.22).

Покажем,что из 4) следует 3). Допустим противное, то есть существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $\delta_n \downarrow 0$, $\{t_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ и $\{\bar{t}_n\}$ такие, что

$$\rho(xt_n^{(1)}, xt_n^{(2)}) < \delta_n \text{ и } \rho(x(t_n^{(1)} + \bar{t}_n), x(t_n^{(2)} + \bar{t}_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{1.2.30}$$

Очевидно, из 4) следует, что x уст. L^+, поэтому последовательность $\{xt_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{x}_i = \lim\limits_{n \to +\infty} xt_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Из неравенства (1.2.30) следует, что $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$. Покажем, что последовательность $\{xt_n^{(i)}\}$ сходится к $\bar{x}$ равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$. Логически возможны два случая:

а. Последовательность $\{t_n^{(i)}\}$ ограничена и тогда, не умаляя общности рассуждений, можно считать ељ сходящейся. И тогда требуемое утверждение вытекает из леммы 5.

б. Последовательность $\{t_n^{(i)}\}$ неограничена. Согласно 4) последовательность $\{xt_n^{(i)}\}$ можно считать сходящейся равномерно $t \in \mathbb{T}_+$. Итак, мы показали, что $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, причем сходимость в последнем равенстве равномерная по $t \in \mathbb{T}_+$. Тогда для числа $\frac{\varepsilon_0}{2}$ найдется натуральное число n_0 такое, что

$$\rho(x(t_n^{(1)} + t), x(t_n^{(2)} + t)) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.2.31}$$

при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и $n \geq n_0$. В частности, при $t = t_n$,

$$\rho(x(t_n^{(1)} + t_n), x(t_n^{(2)} + t_n)) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.2.32}$$

Неравенство (1.2.32) противоречит неравенству (1.2.30). Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Наконец, покажем что из 3) следует 1). Пусть точка $x \in X$ уст. L^+ и Σ_x^+ р. уст. $Л^+\Sigma_x^+$. Тогда согласно следствию 5 множество ω_x является непустым компактным минимальным множеством, состоящим из почти периодических движений. Согласно теореме 1.2.12 точка x асимптотически почти периодична. Теорема полностью доказана. □

Теорема 1.2.14. *Для того чтобы точка $x \in X$ была асимптотически τ-периодической, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\pi(x, k\tau)\}_{k=0}^{+\infty}$ сходилась.*

Доказательство. Необходимость. Пусть точка $x \in X$ асимптотически τ-периодична, то есть существует τ-периодическая точка p такая, что имеет место равенство (1.2.15). Тогда

$$\rho(x(k\tau), p(k\tau)) = \rho(x(k\tau), p). \tag{1.2.33}$$

Переходя к пределу в (1.2.33), когда $k \to +\infty$, и учитывая (1.2.15), получим требуемый результат.

Достаточность. Пусть $\{\pi(x, k\tau)\}_{k=0}^{+\infty}$ сходится. Положим

$$p = \lim_{k\to+\infty} \pi(x, k\tau).$$

Заметим, что

$$p\tau = (\lim_{k\to+\infty} x(k\tau))\tau = \lim_{k\to+\infty} [x(k\tau)]\tau = \lim_{k\to+\infty} x(k+1)\tau = p.$$

Таким образом, точка p является τ-периодической. Покажем, что x уст. L^+. В самом деле. Пусть $\{t_n\} \subset \mathbb{T}_+$, тогда $t_k = m_k\tau + \bar{t}_k$ $(m_k,\ \bar{t}_k \in \mathbb{T}_+,\ \tau > 0$ и $\bar{t}_k \in [0, \tau])$. Последовательность $\{\bar{t}_k\}$ можно считать сходящейся и пусть $t_0 = \lim\limits_{k\to+\infty} \bar{t}_k$. Тогда $\lim\limits_{k\to+\infty} xt_k = \lim\limits_{k\to+\infty} x(m_k\tau + \bar{t}_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} [x(m_k\tau)]\bar{t}_k = pt_0$.

В силу уст. L^+ точки x на множестве $H^+(x)$ интегральная непрерывность осуществляется равномерно. Так как имеет место равномерная интегральная непрерывность и $\lim\limits_{k\to+\infty} x(k\tau) = p$, то

$$\lim_{k\to+\infty} \sup\{\rho(x(k\tau+t), pt) : t \in [0,\tau]\}$$

и, следовательно,

$$\rho(xt, pt) = \rho(x(k\tau+\tilde{t}), p\tilde{t}) \leq \sup\{\rho(x(k\tau+\tilde{t}), p\tilde{t}) \mid \tilde{t} \in [0,\tau]\}, \tag{1.2.34}$$

где $t = k\tau + \tilde{t}$ ($k = [t]$, $\tilde{t} \in [0,\tau]$). Переходя к пределу в (1.2.34), когда $t \to +\infty$ ($k = [t] \to +\infty$, когда $t \to +\infty$), получим равенство (1.2.15). Теорема доказана. □

Следствие 6. *Для того чтобы точка x была асимптотически постоянной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\pi(x, k\tau)\}$ сходилась при каждом $\tau \in \mathbb{T}_+$.*

Теорема 1.2.15. *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$. Для того чтобы точка x была асимптотически постоянной в динамической системе $(X, \mathbb{T}, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\pi(x, t_n)\}$ сходилась, где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть точка $x \in X$ такова, что последовательность $\{xt_n\}$, где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, является сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$ и покажем, что

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, p) = 0. \tag{1.2.35}$$

Очевидно, для доказательства (1.2.35) достаточно доказать, что для любой последовательности $\{t'_k\} \subset \mathbb{T}$, $t'_k \to +\infty$, имеет место

$$\lim_{k\to+\infty} \rho(xt'_k, p) = 0. \tag{1.2.36}$$

По последовательности $\{t'_k\}$ определим последовательность

$$t_{n_k} = \max\{t_n \mid t_n \leq t'_k\}. \tag{1.2.37}$$

Определенная равенством (1.2.37) последовательность $\{t_{n_k}\}$ обладает следующим свойством:

$$t_{n_k} \leq t'_k < t_{n_k+1}. \tag{1.2.38}$$

Из (1.2.38) следует, что $0 \leq t'_k - t_{n_k} < t_{n_k+1} - t_{n_k} = \frac{1}{n_k+1}$. Из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{k\to+\infty} (t'_k - t_{n_k}) = 0$. Остается заметить, что $\pi(x, t'_k) = \pi(\pi(x, t_{n_k}), t'_k - t_{n_k})$. Так как $\{xt_{n_k}\}$ и $\{t'_k - t_{n_k}\}$ сходятся, то сходящейся является и последовательность $\{xt'_k\}$ и, очевидно, $\lim\limits_{k\to+\infty} xt'_k = p$. Теорема доказана. □

Замечание 1.2.2. *Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{Z}$, то есть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является каскадом, и $p \in X$ является m-периодической, то, очевидно, ее траекторией является множество $\{p, \pi(p,1), \ldots, \pi(p,(m-1))\}$, состоящее ровно из m различных точек.*

Лемма 6. [**38**] *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{Z}$ и $x \in X$ – уст. L^+ точка. Для того чтобы множество ω_x состояло из конечного числа точек необходимо и достаточно, чтобы существовала m-периодическая точка $p \in X$ такая, что $\omega_x = \{p, \pi(p,1), \ldots, \pi(p, m-1)\}$.*

Теорема 1.2.16. *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{Z}$. Для того чтобы точка x была асимптотически m-периодической необходимо и достаточно, чтобы точка x была уст. L^+ и ее ω-предельное множество ω_x состояло ровно из m различных точек.*

Доказательство. Необходимость сформулированного утверждения вытекает непосредственно из определения асимптотической m-периодичности и замечания 1.2.2.

Достаточность. Пусть точка $x \in X$ уст. L^+ и $\omega_x = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$. Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} \rho(xn, \omega_x) = 0. \tag{1.2.39}$$

Из равенства (1.2.39) следует, что

$$\delta(n) = \min\{\rho(xn, p_j n) : 1 \leq j \leq m\} \to 0 \tag{1.2.40}$$

при $n \to +\infty$. Пусть $\rho > 0$ таково, что

$$\rho(p_i n, p_j n) \geq 0 \tag{1.2.41}$$

при всех $n \in \mathbb{T}$ и $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$. В силу уст. L^+ точки x на множестве $H^+(x)$ выполнено условие равномерной интегральной непрерывности. Выберем для числа $\frac{\rho}{3}$ число $\gamma(\frac{\rho}{3}) > 0$, $\gamma(\frac{\rho}{3}) < \frac{\rho}{3}$, из условия равномерной интегральной непрерывности. Тогда

$$\rho(\pi(\overline{x}, 1), \pi(p, 1)) < \frac{\rho}{3} \quad (\overline{x}, p \in H^+(x)), \tag{1.2.42}$$

как только $\rho(\overline{x}, p) < \gamma$. Из (1.2.40) следует, что для $\gamma(\frac{\rho}{5})$ найдется n_0 такое, что $\delta(n) < \gamma(\frac{\rho}{5})$ при всех $n \geq n_0$. Тогда найдется $j_0 \in [1, m] \subset \mathbb{T}$ такой, что

$$\rho(xn_0, p_{j_0} n_0) < \gamma(\frac{\rho}{5}). \tag{1.2.43}$$

Положим

$$\Delta = \sup\{\tilde{\Delta} \mid \rho(xn, p_{j_0} n) < \gamma(\frac{\rho}{5}), \quad n \in [n_0, n_0 + \tilde{\Delta}]\}. \tag{1.2.44}$$

а. Если $\Delta = +\infty$, то $\rho(xn, p_{j_0} n) < \gamma(\frac{\rho}{5})$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, при всех $j \neq j_0$

$$\rho(xn, p_j n) \geq \rho(p_j n, p_{j_0} n) - \rho(xn, p_{j_0} n) \geq \rho - \frac{\rho}{3} = \frac{2\rho}{3} > \gamma(\frac{\rho}{5}).$$

Откуда следует, что

$$\rho(xn, p_{j_0} n) = \min_{1 \leq j \leq m} \rho(xn, p_j n) = \delta(n) \to 0$$

при $n \to +\infty$. И в этом случае теорема докаана.

б. Покажем, что случай $\Delta < +\infty$ невозможен. Действительно, если допустить, что $\Delta < +\infty$ и положить $n'_0 = n_0 + \Delta$, то будем иметь

$$\rho(xn'_0, p_{j_0}n') < \gamma(\frac{\rho}{5}), \tag{1.2.45}$$

$$\rho(x(n'+1), p_{j_0}(n'+1)) \geq \gamma(\frac{\rho}{5}) \tag{1.2.46}$$

и

$$\rho(x(n'+1), p_{j_0}(n'+1)) < \frac{\rho}{5}. \tag{1.2.47}$$

Так как $\delta(n'+1) < \gamma(\frac{\rho}{5})$, то существует $p_{i_0} \neq p_{j_0}$, такое что

$$\rho(x(n'+1), p_{i_0}(n'+1)) \geq \gamma(\frac{\rho}{5})$$

и, следовательно,

$$\rho(p_{j_0}(n'+1), p_{i_0}(n'+1)) \leq \rho(p_{j_0}(n'+1), x(n'+1)) + \tag{1.2.48}$$

$$\rho(x(n'+1), p_{i_0}(n'+1)) < \gamma + \frac{\rho}{5} < \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{5} < \rho. \tag{1.2.49}$$

Последнее противоречит выбору числа ρ. Теорема полностью доказана. $\square$

Асимптотически почти периодические движения ранее изучались в работах [**45, 46**]. Однако асимптотическая почти периодичность в упомянутых работах понимается в ином смысле.

В [**45, 46**] точку $x \in X$ называют асимптотически почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное на $\mathbb{R}_+$ множество $D(\varepsilon)$ такое, что

$$\rho(\pi(t+\tau_1, x), \pi(t+\tau_2, x)) < \varepsilon$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, τ_1 и τ_2 из $D(\varepsilon)$. В этих же работах доказано, что точка x асимптотически почти периодична тогда и только тогда, когда x уст. L^+ и ω_x является почти периодическим минимальным множеством.

Замечание 1.2.3. *Из Теоремы 1.2.13 следует, что всякая точка $x \in X$ являющаяся асимптотически почти периодической в смысле нашего определения, является и асимптотически почти периодической и в смыле* [**45, 46**]. *Из той же теоремы вытекает, что эти определения не совпадают.*

Сказанное подтверждается следующим примером.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему, заданную на единичном круге по следующему правилу. Центр круга пусть будет точкой покоя, граница круга – траекторией периодического движения периода $\tau = 1$. Все остальные движения пусть будут неособыми. Кроме того, считаем, что любая полутраектория Σ_x^+ не р. уст. $\text{Л}^+\Sigma_x^+$ для любой внутренней точки x круга, отличной от центра. Описанная выше динамическая система задается системой дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах записывается следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = (r-1)^2 \\ \frac{d\varphi}{dt} = r. \end{array} \right. \tag{1.2.50}$$

Нетрудно заметить, что ω-предельное множество точки x является траекторией 1-периодической точки, но сама точка x не является асимптотически 1-периодической, так как Σ_x^+ не является р. уст. $\text{Л}^+\Sigma_x^+$ (см. теорему 1.2.12).

1.3. Сравнимость движений по характеру возвращаемости в пределе

В этом параграфе вводится понятие сравнимости движений динамических систем по характеру их возвращаемости в пределе. Это понятие при изучении асимптотически устойчивых по Пуассону движений играет такую же роль, как и понятие сравнимости по характеру возвращаемости устойчивых по Пуассону движений, введенных Б. А. Щербаковым (см., например, [**41**]).

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ – динамические системы, $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначим через $\mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$ множество всех последовательностей $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_{x,p}$ таких, что $t_n \to +\infty$. Положим $\mathfrak{L}_x^{+\infty}(M) = \cup\{\mathfrak{L}_{x,p} : p \in M\}$ и $\mathfrak{L}_x^{+\infty} = \mathfrak{L}_x^{+\infty}(X)$.

Точку $x \in X$ назовчм сравнимой по характеру возвращаемости с $y \in Y$ относительно $M \subset Y$ или, короче, сравнимой с y относительно множества M, если $\mathfrak{L}_y^{+\infty}(M) \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$.

Обозначим через $H(M) = \overline{\{\pi(x,t) : x \in M, t \in \mathbb{T}\}}$. Пусть $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ – групповая динамическая система.

Лемма 7. *Если* $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$, *то* $\mathfrak{L}_{y,\sigma(q,t)}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,\pi(p,t)}^{+\infty}$ *при всех* $t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{T}$ и $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_{y,\sigma(q,t)}^{+\infty}$, тогда $t_n \to +\infty$ и $\sigma(y, t_n) \to \sigma(q, t)$ при $n \to +\infty$ и, следовательно, $\{t_n - t\} \subset \mathbb{T}$ и $\{t_n - t\} \in \mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty}$. Действительно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(y, t_n - t) = \sigma(\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(y, t_n), -t) = \sigma(\sigma(q,t), -t) = q$. Таким образом, $\{t_n - t\} \in \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{y,p}^{+\infty}$ и, следовательно, $\{t_n - t\} \in \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$. Повторяя приведчнные выше рассуждения, легко показать, что $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_{x,\pi(p,t)}^{+\infty}$. Лемма доказана. □

Следствие 7. *В условиях леммы* 7, *если* $\mathfrak{L}_y^{+\infty}(M) \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$, *то* $\mathfrak{L}_y^{+\infty}(\Sigma_M) \subset \mathfrak{L}_x^{+\infty}$, *где* $\Sigma_M = \{\pi(x,t) : x \in M,\ t \in \mathbb{T}\}$.

Лемма 8. *Если* $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$, *то существует единственная точка* $p \in \omega_x$ *такая, что* $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$.

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty}$, тогда $yt_n \to q$. Согласно условию леммы существует точка $p \in \omega_x$ такая, что $xt_n \to p$. Покажем, что $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$. Допустим, что существует $\{t'_n\} \in \mathfrak{L}_{y,q} \setminus \mathfrak{L}_{x,p}$, тогда найдется точка $\bar{p} \in \omega_x$ $(\bar{p} \neq p)$ такая, что $\{xt'_n\}$ сходится к $\bar{p}$. Составим последовательность $\{\bar{t}_k\}$ следующим правилом

$$\bar{t}_k = \begin{cases} t_n, \text{ если } k = 2n-1 \\ t'_n, \text{ если } k = 2n. \end{cases}$$

Из определения последовательности $\{\bar{t}_k\}$ следует, что $\bar{t}_k \to +\infty$ и $y\bar{t}_k \to q$. По условию леммы $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x}^{+\infty}$ и, следовательно, $\{\bar{t}_k\} \in \mathfrak{L}_{x}^{+\infty}$, т.е. $\{x\bar{t}_k\}$ сходится. С другой стороны, она должна иметь две различные предельные точки p и $\bar{p}$. Полученное противоречие доказывает включение $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что точка p в лемме определяется однозначно, ибо для различных точек p_1 и p_2 имеет место равенство $\mathfrak{L}_{x,p_1}^{+\infty} \cap \mathfrak{L}_{x,p_2}^{+\infty} = \emptyset$. □

Теорема 1.3.17. *Если точка x сравнима с y относительно множества M, то существует непрерывное отображение $h : \sigma(\Sigma_M, \mathbb{T}) \to \omega_x$, удовлетворяющее условию*

$$h(\sigma(q,t)) = \pi(h(q),t) \tag{1.3.51}$$

при всех $q \in \sigma(\Sigma_M, \mathbb{T})$ и $t \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Пусть точка x сравнима с y относительно множества M. По следствию 7 $\mathfrak{L}_{y}^{+\infty}(\Sigma_M) \subseteq \mathfrak{L}_{x}^{+\infty}$. Пусть $q \in \Sigma_M$. Согласно лемме 8 существует единственная точка $p \in \omega_x$ такая, что $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$. Положим $h(p) = q$. Таким образом корректно определено отображение $h : \Sigma_M \to \omega_x$. Из леммы 7 следует, что h удовлетворяет условию (1.3.51). Покажем, что отображение h непрерывно. Пусть $\{q_k\} \to q$ $(q_k, q \in \Sigma_M)$. Покажем, что $\{p_k\} = \{h(q_k)\}$ сходится к $p = h(q)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $\{t_n^{(k)}\} \in \mathfrak{L}_{y,q_k}^{+\infty}$, тогда $p_k = h(q_k) = \lim\limits_{n \to +\infty} xt_n^{(k)}$. Пусть $\varepsilon_k \downarrow 0$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho(xt_{n_k}^{(k)}, p_k) < \varepsilon_k \quad \text{и} \quad d(yt_{n_k}^{(k)}, q_k) < \varepsilon_k$$

одновременно (очевидно, такие n_k существуют). Положим $t'_k = t_{n_k}^{(k)}$ и покажем, что последовательность $\{t'_k\}$ принадлежит $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty}$. Для этого заметим, что

$$d(yt'_k, q) \leq d(yt'_k, q_k) + d(q_k, q) < \varepsilon_k + d(q_k, q). \tag{1.3.52}$$

Переходя к пределу в неравенству (1.3.52), когда $k \to +\infty$, получим $\{t'_k\} \in \mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty}$. Так как $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$, то $\{t'_k\} \in \mathfrak{L}_{x,p}$. Поскольку

$$\rho(p_k, p) \leq \rho(p_k, xt'_k) + \rho(xt'_k, p) < \varepsilon_k + \rho(xt'_k, p), \tag{1.3.53}$$

то, переходя к пределу в (1.3.53), и учитывая, что $\{t'_k\} \in \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$, получим $p_k \to p$. Теорема доказана. □

Пусть точка x сравнима с y относительно множества M. Отметим, что наиболее важными с точки зрения приложений (см., например, [**3**], [**41**]) является следующие случаи.

1. $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$. Как показано в [**43**], включение $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_y \subseteq \mathfrak{N}_x$. Как было отмечено в § 1.2 главы I, включение $\mathfrak{N}_y \subseteq \mathfrak{N}_x$ имеет место тогда и только тогда, когда x сравнима по возвращаемости с y.

2. $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$ и $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$. Положим $\mathfrak{M}^{+}_{y} = \{\{t_n\} : \{t_n\} \in \mathfrak{M}_y,\ t_n \in \mathbb{T}_+\}$. Точку x назовчм сильно сравнимой (в положительном направлении) с y, если $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$ и $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$. Имеет место следующая

Теорема 1.3.18. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Точка x сильно сравнима с y.*
2) *Существует непрерывное отображение $h : H^+(y) \to H^+(x)$, удовлетворяющее условию* (1.3.51) *при всех $q \in H^+(y)$ и $t \in \mathbb{T}_+$, и, кроме того, $h(y) = x$.*
3) $\mathfrak{M}^{+}_{y} \subseteq \mathfrak{M}^{+}_{x}$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Действительно, согласно теореме 1.3.17 существует непрерывное отображение $h : H^+(y) \to H^+(x)$ с нужными свойствами.

Предположим, что выполнено условие 2). И пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{M}^{+}_{y}$, тогда существует точка $q \in H^+(y)$ такая, что $yt_n \to q$. В силу условия

$$\{h(yt_n)\} = \{h(y)t_n\} = \{xt_n\} \to h(q)$$

и, следовательно, $\{t_n\} \in \mathfrak{M}^{+}_{x}$.

Наконец, покажем, что из 3) следует 1). Очевидно, для доказательства 1) достаточно показать, что $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$. Доказательство последнего включения проведчм методом от противного. Если допустить, что включение $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$, не имеет место, то существует $\{\bar{t}_n\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \setminus \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$. Так как $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$, то существует точка $p \neq x$ такая, что $\{\bar{t}_n\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$. Построим последовательность $\{t'_k\}$ следующим условием

$$t'_k = \begin{cases} \bar{t}_n, \text{ при } k = 2n-1 \\ t'_n, \text{ при } k = 2n \end{cases}$$

при каждом $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $\{t'_k\} \in \mathfrak{M}^{+}_{y,y}$ и, следовательно, $\{t'_k\} \in \mathfrak{M}^{+}_{x}$. Таким образом, последовательность $\{xt'_k\}$ сходится. Откуда следует, что $x = p$. Последнее равенство противоречит выбору p ($p \neq x$). Теорема доказана. □

Замечание 1.3.4. *Из теоремы* 1.3.18 *и результатов работы* [**43**] *следует, что сильная сравнимость точки x с y эквивалентна их равномерной сравнимости, если точка y уст. L^+. В общем случае эти понятия, видимо, различны* (*хотя нам соответствующий пример неизвестен*).

3. $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$. В этом случае мы будем говорить, что точка x сравнима в пределе (в положительном направлении) с точкой y.

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ – динамические системы, $x \in X$ и $y \in Y$.

Теорема 1.3.19. *Пусть точка y асимптотически устойчива по Пуассону. Для того чтобы x была сравнимой в пределе с y необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям*

$$h(\sigma(q, t) = \pi(h(q), t) \tag{1.3.54}$$

при всех $q \in \omega_y$, $t \in \mathbb{T}$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(\pi(x, t_n), \pi(h(\tilde{q}), t_n)) = 0 \tag{1.3.55}$$

при каждом $\tilde{q} \in P_y$ и $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x была сравнимой в пределе с y. Согласно теореме 1.3.17 существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условию (1.3.54). Покажем, что имеет место и равенство (1.3.55). Пусть $\tilde{q} \in P_y$ и $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Тогда найдется точка $\overline{q} \in \omega_y$ такая, что $yt_n \to \overline{q}$. В силу определения отображения h имеем равенство $h(\overline{q}) = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$. С другой стороны,

$$\overline{q} = \lim_{n\to+\infty} yt_n = \lim_{n\to+\infty} q\bar{t}_n,$$

так как $q \in P_y$. Следовательно,

$$h(\overline{q}) = h(\lim_{n\to+\infty} y\bar{t}_n) = h(\lim_{n\to+\infty} \overline{q}t_n) = \lim_{n\to+\infty} \pi(h(q), t_n).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} x\bar{t}_n = h(\overline{q}) = \lim_{n\to+\infty} \pi(h(q), \bar{t}_n).$$

Откуда и следует (1.3.55).

Достаточность. Пусть существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям (1.3.54) и (1.3.55). Возьмҷм произвольную последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$, тогда существует точка $q \in \omega_y$ такая, что последовательность $\{yt_n\}$ сходится к q. Пусть $y \in P_y$. Заметим, что

$$h(q) = h(\lim_{n\to+\infty} yt_n) = h(\lim_{n\to+\infty} \sigma(q, t_n)) = \lim_{n\to+\infty} \pi(h(q), t_n) \tag{1.3.56}$$

и, следовательно,

$$\rho(xt_n, h(q)) \leq \rho(xt_n, h(q)t_n) + \rho(h(q)t_n, h(q)). \tag{1.3.57}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.3.57) и учитывая равенство (1.3.56) и условие (1.3.55), получим равенство $h(q) = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$, то есть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_x^{+\infty}$ и $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subset \mathfrak{L}_x^{+\infty}$. Теорема доказана. □

Следствие 8. *Пусть точка y уст. L^+ и асимптотически устойчива по Пуассону. Для того чтобы точка x была сравнима в пределе с y необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям* (1.3.54) *и*

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, h(q)t) = 0 \tag{1.3.58}$$

при всех $q \in P_y$.

Доказательство. Достаточность условий следствия вытекает из теоремы 1.3.19. Докажем необходимость. Пусть точка x сравнима в пределе с y. Согласно теореме 1.3.19 существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$ удовлетворяющее условиям (1.3.54) и (1.3.55). Допустим, что равенство (1.3.58) не имеет места. Тогда существуют $q \in P_y$, $t_n \to +\infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\rho(xt_n, h(q)t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{1.3.59}$$

В силу уст. L^+ точки y из последовательности $\{\bar{t}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{t_{k_n}\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Согласно теореме 1.3.19 выполнено равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(xt_{k_n}, h(q)t_{k_n}) = 0. \tag{1.3.60}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.3.59) по подпоследовательности $\{t_{k_n}\}$ и учитывая равенство (1.3.60), получим $\varepsilon_0 \leq 0$. Последнее противоречит выбору числа ε_0. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. □

Приводимая ниже теорема показывает, что введенное понятие сравнимости в пределе играет такую же роль при изучении асимптотически устойчивых по Пуассону движений, какую играет понятие согласованности в смысле Б. А. Щербакова для устойчивых по Пуассону движений [**41**].

Теорема 1.3.20. *Пусть y асимптотически постоянна* (*асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна*). *Если точка x сравнима в пределе с y, то точка x также асимптотически постоянна* (*асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна*).

Доказательство. Пусть x сравнима в пределе с y. Согласно следствию 8 существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям (1.3.54) и (1.3.58). Так как y уст. L^+, то ω_y компактно и, следовательно, отображение h равномерно непрерывно. Пусть $q \in P_y$, тогда $p = h(q) \in P_x$ и согласно теореме 9 из [**43**] точка p постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна). Теорема доказана. □

1.4. Асимптотически устойчивые по Пуассону решения операторных уравнений

Рассмотрим вопрос о существовании асимптотически устойчивых по Пуассону решений операторных уравнений.

Пусть $h : X \to Y$ – гомоморфизм динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$h(x) = y, \tag{1.4.61}$$

где $y \in Y$. Наряду с уравнением (1.4.61) рассмотрим семейство "ω-предельных"уравнений

$$h(x) = q, \quad (q \in \omega_y). \tag{1.4.62}$$

Теорема 1.4.21. *Если решение x уравнения* (1.4.61) *уст. L^+ и каждое уравнение семейства* (1.4.62) *допускает не более одного решения из ω_x, то x сравнимо в пределе с $y \in Y$.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Тогда существует точка $q \in \omega_y$ такая, что $yt_n \to q$. В силу уст. L^+ решения x, последовательность $\{xt_n\}$ компактна. Пусть p – произвольная предельная точка последовательности $\{xt_n\}$, тогда существует подпоследовательность $\{t_{k_n}\} \subseteq \{t_n\}$ такая, что последовательность $\{xt_{k_n}\}$ сходится к p. В силу непрерывности и гомоморфности h имеет место равенство $h(p) = q$. Таким образом, p является решением уравнения (1.4.62), $p \in \omega_x$ и, следовательно, всякая предельная точка p последовательности $\{xt_n\}$ является решением уравнения (1.4.62). По условию теоремы, уравнение (1.4.62) имеет не более одного решения из ω_x. Следовательно, последовательность $\{xt_n\}$ имеет ровно одну предельную точку. Так как последовательность $\{xt_n\}$ компактна, то, в таком случае, она сходится. Таким образом последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_x^{+\infty}$ и доказано включение $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subset \mathfrak{L}_x^{+\infty}$. $\square$

Следствие 9. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61) *и y асимптотически постоянна* (*асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна*). *Если каждое уравнение семейства* (1.4.62) *допускает не более одного решения из ω_x, то x асимптотически постоянно* (*асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

Доказательство. Сформулированное предложение вытекает из теорем 1.3.20 и 1.4.21. $\square$

Решение $x \in M$ $(M \subseteq X)$ уравнения (1.4.61) назовем разделенным в множестве M, если x – единственное решение уравнения (1.4.61) из M или существует число $r > 0$ такое, что каково бы ни было решение $p \in M$ $(p \neq x)$ уравнения (1.4.61) $\rho(xt, pt) \geq r$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Лемма 9. *Пусть множество $M \subseteq X$ компактно. Если каждое решение $x \in M$ уравнения* (1.4.61) *разделено в M, то* (1.4.61) *имеет конечное число решений из M.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. в M существует бесконечное множество $\{x_n\}$ решений уравнения (1.4.61). В силу компактности M из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\{x_n\}$ сходится. Пусть $p = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. В силу непрерывности h и замкнутости M $h(p) = y$ и $p \in M$. Таким образом p – решение уравнения (1.4.61), но, очевидно, оно не является разделенным в M, что противоречит условию. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Пусть точка $y \in Y$ рекуррентна, $M \subseteq X$ – компактное инвариантное множество и $y \in h(M)$. Если решения из M каждого уравнения семейства* (1.4.62) *разделены в множестве M, то существует число $r > 0$ такое, что каковы бы ни были два различных решения p_1 и p_2 из M любого уравнения семейства* (1.4.62) *выполняется неравенство $\rho(p_1 t, p_2 t) \geq r > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$.*

Доказательство. Согласно лемме 9 при каждом $q \in \omega_y$ уравнение (1.4.62) имеет конечное число решений из M. Обозначим через $n(q)$ число различных решений уравнения (1.4.62) из M. Покажем, что число $n(q)$ не зависит от точки $q \in \omega_y$. В самом деле, для точки $q \in \omega_y$ найдется последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$ такая, что последовательность $\{yt_n\}$ сходится к q. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\} \subseteq M^M$, определенную равенством $\xi_n(x) = \pi(x, t_n)$ при всех $x \in M$. Согласно теореме Тихонова **[11]** последовательность $\{\xi_n\}$ компактна в M^M. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\{\xi_n\}$ сходится в M^M. Положим

$$\xi = \lim_{n\to+\infty} \xi_n$$

. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{n(y)}$ решения из M уравнения (1.4.61) и $\bar{x}_i = \xi(x_i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n(y)$, т.е. $\bar{x}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_i t_n$. Заметим, что в силу непрерывности и гомоморфности h точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n(y)}$ являются решениями уравнения (1.4.62). Покажем, что точки $\bar{x}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n(y)$) различны. Поскольку $\xi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n(x)$ при всех $x \in M$, а M инвариантно, то, в частности,

$$\xi(\pi(x_i, t)) = \lim_{n\to+\infty} \pi(\pi(x_i, t), t_n) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \pi(\pi(x_i, t_n), t) = \pi(\bar{x}_i, t). \tag{1.4.63}$$

Положим $r = \inf\{\rho(\pi(x_i, t), \pi(x_j, t)) : i \neq j,\ t \in \mathbb{R}\}$. Тогда согласно условию леммы $r > 0$. Так как $\rho(\pi(x_i, t), \pi(x_j, t)) \geq r > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n(y))$, то выполнено и неравенство

$$\rho(\pi(x_i, t + t_n), \pi(x_j, t + t_n)) \geq r. \tag{1.4.64}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.4.64) и учитывая (1.4.63), получим

$$\rho(\pi(\bar{x}_i, t), \pi(\bar{x}_j, t)) \geq r \tag{1.4.65}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$ и $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n(y))$. Из неравенства (1.4.65) следует, что $\bar{x}_i$ различны. Таким образом $n(q) \geq n(y)$. Из рекуррентности y следует, что $y \in \omega_q$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получим неравенство $n(y) \geq n(q)$. Следовательно, $n(q) = n(y)$ при любом $q \in \omega_y$. Из неравенства (1.4.65) следует, что число $r > 0$ обладает нужными в лемме свойствами. Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть точка $y \in Y$ асимптотически рекуррентна и x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61). *Если при каждом $q \in \omega_y$ все решения из ω_x уравнения* (1.4.62) *разделены в ω_x, то существует единственное решение $p \in \omega_x$ уравнения* (1.4.62) *такое, что $p \in P_x$.*

Доказательство. Согласно лемме 9 в условиях нашей леммы уравнение (1.4.62) имеет лишь конечное число n решений из ω_x. Обозначим их через $p_1, p_2, \dots, p_n$. Покажем, что имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \inf\{\rho(xt, p_i t) : 1 \leq i \leq n\} = 0. \tag{1.4.66}$$

Допустим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\{t_n\} \to +\infty$ такие, что

$$\rho(xt_k, p_i t_k) \geq \varepsilon_0 \tag{1.4.67}$$

при всех $i = \overline{1,n}$ и $k = 1, 2, \dots$. В силу уст. L^+ точки x и асимптотической рекуррентности y последовательности $\{xt_k\}$, $\{p_i t_k\}$ $(i = \overline{1,n})$ и $\{yt_k\}$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{p} = \lim_{k \to +\infty} xt_k$, $\bar{q} = \lim_{k \to +\infty} yt_k$ и $\bar{p}_i = \lim_{k \to +\infty} p_i t_k$. Из неравенства (1.4.67) следует, что $\bar{p} \neq \bar{p}_i$ $(i = \overline{1,n})$. С другой стороны, $\bar{p} \in \omega_x$ и $h(\bar{p}) = \bar{q}$, а по лемме 10 $X_{\bar{q}} \cap \omega_x = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n\}$, где $X_{\bar{q}} = h^{-1}(\bar{q})$. Таким образом $\bar{p} \in \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n\}$. Последнее противоречит условию $\bar{p}_i \neq \bar{p}$ $(i = \overline{1,n})$. Таким образом равенство (1.4.66) доказано.

Покажем, что существует число $1 \leq i_0 \leq n$, для которого $p_{i_0} \in P_x$, т.е.

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, p_{i_0} t) = 0.$$

Для числа ε, $0 < \varepsilon < \frac{r}{3}$, ($r > 0$ – число, существование которого гарантируется леммой 10) найдем $L(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\inf\{\rho(xt, p_i t) : 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Пусть $t_0 > L(\varepsilon)$, тогда существует $1 \leq i_1 \leq n$ такое, что

$$\rho(xt_0, p_{i_1} t_0) < \varepsilon.$$

Положим $\delta(t_0) = \sup\{\tilde{\delta}(t_0) : \rho(xt, p_{i_1}t) < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta}(t_0)]\}$. Покажем, что $\delta(t_0) = +\infty$. Допустим противное, тогда

$$\rho(xt'_0, p_{i_1}t'_0) \geq \varepsilon,$$

где $t'_0 = t_0 + \delta(t_0)$, и существует $i_2 \neq i_1$ $(1 \leq i_2 \leq n)$ такое, что

$$\rho(xt'_0, p_{i_2}t'_0) < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\rho(xt'_0, p_{i_2}t'_0) \geq \rho(p_{i_2}t'_0, p_{i_1}t'_0) - \rho(p_{i_1}t'_0, xt'_0) > r - \varepsilon > 2\varepsilon. \tag{1.4.68}$$

Неравенство (1.4.68) противоречит допущению. Таким образом мы нашли $L(\varepsilon) > 0$ и $p_{i_0} \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, что

$$\rho(xt, p_{i_0}t) < \varepsilon$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Положим $p = p_{i_0}$ и покажем, что точка p не зависит от выбора ε. В самом деле, если допустить противное, то найдутся числа ε_1 и ε_2, p_1 и p_2 $(p_1 \neq p_2)$, $L(\varepsilon_1) > 0$ и $L(\varepsilon_2) > 0$, удовлетворяющие выше перечисленным условиям. Положим $L = \max(L(\varepsilon_1), L(\varepsilon_2))$, тогда

$$\rho(p_1t, p_2t) \leq \rho(p_1t, xt) + \rho(xt, p_2t) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{2r}{3} < r. \tag{1.4.69}$$

Неравенство (1.4.69) противоречит выбору числа r (см. лемму 10). Лемма доказана. □

Теорема 1.4.22. *Пусть точка $y \in Y$ асимптотически почти периодична (асимптотически рекуррентна) и x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61). *Если при каждом $q \in \omega_y$ все решения из ω_x уравнения* (1.4.62) *разделены в ω_x, то x асимптотически почти периодично (асимптотически рекуррентно).*

Доказательство. Согласно лемме 11 существует единственная точка $p \in \omega_x$ такая, что $p \in P_x$. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что в условиях теоремы множество ω_x состоит из почти периодических (рекуррентных) движений. Последнее утверждение вытекает из теоремы 3 [**14**, стр.111] (случай $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ см. в [**9**]) и теоремы 14.7 из [**3**]. Теорема доказана. □

Будем говорить, что решение x уравнения (1.4.61) Σ^+-устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что если $\rho(xt_1, xt_2) < \delta$ и

$$\sup\{d(y(t+t_1), y(t+t_2)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \delta \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{T}_+),$$

то

$$\sup\{\rho(x(t+t_1), x(t+t_2)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \varepsilon.$$

Теорема 1.4.23. *Пусть точка y асимптотически почти периодична и точка x уст. L^+. Если x является Σ^+-устойчивым решением уравнения* (1.4.61), *то оно асимптотически почти периодично.*

Доказательство. Пусть x – решение уравнения (1.4.61), удовлетворяющее перечисленным в теореме условиям, и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ из условия Σ^+-устойчивости решения x. Из теоремы 1.2.13 следует, что для асимптотической почти периодичности точки x достаточно показать, что из любой последовательности $\{t_n\} \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{xt_{k_n}\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$.

Пусть $\{t_n\} \to +\infty$. В силу сделанных предположений относительно x и y, последовательности $\{xt_n\}$ и $\{yt_n\}$ можно считать сходящимися, причем вторую – равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$. Таким образом, найдется число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup\{d(y(t+t_n), y(t+t_m)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \delta \tag{1.4.70}$$

и

$$\rho(xt_n, xt_m) < \delta \tag{1.4.71}$$

при всех $m, n \geq n_0$. В силу выбора числа δ, из неравенств (1.4.71) и (1.4.70) следует при $m, n \geq n_0$

$$\sup\{\rho(x(t+t_n), x(t+t_m)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \varepsilon. \tag{1.4.72}$$

Из неравенства (1.4.72) и полноты пространства X вытекает, что $\{xt_n\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.4.24. *Если точка $y \in Y$ τ-периодична, x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61) *и множество $M = \{\pi(x, n\tau) : n \in \mathbb{N}\}$ р. уст. Л^+M, то решение x асимптотически почти периодично.*

Доказательство. Рассмотрим каскад $(X_y, \bar{\pi})$, порожденный положительными степенями отображения $\bar{\pi} : X_y \to X_y$, где $X_y = h^{-1}(y)$ и $\bar{\pi}(z) = \pi(z, \tau)$ при всех $z \in X_y$. Заметим, что точка $x \in X_y$ является уст. L^+ и в дискретной динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$. Кроме того, в условиях теоремы положительная полутраектория $\{\pi(x, n\tau) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ точки $x \in X_y$ в динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$ р. уст. Л$^+$ относительно себя и согласно теореме 1.2.13 точка x асимптотически почти периодична в динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$, т.е. существует почти периодическая в $(X_y, \bar{\pi})$ точка $p \in X_y$ такая, что

$$\lim_{k \to +\infty} \rho(\pi(x, k\tau), \pi(p, k\tau)) = 0. \tag{1.4.73}$$

Далее докажем, что из равенства (1.4.73) следует равенство (1.2.15). Допустим противное, тогда найдется $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}_+$ $(t_n \to +\infty)$ и положительное число ε_0 такие, что

$$\rho(xt_n, pt_n) \geq \varepsilon_0. \tag{1.4.74}$$

Обозначим через k_n целую часть t_n при делении на τ, тогда $t_n = k_n\tau + \bar{t}_n$, где $\bar{t}_n \in [0, \tau[$ и, следовательно, $\{\bar{t}_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{t} = \lim\limits_{n \to +\infty} \bar{t}_n$. В силу уст. L^+ точки x и равенства (1.4.73) последовательности $\{\pi(x, k_n\tau)\}$ и $\{\pi(p, k_n\tau)\}$ можно считать сходящимися к одной и той же точке $\bar{p}$. Заметим, что

$$\begin{gathered}\varepsilon_0 \leq \rho(\pi(x,t_n),\pi(p,t_n)) = \rho(\pi(x,k_n\tau+\bar{t}_n),\pi(p,k_n\tau+\bar{t}_n)) = \\ \rho(\pi(\pi(x,k_n\tau,\bar{t}_n),\pi(\pi(\bar{p},k_n\tau),\bar{t}_n) \leq \rho(\pi(\pi(x,k_n\tau),\bar{t}_n),\pi(\bar{p},\bar{t}))+ \\ \rho(\pi(\bar{p},\bar{t}),\pi(\pi(p,k_n\tau),\bar{t}_n)).\end{gathered} \tag{1.4.75}$$

Переходя в неравенстве (1.4.75) к пределу, когда $n \to +\infty$, получим $\varepsilon_0 \leq 0$. Последнее противоречит выбору числа ε_0. Требуемое утверждение доказано.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что из почти периодичности точки $p \in X_y$ в дискретной динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$, следует что она почти периодична и в динамической системе $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Действительно, как известно **[3]**,**[22]**,**[27]**, точка $p \in X$ почти периодична тогда и только тогда, когда из любой последовательности $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ можно извлечь подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{\pi(x, t_{k_n})\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}$.

Пусть $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ – произвольная последовательность. Тогда $t_n = l_n\tau + \bar{t}_n$, где $l_n \in \mathbb{N}$ и $\bar{t}_n \in [0,\tau[$. Последовательность $\{\bar{t}_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{t} = \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{t}_n$. Так как точка $p \in X_y$ почти периодична в $(X_y, \bar{\pi})$, то из последовательности $\{l_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{l_{k_n}\}$ такую, что

$$\lim_{n,m\to+\infty} \sup\{\rho(\pi(p, l_{k_n}\tau + s), \pi(p, l_{k_m}\tau + s)) : s \in \mathbb{Z}\} = 0. \tag{1.4.76}$$

Из равенства (1.4.76) и равномерной интегральной непрерывности на $H(p) = \overline{\{\pi(p,t) : t \in \mathbb{T}\}}$ следует равенство

$$\lim_{n,m\to+\infty} \sup\{\rho(\pi(p, l_{k_n}\tau + s), \pi(p, l_{k_m}\tau + s)) : s \in \mathbb{T}\} = 0. \tag{1.4.77}$$

Учитывая полноту пространства X и равенство (1.4.77), заключаем, что последовательность $\{\pi(p, l_{k_n}\tau)\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}$ и, значит, последовательность $\{\pi(p, t_{k_n})\}$ также сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}$. Теорема полностью доказана. □

Теорема 1.4.25. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61) *с асимптотически τ-периодической точкой y и $\bar{q} = \lim\limits_{k\to+\infty} \sigma(y, k\tau)$. Если уравнение*

$$h(x) = \bar{q} \tag{1.4.78}$$

допускает не более одного решения из ω_x, то решение x асимптотически τ-периодично.

Доказательство. Докажем сходимость последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$. Так, как x уст. L^+, то для сходимости последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$ достаточно, чтобы она содержала не более одной предельной точки. Пусть x_1 и x_2 – любые две предельные точки последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$. Тогда существуют последовательности $\{k_n^i\}$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$x_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(x, k_n^i\tau)$ $(i = 1, 2)$. Так как $\{\sigma(y, k\tau)\} \to \bar{q}$, то $h(x_1) = h(x_2) = \bar{q}$ и $x_1, x_2 \in \omega_x$. Согласно условию теоремы $x_1 = x_2$ и, следовательно, последовательность $\{\pi(x, k\tau)\}$ сходится и по теореме 1.2.14 точка x асимптотически τ-периодична. $\square$

Следствие 10. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61) *с асимптотически постоянной точкой y и $\bar{q} = \lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(y, t)$. Если уравнение* (1.4.78) *допускает не более одного решения из ω_x, то решение x асимптотически постоянно.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 1.4.25 и следствия 6. $\square$

Теорема 1.4.26. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61) *и множество X_y гомеоморфно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$. Если точка y является τ-периодической, то решение x асимптотически τ-периодично.*

Доказательство. Пусть точка y τ-периодична. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $X_q = S$ ($S = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$) при каждом $q \in \omega_y$. Согласно теореме 1.2.14 для асимптотической τ-периодичности точки x достаточно показать, что $\{\pi(x, k\tau)\}$ сходится. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \pi(x, t+\tau) - \pi(x, t)$. Логически возможны два случая:

а. существует $\bar{t} \in \mathbb{T}$ такое, что $\varphi(\bar{t}) = 0$ и, следовательно, $\pi(x, \bar{t}+\tau) = \pi(x, \bar{t})$. Откуда следует, что $\pi(\bar{x}, t+\tau) = \pi(\bar{x}, t)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, где $\bar{x} = \pi(x, \bar{t})$, и, следовательно, x асимптотически τ периодична.

б. функция $\varphi(t)$ сохраняет знак. Нетрудно заметить, что в этом случае последовательность $\{\pi(x, k\tau)\}$ будет монотонной, следовательно, сходящейся. Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.4.27. *Пусть x уст. L^+ решение уравнения* (1.4.61) *с асимптотически τ-периодической точкой y. Если все решения из ω_x уравнения* (1.4.78) *разделены в ω_x, то решение x асимптотически $m_0\tau$-периодично, где m_0 – некоторое натуральное число).*

Доказательство. Согласно лемме 9 уравнение (1.4.78) имеет лишь конечное число различных решений $p_1, p_2, \ldots, p_{n_0}$ из ω_x. Рассмотрим каскад $(X, \bar{\pi})$, порожденный положительными степенями отображения $\bar{\pi} : X \to X$, определенного равенством $\bar{\pi}(x) = \pi(x, \tau)$. Так как x – уст. L^+ решение уравнения (1.4.61), то траектория $\{\bar{\pi}^k x | k \in \mathbb{N}\} = \{\pi(x, k\tau) | k \in \mathbb{N}\}$ точки $x \in X$ в динамической системе $(X, \bar{\pi})$ относительно компактна. Заметим, что каждая предельная точка последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$ является решением уравнения (1.4.78) и принадлежит ω_x и, в силу сказанного выше, она содержится в множестве $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$. Отсюда следует, что ω-предельное множество $\bar{\omega}_x$ точки x в динамической системе $(X, \bar{\pi})$ состоит из конечного числа точек. Пусть $\bar{\omega}_x = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{m_0}\}$ $(m_0 \le n_0)$. Тогда согласно теореме 1.2.16 точка x асимптотически m_0-периодична в системе $(X, \bar{\pi})$ и, следовательно, последовательность $\{\pi(x,$

$m_0k\tau)\}$ сходится. Согласно теореме 1.2.14 точка x асимптотически $m_0\tau$-периодична в системе $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Теорема доказана. $\square$

1.5. Динамические системы сдвигов и асимптотическая устойчивость по Пуассону функций

Асимптотически почти периодические функции Фреше. В этом пункте приведем определение асимптотической почти периодичности непрерывных функций, принадлежащее М. Фреше [**51**], а также некоторые их свойства. Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство с нормой $|\cdot|$. В пространстве $C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ открыто-компактную топологию можно задать с помощью метрики Бебутова

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{L>0} \min\{\max_{|t|\leq L} |\varphi(t) - \psi(t)|;\ L^{-1}\}.$$

Рассмотрим динамическую систему Бебутова $(C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}), \mathbb{R}, \sigma)$. Будем говорить, что функция $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ обладает свойством A, если этим свойством обладает движение $\sigma(\varphi, \cdot)$ в динамической системе $(C(\mathbb{R},\ \mathfrak{B})$, $\mathbb{R},\ \sigma)$, порожденное функцией φ. В качестве свойства A может быть уст. L^+, р. уст. Л^+, периодичность, почти периодичность, асимптотическая почти периодичность и т. д.

Заметим, что равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\sigma(\varphi, t), \sigma(p, t)) = 0$$

эквивалентно равенству

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t) - p(t)| = 0,$$

где φ, $p \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Из сделанных выше замечаний следует, что функция $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) тогда и только тогда, когда существуют функции p и ω из $C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ такие, что

а. $\varphi(t) = p(t) + \omega(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

б. $\lim\limits_{t\to+\infty} |\omega(t)| = 0$;

в. p постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна).

При этом p называется главной частью φ, а ω – поправкой.

Замечание 1.5.5. *Из следствия* 4 *вытекает, что функции p и ω, фигурирующие в условиях а., б. и в., определяются однозначно, если φ асимптотически почти периодична.*

Из сказанного выше и теорем 1.2.12,1.2.13, 1.2.14, 1.2.15 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.5.28. *Для того чтобы функция $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ была асимптотически постоянной (асимптотически τ-периодической, асимптотически почти периодической) необходимо и достаточно, чтобы функция φ была уст. L^+, множество Σ^+_φ р. уст. $\text{Л}^+\Sigma^+_\varphi$ и ω_φ состояло из* *постоянной функции (траектории τ-периодической функции, замыкания траектории почти периодической функции).*

Теорема 1.5.29. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Функция φ асимптотически почти периодична.*
2) *φ уст. L^+ и Σ_φ^+ р. уст. $Л^+\Sigma_\varphi^+$.*
3) *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$ такие, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого выполнено неравенство $|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$.*
4) *Из любой последовательности $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, можно выделить подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такую, что последовательность $\{\varphi^{(t_{n_k})}\}$, где $(\varphi^{(t_{n_k})}(t) = \varphi(t + t_{n_k})$ при всех $t \in \mathbb{R})$, сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.*

В случае когда $\mathfrak{B}$ конечномерно, то эквивалентность условий 1.,3. и 4. составляет содержание известной теоремы М. Фреше [**51**]. Результаты близкие к теореме 1.5.29 получены в [**1, 57**].

Теорема 1.5.30. *Функция $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ асимптотически τ-периодична (асимптотически постоянна) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\varphi^{(t_n)}\}$ сходится в $C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, где $t_n = n\tau$ ($t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$).*

В работе Селла [**59**] (см. также [**60**]) приведено следующее определение. Функция φ называется асимптотически постоянной (асимптотически τ-периодической, асимптотически почти периодической и т. д.), если φ уст. L^+ и состоит из постоянной функции (траектории τ-периодической функции, замыкания траектории почти периодической функции).

Из теоремы 1.5.30 следует, что всякая асимптотически постоянная (асимптотически τ-периодическая, асимптотически почти периодическая) в смысле Фреше, является соответствующей функцией и в смысле Селла, однако обратное не верно (см. пример 1).

В работе [**65**] приведено следующее определение асимптотической τ-периодичности. Функциию φ называют асимптотически τ-периодической, если

$$\lim_{t \to +\infty} ||\varphi(t+\tau) - \varphi(t)|| = 0. \tag{1.5.79}$$

Нетрудно прверить справкдливость следующего утверждения.

Лемма 12. *Для того чтобы уст. L^+ функция φ удовлетворяла условию (1.5.79) необходимо и достаточно, чтобы ω_φ состояло из τ-периодических функций.*

Из приведенного утверждения следует, что всякая асимптотически τ-периодическая в смысле Селла функция, является и асимптотически τ-периодической в смысле работы [**65**]. Однако легко построить примеры асимптотически периодической в смысле **[65]** функции, которая не является таковой в смысле Селла. Дело здесь в том, что ω_φ может состоят из τ-периодических (например постоянных) функций, но может не быть минимальным множеством.

Динамические системы сдвигов в пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$, $(S,\mathfrak{B};\mu)$ – пространство с мерой и μ – мера Радона, $\mathfrak{B}$ – банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Функцию $f : S \to \mathfrak{B}$ называют **[39]** этажной, если она принимает не более конечного числа различных значений. При этом ее называют измеримой, если $f^{-1}(\{x\}) \in B$ для любого $x \in \mathfrak{B}$, и интегрируемой, если, сверх того, $\mu(f^{-1}(\{x\}) < +\infty$. Тогда определяют

$$\int f d\mu = \sum_{x\in\mathfrak{B}} \mu(f^{-1}(\{x\})x. \tag{1.5.80}$$

Сумма в правой части равенства (1.5.80) конечна по предположению.

Говорят, что функция $f : S \to \mathfrak{B}$ измерима если существует последовательность $\{f_n\}$ этажных измеримых функций таких, что $f_n(s) \to f(s)$ почти всюду по мере μ.

Функция $f : S \to \mathfrak{B}$ называется интегрируемой, если существует последовательность $\{f_n\}$ этажных интегрируемых функций таких, что для любого n функция $\varphi_n(s) = |f_n(s) - f(s)|$ интегрируема и

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n(s) - f(s)| d\mu(s) = 0.$$

Тогда $\int f_n d\mu$ сходится в пространстве $\mathfrak{B}$ и его предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n\}$ с перечисленными выше свойствами. Этот предел обозначают $\int f d\mu$ или $\int f(s)d\mu(s)$.

Пусть $1 \le p \le +\infty$. Через $L^p(S;\mathfrak{B},\mu)$ обозначают пространство всех измеримых функций (классов функций) $f : S \to \mathfrak{B}$ таких, что $|f| \in L^p(S;\mathbb{R};\mu)$, где $|f|(s) = |f(s)|$. Пространство $L^p(S;\mathfrak{B};\mu)$ снабжено нормой

$$||f||_{L^p} = |\int |f(s)|^p d\mu(s)|^{1/p} \quad \text{и} \quad ||f||_\infty = supess|f(s)|. \tag{1.5.81}$$

Пространство $L^p(S;\mathfrak{B};\mu)$ с нормой (1.5.81) является банаховым.

Обозначим через $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ множество всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{B}$ таких, что $f_l \in L^p([-l,l];\mathfrak{B};\mu)$ при любых $l > 0$, где f_l – сужение функции f на $[-l,l]$.

Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{B}$ называют разложимой, если для произвольного $s \in \mathbb{R}$ $f(s) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(s) g_i$, где $g_i \in \mathfrak{B}$ и а φ_i – скалярная непрерывная функция с компактным носителем ($i = 1,2,\dots,N$).

Лемма 13. **[39]** *Имеют место утверждения.*

1) *Всякая непрерывная функция $f : S \to \mathfrak{B}$ с компактным носителем интегрируема.*

2) *В пространстве $L^p(\mathbb{R};\mu;\mathfrak{B})$ множество этажных функций с компактным носителем или множество непрерывных разложимых функции с компактным носителем плотны.*

В пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ определим семейство полунорм $||\cdot||_{l,p}$ по следующему правилу:

$$||f||_{l,p} = ||f_l||_{L^p([-l,l];\mathfrak{B};\mu)} \quad (l>0). \tag{1.5.82}$$

Семейство полунорм (1.5.82) определяет метризуемую топологию на L^p_{loc} $(\mathbb{R};\ \mathfrak{B};\ \mu)$. Метрика, задающая эту топологию, может быть определена, например, равенством

$$d_p(\varphi,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{||\varphi-\psi||_{n,p}}{1+||\varphi-\psi||_{n,p}}. \tag{1.5.83}$$

Определим отображение $\sigma : L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)\times\mathbb{R} \to L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ следующим образом: $\sigma(f,\tau) = f^{(\tau)}$ при любых $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ и $\tau\in\mathbb{R}$, где $f^{(\tau)}(s) = f(s+\tau)$ $(s\in\mathbb{R})$.

Лемма 14. $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$ – *динамическая система.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность отображения σ. Пусть $f_n\to f$ в пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ и $t_n\to t$. Покажем, что $\sigma(f_n,t_n)\to\sigma(f,t)$, когда $n\to+\infty$, т.е.

$$\left[\int_{|t|\le l} |f_n(t_n+s)-f(t+s)|^p d\mu(s)\right]^{1/p} \to 0, \tag{1.5.84}$$

когда $n\to+\infty$ при каждом $l>0$.

Заметим, что

$$\begin{gathered}\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f_n(t_n+s)-f(t+s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le \\ \Big[\int\limits_{|t|\le l}|f_n(t_n+s)-f(t_n+s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} + \\ \Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t_n+s)-f(s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}}.\end{gathered} \tag{1.5.85}$$

Кроме того, так как $t_n\to t$, то существует $l_0>0$ такое, что $|t_n|\le|t|+l_0$ и $|t_n+s|\le|t_n|+|s|\le|t|+l_0+l = L$ при всех $n=1,2,3,\ldots$, и, следовательно,

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f_n(t_n+s)-f(t_n+s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le \tag{1.5.86}$$

$$\le \Big[\int\limits_{|t|\le L}|f_n(t)-f(t)|^p d\mu(t)\Big]^{\frac{1}{p}} \to 0 \tag{1.5.87}$$

при $n\to+\infty$, ибо $f_n\to f$ в $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$.

Для оценки второго интеграла в правой части неравенства (1.5.85) воспользуемся леммой 13. Пусть $\varepsilon > 0$ и $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{B}$ – непрерывная функция с компактным носителем такая, что

$$\Big[\int\limits_{|S|\le l+l_0} |g(s)-f(s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon. \Big[\int\limits_{|S|\le l+l_0} |g(s)-f(s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon.$$

Тогда

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le \Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-g(t+t_n)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-g(t+t_n)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} +$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} +$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le \Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$2\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(s)-g(s)|^p ds\Big]^{\frac{1}{p}} + 2\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(s)-g(s)|^p ds\Big]^{\frac{1}{p}} +$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le \Big[\int\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$2\varepsilon + \max_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)| \cdot 2l$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le 2\varepsilon |f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le 2\varepsilon$$

(так как $\max\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)| \to 0$, когда $n \to +\infty$). В силу произвольности ε из последнего соотношения получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} = 0 \tag{1.5.88}$$

Из (1.5.85) – (1.5.88) и следует непрерывность отображения σ. Лемма доказана. □

Асимптотически почти периодические функции Степанова. Пусть $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Будем говорить, что функция φ S^p-почти периодична (почти периодична по Степанову **[15]**), если движение $\sigma(\varphi,\cdot)$ почти периодично в динамической системе $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$. Аналогично определяется асимптотическая S^p-почти периодичность функции.

Теорема 1.5.31. *Пусть $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *φ S^p-почти периодична.*
2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $l > 0$ такое, что на любом отрезке длины l в $\mathbb{R}$ найдется число τ, для которого*
$$\int\limits_t^{t+1} |\varphi(s+\tau)-\varphi(s)|^p ds < \varepsilon^p$$
при всех $t \in \mathbb{R}$.
3) *φ уст. L и Σ_φ р. уст. $Л^+\Sigma_\varphi$ в динамической системе $(L^p_{loc}$ $(\mathbb{R};$ $\mathfrak{B};$ $\mu),\mathbb{R},$ $\sigma)$.*
4) *Из произвольной последовательности $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ можно извлечь подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что последовательность $\{\varphi^{(t_{k_n})}\}$ сходится равномерно в пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$, т.е. существует функция $\tilde{\varphi} \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ такая, что*
$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1} |\varphi(s+t_{k_n})-\tilde{\varphi}|^p ds = 0.$$

Замечание 1.5.6. *В случае конечномерности пространства $\mathfrak{B}$ устойчивость по Лагранжу функции $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ эквивалентна следующим двум условиям:*

1) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |\varphi(s)|^p ds < +\infty$ *и*
2)
$$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1} |\varphi(s)|^p ds < +\infty$$
и
$$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1} |\varphi(s+h)-\varphi(s)|^p ds = 0.$$

Теорема 1.5.32. *Пусть $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *Функция φ является асимптотически S^p-почти периодической, т.е. движение $\sigma(\varphi,\cdot)$ асимптотически почти периодично в динамической системе $(L^p_{loc}(\mathbb{R};$ $\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$.*

2) *Существуют* S^p*-почти периодическая функция* p *и функция* $\omega \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ *такие, что* $p \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$, $\varphi = p + \omega$ *и* $\lim\limits_{t+\infty} \int\limits_t^{t+1} |\omega(s)|^p ds = 0$.
3) *Функция* φ *уст.* L^+ *и* Σ^+_φ *р. уст.* $Л^+\Sigma^+_\varphi$ *в динамической системе* $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$.
4) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $\beta \geq 0$ *и* $l > 0$ *такие, что на любом отрезке длины* l *найдется число* τ*, для которого*
$$\int\limits_t^{t+1} |\varphi(\tau + s) - \varphi(s)|^p ds < \varepsilon^p$$
при всех $t \geq \beta$ *и* $t + \tau \geq \beta$.
5) *Из любой последовательности* $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$*, можно выделить подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что последовательность* $\{\varphi^{(t_{k_n})}\}$ *сходится равномерно по* $t \in \mathbb{R}_+$ *в пространстве* L^p_{loc} $(\mathbb{R};\ \mathfrak{B};\ \mu)$*, т.е. существует функция* $\tilde{\varphi} \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ *такая, что*
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int\limits_t^{t+1} |\varphi(s + t_{k_n}) - \tilde{\varphi}(s)|^p ds = 0.$$

Глава 2

Асимптотически устойчивые по Пуассону решения дифференциальных уравнений

2.1. Некоторые неавтономные дифференциальные уравнения и связанные с ними расширения динамических систем

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t,x) \tag{2.1.89}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^m)$ и W открытое множество из E^m. Обозначим через $Y = C(\mathbb{R} \times W, E^m)$ и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическую систему сдвигов на Y. Через X обозначим множество всех пар (φ, f) из $C(\mathbb{R}, E^m) \times C(\mathbb{R} \times W, E^m)$ таких, что φ является решением уравнения (2.1.89). Очевидно X инвариантно относительно сдвигов. Из леммы 3.1.1 из **[41]** следует, что X замкнуто в $C(\mathbb{R}, E^m) \times C(\mathbb{R} \times W, E^m)$. Определим на X динамическую систему $(X, \mathbb{R}, \pi)$, пологая $\pi((\varphi, f), \tau) = (\varphi^\tau, f^\tau)$. Легко проверить что отображнние $h : X \mapsto Y$ определенное равенством

$$h(\varphi, f) = f \tag{2.1.90}$$

является гомоморфизмом динамической системы $(X, \mathbb{R}, \pi)$ в $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно, $(X, \mathbb{R}, \pi)$ есть расширение $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ при гомоморфизме h.

Уравнение (2.1.90) будем называть операторным уравнением порожденным дифференциальным уравнением (2.1.89).

Пример 3. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^m)$ решение уравнения (2.1.89). Обозначим через $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R})}$, $f_Q = f\big|_{\mathbb{R}\times Q}$ и $\Sigma_{f_Q} = \overline{\sigma(f_Q, \mathbb{R})}$, где $\sigma(f_Q, t)$ движение, порожденное функцией $f_Q \in C(\mathbb{R} \times Q, E^m)$ в динамической системе $(C(\mathbb{R} \times Q, E^m), \mathbb{R}, \sigma)$. Положим $Y = \Sigma_{f_Q}$ и $Y = \Sigma_{(\varphi, f_Q)}$, где $\Sigma_{(\varphi, f_Q)}$ замыкание траектории движения порожденного парой (φ, f_Q) в прямом произведении динамических систем $(C(\mathbb{R}, E^m), \mathbb{R}, \sigma$ и $(C(\mathbb{R} \times Q, E^m), \mathbb{R}, \sigma$. Определим отображение h равенством

$$h(\psi, g) = g$$

при всех $(\psi, g) \in Y$. Как и выше легко убедится, что h является гомоморфизмом динамической системы $(X, \mathbb{R}, \pi)$ в $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$.

Обозначим через $Y = S^p(\mathbb{R}\times W, E^m)$ и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическую систему сдвигов на Y и X множество всех пар (φ, f) из $C(\mathbb{R}, E^m) \times S^p(\mathbb{R} \times W, E^m)$ таких, что φ является решением уравнения (2.1.89). Очевидно X

инвариантно относительно сдвигов. Ниже будет показано, что X замкнуто в $C(\mathbb{R}, E^m) \times S^p(\mathbb{R} \times W, E^m)$. Дальше рассуждая также, как в первом случае получим операторное уравнение (2.1.90) порожденное дифференциальным уранением (2.1.89) .

Положим $C(\mathbb{R}, Q) = \{\varphi : \ \varphi \in C(\mathbb{R}, E^m), \ \overline{\varphi(\mathbb{R})} \subseteq Q\}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 15. *Пусть Q – компакт из E^n, $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots$ – возрастающая последовательность промежутков в $\mathbb{R}$, для которой $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m = \mathbb{R}$ и $\varphi_m \in C(\mathbb{R}, Q)$ $(m \in \mathbb{N})$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ в $L^p_{loc}(S_m \times E^n, E^n)$ существует функция f_m, что сужение на S_m функции φ_m есть решение дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f_m(t, x) \tag{2.1.91}$$

2) *Для любого отрезка $S \subseteq \mathbb{R}$ и любого ε существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $S \subseteq S_m$ и*

$$\int\limits_{(S)} \max_{x \in Q} |f_m(t, x) - f(t, x)| dt < \varepsilon$$

при всех натуральных $m \geq n_0$.

Тогда:

1) *Множество функций $\Phi = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ компактно в $C(\mathbb{R}, Q)$.*
2) *Предел всякой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{\varphi_n\}$ есть Q-компактное решение уравнения* (2.1.91), *определенное на всей прямой $\mathbb{R}$.*
3) *Если действительное число $t_0 \in \mathbb{R}$ таково, что последовательность $\{\varphi_n(t_0)\}$ точек пространства E^n сходится к некоторой точке $x_0 \in Q$, а φ – единственное непродолжаемое решение уравнения* (2.1.89), *удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$, то φ есть Q-компактное решение, определенное на всей прямой $\mathbb{R}$, а последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в пространстве $C(\mathbb{R}, Q)$.*

Доказательство. Сформулированная лемма является обобщением леммы 3.1.5 из [**41**] и доказывается по той же схеме что и упомянутая лемма, поэтому мы ее доказательство опустим. □

Более подробно о связи расширений динамических систем с дифференциальными уравнениями можно найти в работе [**3**].

2.2. Согласованные в пределе решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим вопрос о зависимости свойства возвращаемости в пределе решений дифференциальных уравнений от соответствующего свойства правых частей уравнений.

Хорошо известно [**41**], что если правая часть дифференциального уравнения является устойчивой по Пуассону (периодической, почти периодической, рекуррентной) по времени функцией, то среди ограниченных решений этого уравнения, при определенных условиях, существует решение, согласованное по возвращаемости с правой частью.

Таким образом наблюдается весьма общая и глубокая зависимость, в силу которой характер возвращаемости решений дифференциальных уравнений согласован с возвращаемостью правой части уравнения.

Приводимые ниже результаты показывают, что аналогичная зависимость возвращаемости в пределе правой части решений дифференциальных уравнений, имеет место и в случае когда правая часть асимптотически устойчива по Пуассону.

Решение φ уравнения (2.1.89) назовем согласованным в пределе, если оно сравнимо в пределе (в положительном направлении) с функцией $f_Q = f\Big|_{\mathbb{R}\times Q}$, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, т.е. движение $\sigma(\varphi,\cdot)$, порождчнное функцией φ в динамической системе $(C(\mathbb{R}_+, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma)$, сравнимо в пределе с движением $\sigma(f_Q,\cdot)$, порождчнным функцией f_Q в динамической системе $(C(\mathbb{R}\times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$.

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ назовчм ограниченной на $S \subseteq \mathbb{R}$, если множество $\overline{\varphi(S)} \subset E^n$ ограничено.

Теорема 2.2.33. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ согласованное в пределе решение уравнения* (2.1.89) *и $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Тогда:*

1) *Если правая часть f уравнения* (2.1.89) *асимптотически рекуррентна по переменной $t \in R$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически рекуррентно.*
2) *Если правая часть f асимптотически почти периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически почти периодично.*
3) *Если f асимптотически τ-периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически τ-периодично.*
4) *Если f асимптотически постоянна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически постоянно.*

Доказательство. Справедливость сформулированного утверждения вытекает из соответствующих определений, леммы 3.1.1 из [**41**] и теоремы 1.3.20, примененной к неавтономной динамической системе из примера 3. □

Наряду с уравнением (2.1.89) рассмотрим семейство "ω-предельных" уравнений

$$\frac{dv}{dt} = g(t,v), \qquad (g \in \omega_f), \tag{2.2.92}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ и ω_f – ω-предельное множество функции f в динамической системе $(C(\mathbb{R} \times W, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$.

Теорема 2.2.34. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.1.89) *и $f_Q = f\Big|_{\mathbb{R}\times Q}$ уст. L^+, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если каждое уравнение семейства* (2.2.92) *допускает не более одного решения из ω_φ, то φ согласовано в пределе.*

Доказательство. Так как f_Q уст. L^+, то согласно лемме 3.1.1 из [**41**] решение φ уст. L^+. Пусть $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \big\rangle$ – неавтономная динамическая система, построенная в примере 3. Рассмотрим операторное уравнение

$$h(\psi, f_Q) = f_Q. \tag{2.2.93}$$

Наряду с уравнением (2.2.93) рассмотрим семейство уравнений

$$h(\psi, g_Q) = g_Q \qquad (g_Q \in \omega_{f_Q}). \tag{2.2.94}$$

Из вышесказанного следует, что точка $(\varphi, f_Q) \in X$ уст. L_+. Каждое уравнение семейства (2.2.94), согласно условию теоремы, имеет не более одного решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$. Из теоремы 1.4.21 следует, что $\mathfrak{L}^{+\infty}_{f_Q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{(\varphi, f_Q)}$. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что

$$\mathfrak{L}^{+\infty}_{(\varphi, f_Q)} = \mathfrak{L}^{+\infty}_{\varphi} \cap \mathfrak{L}^{+\infty}_{f_Q}$$

и, следовательно, $\mathfrak{L}^{+\infty}_{f_Q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{\varphi}$. теорема доказана. □

Отметим, что всякая теорема о согласованности в пределе решения уравнения (2.1.89) в сочетании с теоремой 2.2.33 дачт различные признаки существования асимптотически постоянных (асимптотически периодических, асимптотически почти периодических, асимптотически рекуррентных) решений уравнения (2.1.89).

Например, из теоремы 2.2.34 вытекает

Следствие 11. *Пусть f асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентна) по переменной $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ и φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.1.89). *Если каждое уравнение семейства* (2.2.92) *допускает не более одного решения из ω_φ, то φ асимптотически постоянно (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Следствие 12. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.1.89) *и $f \in C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R})$ $(W \subseteq \mathbb{R})$ асимптотически рекуррентна* *по $t \in \mathbb{R}$ равномерно относительно $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если некоторая функция g_Q из ω_{f_Q} ($f_Q = f \big|_{\mathbb{R}\times Q}$) строго монотонна по x равномерно по t, то φ согласовано в пределе в положительном направлении.*

Доказательство. Из асимптотической рекуррентности f и строгой монотонности $g_Q \in \omega_{f_Q}$ следует, что каждая функция из ω_{f_Q} обладает свойством строгой монотонности по $x \in Q$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$. Согласно [**42**] каждое уравнение семейства (2.2.94) допускает не более одного решения из ω_φ и по теореме 2.2.34 φ согласовано в пределе. □

Следствие 13. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.1.89) *и $f \in C(\mathbb{R}\times W, \mathbb{R})$ асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно относительно $x \in Q$. Если некоторая функция $g_Q \in \omega_{f_Q}$ строго монотонна по $x \in Q$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$, то φ асимптотически постоянно (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Заметим, что если f асимптотически почти периодична, то следствие 13 усиливает результат работы [**52**].

Обозначим через $[E^n]$ множество всех квадратных $n \times n$-матриц A с нормой $||A||$, $C(\mathbb{R}, [E^n])$ – пространство всех непрерывных матриц-функций $A : \mathbb{R} \to [E^n]$ с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R}$ и $C_b(\mathbb{S}, E^n)$ – банахово пространство всех непрерывных и ограниченных функций $\varphi : \mathbb{S} \to E^n$ ($\mathbb{S} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$) с нормой $||\varphi|| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in \mathbb{S}\}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.2.95}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$. Наряду с уравнением (2.2.95) рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \tag{2.2.96}$$

где $f \in C(\mathbb{S}, E^n)$, и семейство "ω-предельных"уравнений

$$\frac{dz}{dt} = B(t)z \qquad (B \in \omega_A). \tag{2.2.97}$$

Теорема 2.2.35. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.2.96)*, матрица $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и функция f уст. L^+. Если каждое уравнение семейства* (2.2.97) *не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то φ согласовано в пределе.*

Доказательство. Наряду с уравнением (2.2.96) рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dv}{dt} = B(t)v + g \qquad ((B, g) \in \omega_{(A,f)}). \tag{2.2.98}$$

Покажем, что каждое уравнение семейства (2.2.98) не имеет более одного решения из ω_φ. Допустим противное. Тогда существуют $(B,g)\in\omega_{(A,f)}$ и $\psi_1,\psi_2\in\omega_\varphi$, являющиеся решениями уравнения (2.2.98). Заметим, что $\psi=\psi_1-\psi_2\not\equiv 0$ есть ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (2.2.97). Последнее противоречит условию теоремы. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 2.2.34 и, следовательно, φ согласовано в пределе. $\square$

Следствие 14. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.2.96)*, матрица A и функция f совместно асимптотически постоянны* (*асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны*)*. Если каждое уравнение семейства* (2.2.97) *не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то φ асимптотически постоянно* (*асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

В случае, когда A и f асимптотически почти периодичны следствие 14 является обобщением на случай асимптотической почти периодичности известной теоремы Фавара [**7**].

Говорят [**6**], что уравнение (2.2.95) гиперболично (удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии) на $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{R}$, если существуют пара взаимно дополнительных проекторов $P(A)$ и $Q(A)$ и действительные числа N, $\gamma>0$ такие, что выполнены неравенства

$$||U(t,A)P(A)U^{-1}(\tau,A)||\le Ne^{-\nu(t-\tau)}\qquad (t,\tau\in\mathbb{S},\ t\ge\tau) \tag{2.2.99}$$

и

$$||U(t,A)Q(A)U^{-1}(\tau,A)||\le Ne^{-\nu(t-\tau)}\qquad (t,\tau\in\mathbb{S},\ t\le\tau), \tag{2.2.100}$$

где $U(t,A)$ – матрица Коши для уравнения (2.2.95).

Пусть $A\in C(\mathbb{R};[E^n])$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x. \tag{2.2.101}$$

Обозначим через $U(t,A)$ оператор Коши уравнения (2.2.95) и

$$\varphi(t,A,x)=U(t,A)x.$$

Лемма 16. *Функция $U(t,A)$ непрерывна по $A\in C(\mathbb{R};[E^n])$ равномерно по t на компактных подмножествах из $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}\subseteq\mathbb{C}(\mathbb{R};[E^n])$, $A_n\to A$ равномерно на компактных подмножествах из $\mathbb{R}$ и $l>0$. Тогда существует число $M(l)>0$ такое что

$$\max_{|t|\le l}\|A_n(t)\|\le M(l)\ \ (n\in N).$$

Так как $U(t,A_n)$ является решением системы

$$\begin{cases}\dot U(t,A_n)=A_n(t)U(t,A_n),\\ U(0,A_n)=E,\end{cases}$$

из $\|U(t,A)\| \le \exp\{\int_{t_0}^t \|A(t)\| ds\}$ следует что

$$\max_{|t|\le l} ||U(t,A_n)|| \le e^{2lM(l)}\,(n\in\mathbb{N}). \tag{2.2.102}$$

Положим теперь

$$V_n(t) := U(t,A) - U(t,A_n)$$

и заметим, что $V_n(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} V_n'(t) = A(t)V_n(t) + [A(t) - A_n(t)]U(t,A_n), \\ V_n(0) = 0, \end{cases}$$

поэтому

$$V_n(t) = U(t,A)\int_0^t U^{-1}(\tau,A)[A(\tau) - A_n(\tau)]U(\tau,A_n)d\tau. \tag{2.2.103}$$

Пусть

$$K(l) := \max_{|t|\le l}\{||U(t,A)||,\ ||U^{-1}(t,A)||\}.$$

Из (2.2.102) и (2.2.103) следует неравенство

$$\max_{|t|\le l} ||V_n(t)|| \le K^2(l)2le^{2lM(l)} \max_{|t|\le l} ||A(t) - A_n(t)||. \tag{2.2.104}$$

Переходя к пределу в (2.2.104) когда $n\to+\infty$ мы получим

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{|t|\le l} ||U(t,A) - U(t,A_n)|| = 0.$$

Лемма доказана. □

Следствие 15. *Для каждого $t\in\mathbb{R}$ отображение*

$$U_t : C(\mathbb{R};[E^n]) \to [E^n]$$

определенное равенством $U_t(A) := U(t,A)$ непрерыно.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 17. *Если уравнение* (2.2.95) *гипреболично на $\mathbb{R}_+$, то каждое уравнение* (2.2.97) *гиперболично на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $B\in\omega_A$. Тогда существует $t_n\to+\infty$ такая что $B = \lim_{n\to+\infty} A^{(t_n)}$. Положим

$$P(A^{(t_n)}) = U(t_n,A)P(A)U^{-1}(t_n,A)$$

и

$$Q(A^{(t_n)}) = U(t_n,A)Q(A)U^{-1}(t_n,A),$$

где $P(A)$ и $Q(A)$ есть пара взаимно дополнительных проекторов из определения экспоненциальной дихотомии. Проекторы $\{P(A^{(t_n)})\}$ и $\{Q(A^{(t_n)})\}$ равномерно ограничены и, следовательно, они могут считаться сходящимися. Положим

$$P(B) := \lim_{n\to+\infty} P(A^{(t_n)}) \quad \text{и} \quad Q(B) := \lim_{n\to+\infty} Q(A^{(t_n)}).$$

Заметим что

$$P^2(A^{(t_n)}) = P(A^{(t_n)}) \tag{2.2.105}$$

и

$$P(A^{(t_n)}) + Q(A^{(t_n)}) = E. \tag{2.2.106}$$

Переходя к пределу в (2.2.105) когда $t \to +\infty$ мы получим $P^2(B) = P(B)$. Аналогичным образом показывается что $Q^2(B) = Q(B)$. Нконец, переходя к пределу в (2.2.106) получим: $P(B)+Q(B) = E$. Таким образом $P(B)$ и $Q(B)$ пара взаимно дополнительных поекторов. Покажем, что их можно взять в качестве проекторов в определении э. д. на $\mathbb{R}$ уравнения (2.2.97). Действительно, пусть $t \geq \tau$ и $t, \tau \in \mathbb{R}$. Тогда для достаточно больших t_n числа t и τ принадлежат интервалу $(-t_n, +\infty)$. Из равенства

$$U(t, A^{(t_n)})P(A^{(t_n})U^{-1}(\tau, A^{(t_n)} =$$
$$U(t + t_n, A)P(A)U^{-1}(\tau + t_n, A)$$

и неравенства (2.2.99), учитывая выше сказанное и лемму 16, получим неравенство

$$||U(t, B)P(B)U^{-1}(\tau, B)|| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)}.$$

Аналогично доказывается что

$$||U(t, B)Q(B)U^{-1}(\tau, B)|| \leq Ne^{\nu(t-\tau)}$$

при всех $t \leq \tau$ и $t, \tau \in \mathbb{R}$. Лемма доказана. □

Следствие 16. *Пусть уравнение* (2.2.95) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$ *и* $B \in \omega_A$. *Тогда уравнение* (2.2.97) *не имеет ненулевых ограниченных на* $\mathbb{R}$ *решений.*

Теорема 2.2.36. *Пусть* A *и* f *уст.* L^+. *Если уравнение* (2.2.95) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$, *то*

1) *Неоднородное уравнение* (2.2.96) *имеет по крайнем мере одно ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение* φ. *Это решение дачтся формулой*

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} G(t, \tau)f(\tau)d\tau, \tag{2.2.107}$$

где $G(t, \tau)$ *– главная функция Грина* [**6**] *для* (2.2.95).

2) *Всякое ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (2.2.96) *согласовано в пределе.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из [**6**]. Докажем второе утверждение. По лемме 17 и следствию 16 каждое уравнение (2.2.97) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Согласно теореме 2.2.35 каждое ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (2.2.95) согласовано в пределе. □

Заметим, что теоремы 2.2.35 и 2.2.36 дают достаточные условия согласованности в пределе ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений уравнения (2.2.96). Однако, между этими теоремами есть существенная разница (на первый взгляд). Первая из теорем утверждает, что, если существует ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение, то оно согласовано в пределе. Причем априори неизвестно будет ли в условиях теоремы 2.2.35 существовать по крайнем мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение. Вторая же теорема утверждает, что при выполнении перечисленных в ней условий, всегда найдется по крайней мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение, а в остальном их заключения совпадают.

В связи со сказанным выше возникают следующие вопросы:

1. Будет ли в условиях теоремы 2.2.35 существовать хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение у уравнения (2.2.96) ?
2. Из доказательства теоремы 2.2.36 следует, что если уравнение (2.2.96) удовлетворяет условию условию э.д. на $\mathbb{R}_+$, то каждое уравнение семейства (2.2.97) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Верно ли обратное утверждение ?

Понятно, что если верно 2., то верно и 1. Этим и некоторым другим вопросам посвящен следующий параграф.

2.3. Линейные дифференциальные уравнения удовлетворяющие условию экспоненциальной дихотомии на полуоси

В этом параграфе изучаются некоторые свойства линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие условию э. д. на $\mathbb{R}_+$.

Теорема 2.3.37. *Если A устойчива по Пуассону в положительном направлении, то уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда когда оно удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Пусть уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}_+$. Тогда, согласно лемме 17 каждое уравнение семейства (2.2.97) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$. Так как A устойчива по Пуассону в положительном направлении, то $A \in \omega_A$ и, следовательно, уравнеие (2.2.95) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$. Теорема доказана. □

Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ пара подпространств из $C_b(S, E^m)$. Следуя [], уравнение (2.2.95) назовем допустимым (регулярным), если для каждого $f \in \mathfrak{B}$ уравнение (2.2.96) имеет по крайней мере одно (ровно одно) решение $\varphi \in \mathfrak{D}$.

Говорят [**6**], что матрица $A \in C(\mathbb{R}, LE^m)$ интегрально ограничена, если

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} ||A(s)||ds < +\infty.$$

Теорема 2.3.38. *Пусть A устойчива по Пуассону в положительном направлении и интегрально ограничена. Тогда уравнение (2.2.95) является $(C_b(\mathbb{R}, E^m), C_b(\mathbb{R}, E^m))$ регулярным в том и только том случае, когда оно $(C_b(\mathbb{R}, E^m), C_b(\mathbb{R}, E^m))$ допустимо.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна. Пусть уравнение (2.2.95) $(C_b(\mathbb{R}, E^m), C_b(\mathbb{R}, E^m))$ допустимо. Тогда нетрудно заметить, что оно будет и $(C_b(\mathbb{R}_+, E^m), C_b(\mathbb{R}_+, E^m))$ допустимым и, следовательно (см. теорему 3.3 [**6**]), удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}_+$. По теореме 2.3.37 уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$ и, следовательно (см. теорему 3.2 [**6**]), $(C_b(\mathbb{R}, E^m), C_b(\mathbb{R}, E^m))$ регулчрно. Теорема доказана. □

Близкий к теореме 2.3.38 результат получен в [**10**]. В случае почти периодичности матрицы A, теорема 2.3.38 была доказана в работе [**13**]. Отметим что, даже в случае почти периодичности, наше доказательство проще.

Лемма 18. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}; [E^n])$ уст. L^+ (соответственно, L^-) и уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+ (соответственно, Φ^-). Тогда, если $\varphi(t, A, x)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$ (соответственно, $\mathbb{R}_-$), тогда*

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t, A, x)| = 0 \quad (\textit{respectively}, \ \lim_{t\to-\infty} |\varphi(t, A, x)| = 0).$$

Доказательство. Допустим противное, т.е. что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $t_k \to +\infty$ такие что $|\varphi(t_k, A, x)| \geq \varepsilon_0$. Не умаляя общности рассуждений мы можем считать что последовательности $\{\varphi(t_k, A, x)\}$ и $\{A^{(t_k)}\}$ сходятся в E^n и $C(\mathbb{R}; [E^n])$ соответственно. Пусть

$$x_0 = \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, A, x) \ \text{ и } \ B = \lim_{k\to+\infty} A^{(t_k)}.$$

Тогда согласно лемме 16, $\varphi(t, B, x_0) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(t+t_k, A, x)$ является нетривиальным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнеия (2.2.97) и $B \in \omega_A$. Последнее противоречит условию леммы 18. Второй случай рассматривается аналогично. □

Лемма 19. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}; [E^n])$ уст. L^+ и пусть уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+. Если $\varphi(t, A, x)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t, A, x)| = +\infty$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. для некоторого $L > 0$ существует последовательность $\{s_k\}$, $\{t_k\}$, и $\{l_k\}$ удовлетворяющих следующим условиям:

1) $s_k < t_k < l_k < s_{k+1}$;
2) $\{s_k\} \to +\infty$ as $k \to +\infty$:
3) $|\varphi(\tau, A, x)| > L$ for all $\tau \in (s_k, l_k)$;
4) $|\varphi(s_k, A, x)| = |\varphi(l_k, A, x)| = L$;
5) $|\varphi(t_k, A, x)| = \max\{|\varphi(t, A, x)| : t \in [s_k, l_k]\}$.

Положим

$$x_k := \frac{\varphi(t_k, A, x)}{|\varphi(t_k, A, x)|} = |\varphi(t_k, A, x)|^{-1} \cdot \varphi(t_k, A, x).$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

a) $|x_k| = 1$;

b) $|\varphi(t, A^{(t_k)}, x_k)| = |\varphi(t_k, A, x)|^{-1} \cdot |\varphi(t + t_k, A, x)| \leq 1$

для любых $t \in [s_k - t_k, l_k - t_k]$. Покажем что

$$\{s_k - t_k\} \to -\infty \ (\{l_k - t_k\} \to +\infty).$$

Действительно, в условиях леммы 19 последовательности $\{A^{(t_k)}\}$ и $\{x_k\}$ момно считать сходящимися. Положим

$$x_0 = \lim_{k \to +\infty} x_k \ \text{ и } \ B := \lim_{k \to +\infty} A^{(t_k)}.$$

Если мы допустим что $\{s_k - t_k\} \not\to -\infty$, тогда мы можем считать ее сходящейся. Пусть $\tau_0 := \lim\limits_{k \to +\infty} \{s_k - t_k\}$. Переходя к пределу в равенстве

$$|\varphi(s_k - t_k, A^{(t_k)}, x_k)| = |\varphi(t_k, A, x)|^{-1} \cdot |\varphi(s_k, A, x)| = L|\varphi(t_k, A, x)|^{-1},$$

мы получим $\varphi(\tau_0, B, x_0) = 0$. Из последнего равенства следует что $x_0 = 0$. Последнее противоречит условию a). Аналогично доказывается что $\{l_k - t_k\} \to +\infty$. Из выше сказанного и условия b) следует что $|\varphi(t, B, x_0)| \leq 1$ имеет место при любом $t \in \mathbb{R}$, и $|x_0| = 1$. Таким образом, $\varphi(t, B, x_0)$ есть неривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (2.2.97). Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 20. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}; [E^n])$ уст. L^+ и уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+. Если решение $\varphi(t, A, x)$ неограничено на $\mathbb{R}_+$, тогда существует $c > 0$ такое что*

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} |\varphi(t, A, x)| \leq c|\varphi(\tau, A, x)|$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $L_k \geq k$ такое что

$$\max_{0 \leq t \leq L_k} |\varphi(t, A, x)| \geq k|\varphi(L_k, A, x)|. \tag{2.3.108}$$

Выберем $\tau_k \in [0, L_k]$ таким образом чтобы имело место равенство

$$|\varphi(\tau_k, A, x)| = \max_{0 \leq t \leq L_k} |\varphi(t, A, x)|.$$

Тогда равенство (2.3.108) примет следующий вид

$$|\varphi(\tau_k, A, x)| \geq k|\varphi(L_k, A, x)|.$$

Положим

$$x_k := \frac{\varphi(\tau_k, A, x)}{|\varphi(\tau_k, A, x)|} = |\varphi(\tau_k, A, x)|^{-1} \cdot \varphi(\tau_k, A, x).$$

Тогда

$$|x_k| = 1 \quad \text{and} \quad |\varphi(t, A^{(\tau_k)}, x_k)| = |\varphi(\tau_k, A, x)|^{-1} \cdot |\varphi(t + \tau_k, A, x)|$$

для любых $t \in [\tau_k, L_k - \tau_k]$. Рассуждая также как и в лемме 19 и принимая во внимание соотношения

a) $|\varphi(L_k - \tau_k, A^{(\tau_k)}, x_k)| = |\varphi(\tau_k, A, x)|^{-1} \cdot |\varphi(L_k, A, x)| \leq k^{-1}$

и

b) $|\varphi(-\tau_k, A^{(\tau_k)}, x)| = |\varphi(\tau_k, A, x)|^{-1} \cdot |x|$,

мы получим $\{\tau_k\} \to +\infty$ и $\{L_k - \tau_k\} \to +\infty$. Не умаляя общности рассуждений мы можем считать что последовательность $\{A^{(\tau_k)}\}$ и $\{x_k\}$ являются сходящимися. Пусть $x_0 := \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ и $B := \lim\limits_{k\to+\infty} A^{(\tau_k)}$. Ясно что $B \in \omega_A$, $|x_0| = 1$ и $|\varphi(t, B, x_0)| \leq 1$ для любых $t \in \mathbb{R}$. Последнее противоречит условию леммы. $\square$

Ниже мы предположим что пространство E^n одномерно ($n = 1$ и $E^n = \mathbb{R}$), т. е. $A = a \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Лемма 21. *Пусть $a \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ уст. L^+. Если уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+ и решения $\varphi(t, a, x)$ уравнения (2.2.95) когда $x \neq 0$ неограничены при $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда решения каждлго уравнения (2.2.97) с $B = b \in \omega_a$ ограничены на $\mathbb{R}_-$.*

Доказательство. Пусть $b \in \omega_a$. Тогда существует $t_k \to +\infty$ такое что $b = \lim\limits_{k\to+\infty} a^{(t_k)}$. Определим последовательность

$$x_k := \frac{\varphi(t_k, a, x)}{\alpha_k},$$

где $\alpha_k := \max\{\varphi(t, a, x) : t \in [0, t_k]\}$. Для нее выполняются следующие условия:

1) $|x_k| = 1$;
2) $|\varphi(t, a^{(t_k)}, x_k)| = \alpha_k^{-1} |\varphi(t + t_k, a, x)| \leq 1$

для любых $t \in [-t_k, 0]$. Согласно 1) последовательность $\{x_k\}$ можно считать сходящейся. Пусть $x_0 := \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$. Переходя к пределу в равенстве 2) мы получим $|\varphi(t, b, x_0)| \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}_-$. В этом случае согласно лемме 20, $|x_k| \geq c^{-1} > 0$ и, следовательно, $|x_0| \geq c^{-1} > 0$. Для завершения доказательства леммы достаточно использовать тот факт что (2.2.97) линейное однородное скалярное уравнение. $\square$

Лемма 22. *Пусть a уст. L^+ и уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+. Если все решения уравнения (2.2.95) ограничены на $\mathbb{R}_+$, тогда существуют числа $N, \nu > 0$ такие что*

$$|\varphi(t, b, x)| \leq N\, e^{-\nu t} |x|$$

для любых $x \in \mathbb{R}$, $b \in H^+(a)$ и $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Сформулированное утверждение может быть доказано используя те же соображения что и работе [**62**]. □

Лемма 23. *Пусть a уст. L^+ и уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+. Тогда уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Логически возможны два случая:

a) все решения уравнения (2.2.95) ограничены на $\mathbb{R}_+$ и тогда лемма 23 вытекает из леммы 22;

b) все решения уравнения (2.2.95) неограничена на $\mathbb{R}_+$. Согласно лемме 19 когда $x \neq 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, a, x)| = +\infty$$

и, следовательно, в уравнении (2.2.95) мы можем сделать подстановку: $y = 1/x$. Тогда мы получим

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)y. \tag{2.3.109}$$

Наряду с уравнением (2.3.109) мы рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\tilde{b}(t)x \quad (\tilde{b} \in \omega_{(-a)}). \tag{2.3.110}$$

Покажем что (2.3.109) удовлетворяет условиям леммы 22. Пусть $\tilde{b} \in \omega_{(-a)}$. Тогда существует $\tilde{b} \in \omega_a$ такое что $\tilde{b} = -b$. Согласно лемме 21, каждое решение уравнения (2.3.110) ограничено на $\mathbb{R}_-$ и, следовательно, согласно условию леммы они неограничены на $\mathbb{R}_+$. Согласно лемме 18 и 19 для каждого $x \neq 0$ и $b \in \omega_a$ следующие условия

$$\lim_{t \to -\infty} |\varphi(t, a, x)| = 0 \tag{2.3.111}$$

и

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, a, x)| = +\infty \tag{2.3.112}$$

выполнены. Отметим что

$$\varphi(t, \tilde{b}, x) = \varphi(t, -b, x) = \frac{1}{\varphi(t, b, 1/x)}.$$

Более того из (2.3.111) и (2.3.112) следует что для любых $x \neq 0$ и $\tilde{b} \in \omega_{(-a)}$ имеют место следующие равенства

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, \tilde{b}, x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \to -\infty} |\varphi(t, \tilde{b}, x) = +\infty,$$

т. е. уравнение (2.3.109) удовлетворяет условию Φ^+. Нетрудно установить что все решения уравнения (2.3.109) ограничена на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, согласно лемме 22 существуют числа $N > 0$ и $\nu > 0$ такие что

$$|\varphi(t, \tilde{b}, x)| \leq N e^{-\nu t} |x|$$

для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ и $\tilde{b} \in H^+(-a)$.

Пусть $x \neq 0$ и $b \in H^+(a)$. Тогда существует $\tilde{b} \in H^+(-a)$ такое что $\tilde{b} = -\tilde{b}$ и, следовательно, имеет место неравенство

$$|\varphi(t, -\tilde{b}, x)| = |\varphi(t, b, x)|^{-1} \leq Ne^{-\nu t}|x|^{-1}.$$

Из последнего неравенства следует что $|\varphi(t, b, x)| \geq Ne^{-\nu t}|x|$ для любых $x \in \mathbb{R}$, $b \in H^+(a)$ и $t \in \mathbb{R}_+$. И следовательно

$$|\varphi(t, b, x)| = |\varphi(t - \tau, b^{(\tau)}, \varphi(\tau, b, x)| \geq N^{-1}e^{-\nu(t-\tau)}\,|\varphi(\tau, b, x)|$$

для $t \geq \tau$. Таким образом

$$|\varphi(\tau, b, x)| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)}\,|\varphi(t, b, x)|$$

для $\tau \geq t \geq 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 24. *Пусть A уст. L^+. Если уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+ и A нижне треугольная матрица, тогда уравнение (2.2.95) гиперболична на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по размерности n пространства E^n. В случае $n = 1$ справедливость леммы 24 следует из леммы 23. Предположим что лемма верна при всех $k (k < n)$. Рассмотрим $k+1$–мерную систему

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1, \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{k+1}' = a_{k+1,1}(t)x_1 + \dots a_{k+1,k+1}(t)x_{k+1} \end{cases}$$

Согласно теореме 3.3 [**6**] для того чтобы уравнение (2.2.95) было гиперболическим на $\mathbb{R}_+$ необходимо показать что для каждой ограниченной на $\mathbb{R}_+$ функции $f \in C_b(\mathbb{R}_+; E^n)$ уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

имеет хотя бы одно решение $\varphi \in C_b(\mathbb{R}_+; E^n)$.

Пусть $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k+1})$. Покажем что система

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{k+1}' = a_{k+1,1}(t)x_1 + \dots a_{k+1,k+1}(t)x_{k+1} + f_{k+1}(t) \end{cases} \tag{2.3.113}$$

имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение. Действительно, легко заметить что уравнение

$$x_1' = a_{11}(t)x_1$$

и система

$$\begin{cases} x_2' = a_{22}(t)x_2, \\ x_3' = a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{k+1}' = a_{k+1,2}(t)x_2 + \dots a_{k+1,k+1}(t)x_{k+1} \end{cases}$$

удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}_+$. Используя этот факт легко заметить, что система (2.3.113) имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение. Лемма доказана. □

Лемма 25. [18] *Пусть A уст. L^+. Тогда:*

1) *существует уст. L^+ нижне треугольная матрица P такая что уравнение (2.2.95) может быть приведена к уравнению*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x; \tag{2.3.114}$$

2) *для любого $Q \in \omega_P$ существует $B \in \omega_A$ такое что уравнение (2.2.96) может быть приведено к уравнению*

$$\frac{dx}{dt} = Q(t)x. \tag{2.3.115}$$

Из этой леммы непосредственно следует

Следствие 17. *Преобразрвания Ляпунова сохраняют свойства экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$, регулярность, условия Φ^+, Φ^-, и $\mathcal{F}$*

Теорема 2.3.39. *Пусть A уст. L^+. Для того чтобы уравнение (2.2.95) было гиаерболическим на $\mathbb{R}_+$ необходимо и достаточно чтобы уравнение (2.2.95) удовлетвлряло условию Φ^+.*

Доказательство. Пусть A уст. L^+ и пусть уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Соглсно следствию 16 уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+.

Достаточность. Пусть A уст. L^+ и уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию Φ^+. Согласно лемме 25 уравнение (2.2.95) может быть приведено к треугольному виду (2.3.114) при помощи L^+ устойчивой матрицы P. Покажем теперь что (2.3.114) удовлетворяет условию леммы 24. Действительно, пусть $Q \in \omega_P$. По лемме 25 существует $B \in \omega_A$ такое что уравнение (2.2.97) может быть приведено к уравнению (2.3.115). Так как отношение приводимости симметрично, тогда уравнение (2.3.115) имеет нетривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение тогда и только тогда когда уравнение (2.2.97) имеет такое решение. Таким образом, в нашем случае каждое уравнение (2.3.115), где $Q \in \omega_P$, имеет нетривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение. Согласно лемме 24 уравнение (2.3.114) гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и, следовательно (см. следствие 17), уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана. □

2.4. Согласованные в пределе решения квазилинейных дифференциальных уравнений

В этом параграфе выясняются условия, при которых существование согласованного в пределе решения нелинейного уравнения можно установить по линейным членам правой части уравнения.

Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторое множество последовательностей $\{t_k\} \to +\infty$ и $r > 0$. Обозначим $C_r(\mathfrak{L}) = \{\varphi : \varphi \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n),\ \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty}$ и $||\varphi|| \leq r\}$.

Лемма 26. *$C_r(\mathfrak{L})$ является подпространством метрического пространства $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$.*

Доказательство. Очевидно, для доказательства сформулированного утверждения достаточно доказать замкнутость $C_r(\mathfrak{L})$ в $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$. Пусть $\{\varphi_k\} \subseteq C_r(\mathfrak{L})$ и $\varphi = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $\{t_k\} \in \mathfrak{L}$. Так как $\varphi_k \to \varphi$ в метрике $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$, то $||\varphi|| \leq r$. Покажем, что $\{t_k\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Для $\varepsilon > 0$ найдется $k_0 = k_0(\varepsilon)$, для которого

$$||\varphi - \varphi_k|| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.4.116}$$

при всех $k \geq k_0$. Так как

$$\begin{aligned} &|\varphi(t+t_l) - \varphi(t+t_r)| \leq |\varphi(t+t_l) - \varphi_{k_0}(t+t_l)| + |\varphi_{k_0}(t+t_l) - \\ &\varphi_{k_0}(t+t_r)| + |\varphi_{k_0}(t+t_r) - \varphi(t+t_r)| \leq \\ &2||\varphi - \varphi_{k_0}|| + |\varphi_{k_0}(t+t_l) - \varphi_{k_0}(t+t_r)|, \end{aligned} \tag{2.4.117}$$

то при достаточно больших l и m будем иметь

$$\rho(\varphi^{(t_l)}, \varphi^{(t_m)}) < \varepsilon,$$

где ρ – метрика, задающая открыто-компактную топологию в $C(\mathbb{R}_+, E^n)$ (например,

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{l>0}\{\min\{\max_{0\leq t\leq l} |\varphi(t) - \psi(t)|, l^{-1}\}\}).$$

В силу полноты пространства $C(\mathbb{R}_+, E^n)$ заключаем, что последовательность $\{\varphi^{(t_k)}\}$ сходится и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty}$. Лемма доказана. □

Лемма 27. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$, $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ и $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty} \cap \mathfrak{L}_{F_Q}^{+\infty}$, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ и $F_Q = F|_{\mathbb{R}\times Q}$. Если F_Q удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой $L > 0$, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_g^{+\infty}$, где $g(t) = F(t, \varphi(t))$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} &|g(t+t_l) - g(t+t_r)| = |F(t+t_l, \varphi(t+t_l)) - \\ &F(t+t_r, \varphi(t+t_r))| \leq |F(t+t_l, \varphi(t+t_l)) - \\ &F(t+t_l, \varphi(t+t_r))| + |F(t+t_l, \varphi(t+t_r)) - \\ &F(t+t_r, \varphi(t+t_r))| \leq L|\varphi(t+t_l) - \varphi(t+t_r))| + \\ &\max_{x\in Q} |F(t+t_l, x) - F(t+t_r, x)|. \end{aligned} \tag{2.4.118}$$

Переходя к пределу в неравенстве (2.4.118) когда $l, r \to +\infty$, получим фундаментальность последовательности $\{g_{t_k}\}$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+, E^n)$. В силу полноты пространства $C(\mathbb{R}_+, E^n)$ последовательность $\{g^{(t_k)}\}$ сходится, т.е. $\{t_k\} \in \mathfrak{L}_g^{+\infty}$. Лемма доказана. □

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + F(t,x), \tag{2.4.119}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, $f \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ и $F \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$.

Пусть E_+ – множество всех начальных точек $x \in E^n$ решений из $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнения (2.2.95). Тогда E_+ будет подпространством пространства E^n. Обозначим через P_+ проектор, проектирующий E^n на E_+.

Лемма 28. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ уст. L^+. Если уравнение* (2.2.95) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$, то какова бы ни была уст. L^+ функция $f \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнение* (2.2.96) *имеет единственное согласованное в пределе решение $\varphi_+ \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$, удовлетворяющее условию $P_+\varphi_+(0) = 0$. Кроме того, существует константа $M > 0$ (не зависящая от f) такая, что $||\varphi_+|| \leq M||f||$.*

Доказательство. Сформулированная лемма является непосредственным следствием леммы 6.3 из **[28]** и теоремы 2.2.36. □

Пусть φ_+ – согласованное в пределе решение уравнения (2.2.96), существование которого гарантируется леммой 28. Положим $Q = \overline{\varphi_+(\mathbb{R}_+)}$ и через Q_r обозначим шаровую окрестность множества $Q \subset E^n$ радиуса $r > 0$.

Теорема 2.4.40. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, $f \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ и $F \in C(\mathbb{R}_+ \times W, E^n)$. Если выполнены следующие условия:*

1) *A, f и F_{Q_r} уст. L^+;*
2) *Уравнение* (2.2.95) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$;*
3) *$|F(x,t)| \leq rM^{-1}$ при всех $x \in Q_r$ и $t \in \mathbb{R}_+$ (M – константа, существование которой гарантируется леммой 28);*
4) *F удовлетворяет условию Липшица по $x \in Q_r$ с константой Липшица $L < M^{-1}$,*

то уравнение (2.4.119) *имеет единственное решение $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, Q_r)$, удовлетворяющее условию $P_+\varphi(0) = 0$ и оно согласованно в пределе.*

Доказательство. В уравнении (2.4.119) совершим замену переменных $x(t) = y(t) + \varphi_+(t)$. Тогда для $y(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + F(t, y + \varphi_+(t)).$$

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{+\infty}(A, f, F_{Q_r})$, где $F_{Q_r} = F|_{\mathbb{R} \times Q_r}$. Определим оператор

$$\Phi : C_r(\mathfrak{L}) \to C_r(\mathfrak{L})$$

следующим образом. Если $\varphi \in C_r(\mathfrak{L})$, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{\varphi}$ и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{\varphi+\varphi_+}$. Согласно лемме 27 $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_g$, где $g(t) = F(t, \varphi(t) + \varphi_+(t))$. По лемме 28 уравнение

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + F(t, \varphi(t) + \varphi_+(t))$$

имеет единственное решение $\psi \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$, которое согласованно в пределе (и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\psi}^{+\infty}$) и удовлетворяет условию $P_+(\psi_+(0)) = 0$. Кроме того, оно подчиняется оценке

$$\begin{gathered} ||\psi|| \leq M||g|| = M \sup_{t\geq 0} |F(t, \varphi(t) + \varphi_0(t))| \leq \\ M \sup_{t\geq 0} \max_{x\in Q_r} |F(t, x)| \leq MrM^{-1} = r. \end{gathered} \tag{2.4.120}$$

Таким образом, $\psi \in C_r(\mathfrak{L})$. Положим $\Phi(\varphi) = \psi$. Из выше сказанного следует, что Φ корректно определен. Покажем, что оператор Φ является сжимающим. В самом деле. Легко заметить, что функция $\psi = \psi_1 - \psi_2 = \Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)$ является решением уравнения

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + F(t, \varphi_1(t) + \varphi_+(t)) - F(t, \varphi_2(t) + \varphi_+(t))$$

с начальным условием $P_+\psi(0) = 0$ и согласно лемме 28 подчиняется оценке

$$\begin{gathered} ||\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)|| \leq \\ M \sup_{t\geq 0} |F(t, \varphi_1(t) + \varphi_+(t)) - F(t, \varphi_2(t) + \varphi_+(t))| \leq \\ ML||\varphi_1 - \varphi_2|| = \alpha||\varphi_1 - \varphi_2||. \end{gathered}$$

Так как $\alpha = ML < MM^{-1} = 1$, то Φ является сжатием и, следовательно, существует единственная функция $\overline{\varphi} \in C_r(\mathfrak{L})$ такая, что $\Phi(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $\varphi = \overline{\varphi} + \varphi_+$ и заметить, что φ является искомым решением. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.4.41. *Пусть A, f уст. L^+ и выполнены следующие условия:*

1) *Уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$;*
2) *$F_{Q_r} = F|_{\mathbb{R}\times Q_r}$ уст. L^+;*
3) *F удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой $L > 0$.*

Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $|\varepsilon| \leq |\varepsilon_0|$ уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon F(t, x) \tag{2.4.121}$$

имеет единственное согласованное в пределе решение $\varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+, Q_r)$, удовлетворяющее условию $P_+\varphi_\varepsilon(0) = 0$. Кроме того, последовательность $\{\varphi_\varepsilon\}$ сходится к φ_+ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. В силу уст. L^+ функции F_{Q_r} существует такая константа $N > 0$, что $|F(t, x)| \leq N$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in Q_r$. Положим $\varepsilon_0 = \min((LM)^{-1}, (NM)^{-1})$. Тогда

$$|\varepsilon F(t, x)| \leq |\varepsilon||F(t, x)| \leq \varepsilon_0 N < r(NM)^{-1}N < rM^{-1}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in Q_r$. Очевидно, константа Липшица для функции εF меньше чем M^{-1}. Согласно теореме 2.4.40 при каждом $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$

уравнение (2.4.121) имеет единственное согласованное в пределе решение φ_ε, удовлетворяющее условию $P_{+\varphi_\varepsilon}(0) = 0$.

Оценим разность $\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_+(t) = \psi_\varepsilon(t)$. Очевидно,

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} = A(t)\psi_\varepsilon(t) + \varepsilon F(t, \psi_\varepsilon(t) + \varphi_+(t)) \tag{2.4.122}$$

и согласно лемме 28

$$\begin{gathered} ||\psi_\varepsilon|| \le M \sup_{t\ge 0} |\varepsilon F(t, \psi_\varepsilon(t) + \varphi_+(t))| \le \\ M|\varepsilon| \sup_{t\ge 0} \max_{x\in Q_r} |F(t,x)| \le M|\varepsilon|N = |\varepsilon|(MN). \end{gathered} \tag{2.4.123}$$

Переходя в неравенстве (2.4.123) к пределу, когда $\varepsilon \to 0$, получим требуемое утверждение. Теорема доказана. □

Следствие 18. *Пусть A и f асимптотически постоянны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны). Если выполнены следующие условия:*

1) *F асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q_r$;*
2) *Уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$;*
3) *F удовлетворяет условию Липшица по $x \in Q_r$,*

то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ уравнение (2.4.121) имеет единственное асимптотически постоянное (асимптотически τ-периодическое, асимптотически почти периодическое) решение $\varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+, Q_r)$, удовлетворяющее условию $P_+\varphi_\varepsilon(0) = 0$. Кроме того, последовательность $\{\varphi_\varepsilon\}$ сходится к φ_+ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$

Сформулированное предложение обобщает теорему Бирюк (см., например, [**7**]).

2.5. Асимптотически устойчивые по Пуассону решения дифференциальных уравнений

В этом параграфе, кроме теорем, вытекающих из общих результатов, мы приведчм некоторые теоремы о существовании асимптотически периодических (асимптотически почти периодических, асимптотически рекуррентных) решений, которые не вытекают из соответствующих теорем о согласованных решениях.

Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ и $M \subset C_b(\mathbb{R}, E^n)$. Следуя [**7**, с.432], будем говорить, что функция φ разделена в M, если M состоит из одной функции φ либо существует число $r > 0$ такое, что для всякой функции $\psi \in M$, отличной от φ, выполнено при всех $t \in \mathbb{R}$ неравенство

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \ge r. \tag{2.5.124}$$

Теорема 2.5.42. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.1.89) *и f асимптотически постоянна* (*асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна*) *по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если все решения из ω_φ каждого уравнения семейства* (2.2.92) *разделены в ω_φ, то φ асимптотически постоянно* (*асимптотически $k_0\tau$-периодично для некоторого натурального k_0, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

Доказательство. Так как f асимптотически рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то $f_Q = f \big|_{\mathbb{R}\times Q}$ уст. L^+. По лемме 3.1.1 [**41**] решение φ уст. L^+. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \big\rangle$, построенную в примере 3. В условиях нашей теоремы точка $(\varphi, f_Q) \in X$ уст. L^+. Покажем, что все решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$ каждого уравнения семейства (2.2.94) разделены в $\omega_{(\varphi, f_Q)}$. В самом деле. Пусть $g_Q \in \omega_{f_Q}$ и $(\psi_0, g_Q) \in \omega_{(\varphi, f_Q)}$ является решением уравнения (2.2.94). Очевидно, $\psi_0 \in \omega_\varphi$ является решением уравнения (2.2.92) ($g_Q = g \big|_{\mathbb{R}\times Q}$). Согласно условию теоремы существует число $r = r(g_Q) > 0$ такое, что для любого решения $\psi \in \omega_\varphi$ уравнения (2.2.92), отличного от ψ_0, выполнено неравенство (2.5.124).

Пусть теперь $(\psi, g_Q) \in \omega_{(\varphi, f_Q)}$ – произвольное, отличное от (ψ_0, g_Q), решение уравнения (2.2.92). Тогда, очевидно, расстояние между точками (ψ_0, g_Q) и (ψ, g_Q) не меньше r. Таким образом, все решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$ каждого уравнения (2.2.94) разделены в $\omega_{(\varphi, f_Q)}$. Согласно теоремам 1.4.22 и 1.4.27 решение (φ, f_Q) уравнения (2.2.93) асимптотически постоянно (асимптотически τk_0-периодично для некоторого натурального k_0, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно). Из сказанного следует, что φ асимптотически постоянно (асимптотически $k_0\tau$-периодично для некоторого натурального k_0, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно). Теорема доказана. $\square$

Отметим, что вопрос об асимптотической почти периодичности решений дифференциальных уравнений изучался ранее, в частности, в работах [**66**], [**50**]. В этих работах для почти периодичной правой части f и примерно при тех же условиях, что и в теореме 2.5.42, доказана асимптотическая почти периодичность решения φ.

Решение φ уравнения (2.1.89) назовем равномерно асимптотически устойчивым по Ляпунову в положительном направлении и обозначим р.уст. Л$^+$, если

1. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\rho(\varphi^{t_0}, \psi^{t_0}) < \delta($ ψ решение уравнения (2.1.89) и $t_0 \in \mathbb{R}$), то выполнено неравенство $\rho(\varphi^t, \psi^t) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

2. существует δ_0 такое, что для любого решения ψ уравнения (2.1.89), удовлетворяющее условию $\rho(\varphi,\psi) < \delta_0$, выполнено равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(\varphi^t,\psi^t) = 0$.

Заметим, что если для уравнения (2.1.89) выполнено условие единственности, то приведенное выше определение эквивалентно общепринятому определению равномерной асимптотической устойчивости по Ляпунову в положительном направлениию.

Теорема 2.5.43. *Пусть φ огранченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (2.1.89) и f асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодчна, асимптотически рекуррентна) по t равномерно относительно $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если решения из ω_φ каждого уравнения семйства (2.2.92) р.а.уст.Л$^+$, то φ асимптотически постоянно (асимптотически $k_0\tau$-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что (φ, f_Q) является уст. L^+ решением уравнения (2.2.93) и все решения из $\omega_{(\varphi,f_Q)}$ каждого из уравнений семейства (2.2.94) р.а.уст.Л$^+$. Согласно теореме 1.5.30 решение (φ, f_Q) уравнения (2.2.93) асимптотически постоянно (асимптотически $k_0\tau$-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно) и следовательно также асимптотически постоянно (асимптотически $k_0\tau$-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно). Теорема доказана. □

Следуя [**48**], решение $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнения (2.1.89) назовчм Σ^+-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдчтся δ такое, что для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ и $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ из неравенств

$$\rho(\varphi^{(t_1)}, \varphi^{(t_2)})\delta \quad \text{и} \quad \sup_{t\geq 0}\max_{x\in Q}|f(t+t_1,x) - f(t+t_2,x)| < \delta$$

следует неравенство

$$\sup_{t\geq 0}\rho(\varphi^{(t+t_1)}, \varphi^{(t+t_2)}) < \varepsilon$$

Теорема 2.5.44. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (2.1.89) *и f асимптотически почти периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно относительно $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если φ Σ^+-устойчиво, то оно асимптотически почти периодично.*

Доказательство. Если φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (2.1.89) и f асимптотически почти периодична по t равномерно относительно $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, то (φ, f_Q) – уст. L^+ решение уравнения (2.2.93). Легко заметить, что из Σ^+-устойчивости решения φ уравнения (2.1.89) вытекает Σ^+ устойчивость решения (φ, f_Q). Согласно теореме 1.4.23 решение (φ, f_Q) асимптотически почти периодично и, следовательно, решение φ также асимптотически почти периодично. Теорема доказана. □

В работе [**11**] доказано утверждение, аналогичное теореме 2.5.44, при дополнительном требовании почти периодичности по t правой части.

Теорема 2.5.45. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (2.1.89), f асимптотически τ-периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ и $\overline{g}_Q(t,x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_Q(k\tau + t, x)$. Если уравнение*

$$\frac{dy}{dt} = \overline{g}_Q(t,y) \tag{2.5.125}$$

допускает не более одного решения из ω_φ, то решение φ асимптотически τ-периодично.

Доказательство. В условиях теоремы (φ, f_Q) является уст. L^+ решением уравнения (2.2.93) и уравнение

$$h(\psi, \overline{g}_Q) = \overline{g}_Q \tag{2.5.126}$$

имеет не более одного решения из $\omega_{(\varphi,f_Q)}$, где h – гомоморфизм динамических систем из примера 3. Согласно теореме 1.4.25 решение (φ, f_Q) уравнения (2.2.93) асимптотически τ-периодично и, следовательно, решение φ уравнения (2.1.89) асимптотически τ-периодично. Теорема доказана. $\square$

Ниже мы изучим вопрос о существовании асимптотически почти периодических решений линейных дифференциальных уравнений с асимптотически почти периодическими коэффициентами.

Теорема 2.5.46. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ асимптотически почти периодична. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$.*
2) *Какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уравнение (2.2.96) имеет по крайнем мере одно асимптотически почти периодическое решение.*

Доказательство. Пусть уравнение (2.2.95) гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – произвольная асимптотически почти периодическая функция. Согласно теореме 2.2.36 уравнение (2.2.95) имеет по крайней мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ согласованное в пределе решение φ. Из следствия 14 вытекает асимптотическая почти периодичность φ. Таким образом, из условия 1) вытекает условие 2). Покажем, что имеет место и обратное. Так как матрица A асимптотически почти периодична, то существуют (единственная) почти периодическая матрица $P \in \omega_A$ и матрица $R \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ такие, что

1. $A(t) = P(t) + R(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} ||R(t)|| = 0$.

Пусть $g \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – произвольная почти периодическая функция. Согласно предположению уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + g(t)$$

имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение φ. В силу почти периодичности матрицы P и функции g и асимптотической почти периодичности φ существует последовательность $\{t_n\} \to +\infty$ такая, что $\{A_{t_k}\} \to P$, $g_{t_k} \to g$ и $\varphi_{t_k} \to q$, где $q \in \omega_\varphi$ – почти периодическая функция. Заметим, что q является почти периодическим решением уравнения

$$\frac{dz}{dt} = P(t)z + g(t). \tag{2.5.127}$$

Таким образом, мы показали, что какова бы ни была почти периодическая функция g, уравнение (2.5.127) имеет по крайней мере одно почти периодическое решение. Из результатов работы **[13]** следует, что уравнение

$$\frac{du}{dt} = P(t)u$$

гиперболично на $\mathbb{R}$. Согласно лемме 17 каждое уравнение семейства (2.2.97) гиперболично на $\mathbb{R}$. По теореме 2.3.39 уравнение (2.2.96) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана. □

Положим

$$M(A) = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{L} \int\limits_o^L A(s)ds.$$

Теорема 2.5.47. *Пусть A асимптотически почти периодична. Если спектр матрицы $M(A)$ не пересекается с мнимой осью, то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом ε, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x + f(t) \tag{2.5.128}$$

имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция f.

Доказательство. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon B(t)y \qquad (B \in \omega_A). \tag{2.5.129}$$

Заметим что $M(A) = M(P)$, где P – почти периодическая матрица из ω_A такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} ||A(t) - P(t)|| = 0$. Из результатов **[13]** (см. стр. 258) следует существование числа $\varepsilon_0 > 0$ такого, что при каждом ε, $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon P(t)z$$

гиперболично на $\mathbb{R}$. Тогда согласно лемме 17 каждое уравнение семейства (2.5.129) гиперболично на $\mathbb{R}$. Следовательно, каждое из уравнений (2.5.129) при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ не имеет нетривиальное ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. По теореме 2.3.39 уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x$$

гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и из теоремы 2.5.46 следует, что при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение (2.5.128) имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция f. Теорема доказана. □

Рассмотрим скалярное уравнение с асимптотически почти периодической функцией $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x. \tag{2.5.130}$$

Наряду с уравнением (2.5.130) рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + f(t), \tag{2.5.131}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Теорема 2.5.48. *Для того чтобы уравнение* (2.5.131) *имело по крайнем мере одно асимптотически почти периодическое решение φ при любой асимптотически почти периодической функции f, необходимо и достаточно, чтобы $M(a) \neq 0$ ($M(a)$ – среднее значение функции a).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (2.5.131) при любой асимптотически почти периодической функции f имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение φ. Согласно теореме 2.5.46 уравнение (2.5.130) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Пусть, для определчнности, решения уравнения (2.5.130) ограничены при $t \geq 0$. Тогда существуют положительные числа N и ν такие, что

$$|\varphi(t, a, x)| \leq Ne^{-\nu t}|x| \tag{2.5.132}$$

при всех $t \geq 0$. Так как

$$\varphi(t, a, x) = x \exp(\int_0^t a(s)ds), \tag{2.5.133}$$

то

$$\frac{1}{t} \ln |\varphi(t, a, x)| = \frac{\ln |x|}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t a(s)ds \tag{2.5.134}$$

($x \neq 0$). Переходя к пределу в (2.5.134), когда $t \to +\infty$, учитывая (2.5.132), получим $M(a) \neq 0$. Аналогично рассматривается случай, когда все решения уравнения (2.5.130) неограничены при $t \geq 0$.

Достаточность. Пусть $M(a) \neq 0$. Тогда легко проверить, что $M(a) = M(b)$ какова бы ни была функция $b \in \omega_a$. Пусть b – произвольная функция из ω_a. Так как $M(b) \neq 0$ и

$$M(b) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |\varphi(t, b, x)|$$

при всех $x \neq 0$, то, очевидно, уравнение

$$\frac{dz}{dt} = b(t)z$$

не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Поэтому согласно теореме 2.3.39 уравнение (2.5.130) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.5.46 $\square$

Теорема 2.5.48 является обобщением одной теоремы Массера (см., например, [**13**] стр. 43) на случай асимптотической почти периодичности.

2.6. Грубые линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

В этом параграфе изучаются грубые системы дифференциальных уравнений, Доказывается, что линейная система с почти периодическими коэффициентами является грубой тогда и только тогда, когда когда удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$. В конце параграфа приводятся два признака открытости двух подмножеств в пространстве линейных систем с произвольными ограниченными коэффициентами.

Обозначим через Π_m пространство всех почти периодических матриц, наделенное топологией равномерной сходимости на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений

$$x' = A(t)x \tag{2.6.135}$$

и

$$y' = B(t)y \tag{2.6.136}$$

где A и B из $C(\mathbb{R}, [E^m])$. .

Уравнения (2.6.135) и (2.6.136) назовем топологически эквивалнгтными (локально), если существуют окрестности U и V начала координат и непрерывное отображение

$$h : U \times \mathbb{R} \mapsto V$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1. $h(0,t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.
2. каково бы ни было решение φ уравнения (2.6.135) функция $\psi : t \mapsto h(\varphi(t), t)$ является решением уравнения (2.6.136), определенным при всех $t \in \mathbb{R}$ при которых $\varphi(t) \in U$.
3. при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$, $h_t : U \mapsto V$ является гомеоморфизмом $(h_t(x) = h(x,t))$ и $l : V \times \mathbb{R} \mapsto U$, определенное равенством $l(y,t) = h_t^{-1}(y)$(, непрерывно.
4. каково бы ни было решение ψ уравнения (2.6.136) функция $\varphi : t \mapsto l(\varphi(t), t)$ является решением уравнения (2.6.135), определенным при всех $t \in \mathbb{R}$, при котором $\psi(t) \in V$.

По поводу определения топологической эквивалентности дифференциальных уравнений, правая часть которых зависит от времени $t \in \mathbb{R}$ сотри также работы [**16, 56**].

Замечание 2.6.7. *1. Отношение топологической эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

2. Если уравнение (2.6.135) приводимо [**5**] *к уравнению (2.6.136), то эти уравнения топологически эквивалентны. В частности, при каждом $\beta \in \mathbb{R}$ уравнения (2.6.135) и*

$$z' = A(t+\beta)z \tag{2.6.137}$$

топологически эквивалентны.

Пусть $A \in \Pi_m$. Уравнение (2.6.135) назовем грубым (см. также [**16**]) или структурно устойчивым, если существует $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была матрица $B \in \Pi_m$, удовлетворяющая условию

$$||B(t) - A(t)|| < \delta \quad (t \in \mathbb{R})$$

уравнения (2.6.135) и (2.6.136) топологически эквивалентны.

Лемма 29. *Пусть $A \in \Pi_m$. Если уравнение (2.6.135) является грубым, то оно топологически эквивалентно любому уравнению семейства*

$$u' = C(t)u \quad (C \in \Sigma_A) \tag{2.6.138}$$

где $\Sigma_A = \overline{\{A(t+\beta) : \ \beta \in \mathbb{R}\}}$.

Доказательство. Пусть $A \in \Pi_m$, уравнение (2.6.135) является грубым и $\delta > 0$ из условия грубости уравнения (2.6.135). В силу почти периодичности A, для любого $C \in \Sigma_A$ и числа $\delta > 0$ можно подобрать число $\beta = \beta(C, \delta) \in \mathbb{R}$ такокое, что

$$||A(t) - C(t+\beta)|| < \delta \tag{2.6.139}$$

и, следовательно, уравнения (2.6.135) и

$$v' = C(t+\beta)v \tag{2.6.140}$$

топологически эквивалентны (см. замечание 2.6.7), а уравнение (2.6.140) топологически эквивалентно (2.6.135). В силу транзитивности отношения топологической эквивалентности, уравнения (2.6.135) и (2.6.138) топологически эквивалентны. Лемма доказана. □

Следствие 19. *Если $A \in \Pi_m$ и уравнение (2.6.135) является грубым, то любые два уравнения*

$$x_1' = A_1(t)x_1$$

и

$$x_2' = A_2(t)x_2$$

топологически эквивалентны, где A_1 и A_2 из Σ_A.

Следствие 20. *В условиях следствия 19, если уравнение (2.6.135) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то и каждое уравнение семейства (2.6.138) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.*

Уравнение (2.6.135) называют **[19]** бирегулярным, если существует базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ в пространстве ее решений, обладающий свойством

$$\lambda_i(A) = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{1}{t} \ln |\varphi_i(t)| \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Заметим что, если уравнение (2.6.135) бирегулярно и $\lambda_i(A) \neq 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то оно не допускает нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.

Обозначим через $S_m = \{A : \ A \in \Pi_m$ таких, что уравнение (2.6.135) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений$\}$.

Лемма 30. *$\overline{S_m} = \Pi_m$, где чертой обозначено замыкание S_m в пространстве Π_m.*

Доказательство. Пусть $A \in \Pi_m$ и $\delta > 0$. Согласно теореме 4 **[19]** в Σ_A найдется матрица C такая, что уравнение (2.6.138) бирегулярно. Логически возможны два случая

а. $\lambda_i(C) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и тогда уравнение (2.6.138) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Для числа $\delta > 0$ и матрицы $C \in \Sigma_A$ найдется число $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено неравенство (2.6.140). Для завершения доказательства леммы остается заметить, что уравнение (2.6.140) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.

б. среди $\lambda_i(C) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имеются и нулевые, тогда наряду с уравнением (2.6.135) рассмотрим и уравнение

$$y' = (A(t) + \mu I)y \tag{2.6.141}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ и I единичная матрица. Заметим, что из бирегулярности уравнения (2.6.138) вытекает и бирегулярность уравнения

$$y' = (C(t) + \mu I)y \tag{2.6.142}$$

причем $\lambda_i(C + \mu I) = \lambda_i(C) + \mu$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Число $\mu \in \mathbb{R}$ выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

б.1. $|\mu| < \delta$ и

б.2. $\lambda_i(C) + \mu \neq 0$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ (легко проверить, что таое $\mu \in \mathbb{R}$ существует).

Тогда уравнение (2.6.142) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Пусть $\mu \in \mathbb{R}$ то же самое, что и в пункте а., тогда уравнение

$$y' = (C(t + \beta) + \mu I)y \tag{2.6.143}$$

также не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что

$$||A(t) - C(t+\beta) - \mu I|| \leq ||A(t) - C(t+\beta)|| + |\mu| < 2\delta$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. □

Лемма 31. *Пусть $A \in \Pi_m$ и уравнение (2.6.135) является грубым, тогда $A \in S_m$.*

Доказательство. Пусть $A \in \Pi_m$, уравнение (2.6.135) является грубым и $\delta > 0$ число, учавствующее в определении грубости уравнения (2.6.135). Согласно лемме 30 для любого $\delta > 0$ и $A \in \Pi_m$ найдется матрица $B \in S_m$ такая, что

$$||B(t) - A(t)|| < \delta \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

В силу выбора $\delta > 0$, уравнения (2.6.135) и (2.6.136) топологически эквивалеентны. Из того, что $B \in S_m$ и уравнения (2.6.135) и (2.6.136) топологически эквивалентны следует, что $A \in S_m$. В самом деле. Допустим пртивное, то есть уравнение (2.6.135) имеет нетривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение φ. В силу линейности уравнения (2.6.135) можно считать, что $\varphi(t) \in U$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и следовательно уравнение (2.6.136) также имеет нетривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $\psi(t) = h(\varphi(t), t)$, что противоречит условию. Лемма доказана. □

Теорема 2.6.49. *Пусть $A \in \Pi_m$. Для того чтобы уравнение (2.6.135) было грубым необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2.6.135) удовлетворяло условию э. д. на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $A \in \Pi_m$ и уравнение (2.6.135) является грубым. Согласно лемме 31 уравнение (2.6.135) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Из следствия 20 вытекает, что каждое уравнение семейства (2.6.138) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. По теореме 1 [**20**] (см. также [**62**]) уравнение (2.6.135) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$.

Обратное. Пусть $A \in \Pi_m$ и уравнение (2.6.135) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$, тогда из результатов работы [**56**] следует грубость уравнения (2.6.135). Теорема доказана. □

Отметим, что в случае, когда матрица A является постоянной или периодической, то теорема 2.6.49 следует из известной теоремы Гробмана-Хартмана [**5, 28, 58**] и того факта, что множество матриц, спектр которых не пересекается с мнимой осью, плотно в множестве всех матриц.

Ниже мы укажем некоторые грубые свойства уравнения (2.6.135), то есть такие свойства, которые сохраняются при "малом возмущении". Смысл выражения "малое возмущение"будет уточняться в соответствующих теоремах.

Теорема 2.6.50. *Пусть $A \in C([E^m])$ уст. L^+ и каждое уравнение семейства (2.2.97) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Тогда существует число $\beta_0 \in \mathbb{R}$ такое, что если*

$$||A(t) - B(t)|| < \beta_0 \tag{2.6.144}$$

при всех $\mathbb{R}_+$, то и каждое уравнение семейства

$$u' = C(t)u \qquad (C \in \omega_B) \tag{2.6.145}$$

не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.

Доказательство. Пусть A уст. L^+ и каждое уравнение семейства (2.2.97) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Согласно теореме 2.3.37 уравнение (2.2.95) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}_+$. Из теоремы 5.1 [**6**] следует существование числа $\beta_0 > 0$ такого что, если выполнено неравенство (2.6.144), то уравнение

$$y' = B(t)y$$

также удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}_+$. По лемме 17 каждое уравнение семейства (2.6.135) удовлетворяет условию э. д. на $\mathbb{R}$ и, следовательно, не имеет нетривиальных ограниченных на решений. Теорема доказана. □

Положим

$$(L_B\varphi)(t) = \varphi'(t) - B(t)\varphi(t).$$

Лемма 32. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^m])$ уст. L. Для того чтобы каждое уравнение семейства*

$$z' = B(t)z \qquad (B \in \Sigma_A) \tag{2.6.146}$$

не имело нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\alpha > 0$, что

$$||L_B\varphi|| \geq \alpha||\varphi|| \tag{2.6.147}$$

при всех $B \in \Sigma_A$ и $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^m)$, где $|| \cdot ||$ норма в $C_b(\mathbb{R}, E^m)$.

Доказательство. Необходимость. Допустим противное, то есть что существуют $\{\varphi_n\} \subseteq C_b(\mathbb{R}, E^m)$, $\{B_n\} \subseteq \Sigma_A$ и $\alpha_n \to 0$ ($\alpha_n > 0$) такие, что

1. $||\varphi_n|| = 1$
2. $||L_{B_n}\varphi_n|| \leq \alpha_n$

при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Из 1. следует существование последовательности $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ такой, что

$$|\varphi_n(t_n)| \geq \frac{1}{2}. \tag{2.6.148}$$

Неравенство 2. можно переписать следующим образом

$$|\varphi_n'(t) - B_n(t)\varphi_n(t)| \leq \alpha_n \tag{2.6.149}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Определим последовательность $\{\psi_n\}$ следующим равенством

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t + t_n)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что неравенство (2.6.149) можно переписать еще следующим образом

$$|\psi_n'(t)-B_n(t+t_n)\psi_n(t)| = |\varphi_n'(t+t_n)-B_n(t+t_n)\varphi_n(t+t_n)| \le \alpha_n \tag{2.6.150}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что последовательность $\{\psi_n\}$ компактна в $C(\mathbb{R}, E^m)$. В самом деле. Легко заметить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция ψ_nявляется решением дифференциального уравнения

$$z' = B_n(t+t_n)z + g_n(t),$$

где

$$g_n(t) = \psi_n'(t) - B_n(t+t_n)\psi_n(t)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. Из неравенства (2.6.150) следует, что $g_n \to 0$ в топологии $C(\mathbb{R}, E^m)$. В силу уст. L матрицы A, последовательность $\{B_n^{t_n}\}$ также можно считать сходящейся в $C(\mathbb{R}, [E^m])$. Заметим, что $|\psi_n(t)| \le 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и согласно лемме 3.1.1 [**41**] последовательность $\{\psi_n\}$ компактна в $C(\mathbb{R}, E^m)$.

Не умаляя общности рассуждений, последовательности $\{\psi_n\}$ и $\{B_n^{t_n}\}$ можно считать сходящимися. Положим $\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$ и $B_0 = \lim\limits_{n\to\infty} B_n^{t_n}$. По лемме 3.1.1 [**41**] ψ_0 является решением уравнения

$$u' = B_0(t)u. \tag{2.6.151}$$

Легко заметить, что $|\psi_0(t)| \le 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, согласно (2.6.146)

$$||\psi_0(0)|| = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t_n)|| \ge \frac{1}{2}$$

и, следовательно, ψ_0 является нетривиальным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением дифференциального уравнения (2.6.151). Так как $B_0 \in \Sigma_A$, то последнее противоречит условию леммы и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\alpha > 0$ такое, что выполнено неравенство (2.6.147). Покажем что каждое уравнение семейства (2.6.146) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Допустим противное, то есть что существует $B_0 \in \Sigma_A$ такое, что уравнение (2.6.151) имеет нетривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение ψ_0. Согласно (2.6.147)

$$||L_{B_0}\psi_0|| \le \alpha||\psi_0||. \tag{2.6.152}$$

С другой стороны

$$||L_{B_0}\psi_0|| = 0 \tag{2.6.153}$$

так как ψ_0 есть решение уравнения (2.6.151). Из (2.6.152) и (2.6.153) следует что $\alpha||\psi_0|| \le 0$. Так как $||\psi_0|| > 0$, то $\alpha \le 0$. Последнее противоречит выбору числа α. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.6.8. *При доказательстве достаточности леммы 32 мы нигде не пользовались тем что A уст. L и, следовательно, достаточность леммы справедлива и без этого требования.*

Теорема 2.6.51. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^m])$ уст. L и каждое уравнение семейства (2.6.146) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Тогда существует число $\beta_0 > 0$ такое что, если выполнено неравенство (2.6.144) при всех $t \in \mathbb{R}$, то и каждое уравнение семейства*

$$y' = C(t)y \qquad (C \in \Sigma_B) \tag{2.6.154}$$

не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.

Доказательство. Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^m])$ уст. L и каждое каждое уравнение семейства (2.6.146) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Согласно лемме 32 существует положительное число α такое, что выполнено неравенство (2.6.147). Положим $\beta 0 = \alpha/2$. Пусть матрица $B \in C(\mathbb{R}, [E^m])$ такова, что выполнено неравенство (2.6.144) при всех $t \in \mathbb{R}$, тогда для любого $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^m)$ (φ непрерывно дифференцируема)

$$\begin{aligned} ||L_B\varphi|| = ||L_A\varphi - (B - A)\varphi|| \geq ||L_A\varphi|| - ||(B - A)\varphi|| \geq \\ \alpha||\varphi|| - \beta_0||\varphi|| = (\alpha - \beta_0)||\varphi|| = \tfrac{\alpha}{2}||\varphi||. \end{aligned} \tag{2.6.155}$$

Пусть $C \in \Sigma_B$, тогда существует последовательность $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ такая, что $C = \lim\limits_{n\to\infty} B^{t_n}$ в $C(\mathbb{R}, [E^m])$. Заметим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ и при всех $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^m])$

$$||L_{B^{t_n}}\varphi|| = ||L_B\varphi^{-t_n}|| \geq \frac{\alpha}{2}||\varphi^{-t_n}|| = \frac{\alpha}{2}||\varphi||.$$

Последнее неравенство можно переписать в следующем виде

$$||\varphi' - B^{t_n}\varphi|| \geq \frac{\alpha}{2}||\varphi||. \tag{2.6.156}$$

Переходя в неравенстве (2.6.156) к пределу (в смысле равномерной сходимости на отрезках из $\mathbb{R}$), когда $n \to \infty$ получим

$$||L_C\varphi|| \geq \frac{\alpha}{2}||\varphi|| \tag{2.6.157}$$

при всех $C \in \Sigma_B$. Из неравенства (2.6.157) и леммы 32 получим требуемый в теореме результат, Теорема доказана. □

Замечание 2.6.9. *Все результаты главы 2 можно перенести на дифференциальные уравнения правая часть которого условию Каратеодори.*

Литература

[1] Б.Г. Араркцян. Об асимптотической почти периодичности решений некоторых нестационарных уравнений. *Доклады АН СССР*, 205, 3, 511-512, 1922.

[2] Б.Г. Араркцян. Асимптотически почти периодические решения некоторых линейных эволюционных уравнений. *Математический сборник*, 133 (175), 1(5) с. 3 – 10, 1987.

[3] И.У. Бронштейн. *Расширение минимальных групп преобразований.* Штиинца, Кишинев, 1975.

[4] И.У. Бронштейн и А.И. Герко. О вложении некоторых топологических полугрупп преобразований в топологические группы преобразований. *Известия АН Молдавской ССР, серия физ.-техн. и матем. наук*, 3:18-24, 1970.

[5] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., *Теория показателей Ляпунова.* М., Наука, 1967.

[6] Ю.Л. Далецкий и М.Г. Крейн. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М., 1970.

[7] Б.П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости.* М., 1967.

[8] В.К. Дуболарь. О рекуррентных решениях дифференциальных уравнений с последействием в банаховом пространстве. *Дифференциальные уравнения*, 6(6):1395–1401, 1970.

[9] В.В. Жиков. К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений. *Научные труды ВВПИ, математика*, (8):94–188, 1969.

[10] В.В. Жиков. К теории допустимости пар функциональных пространств. *Доклады АН СССР*, t.205, no.6, 1281-1283, 1972.

[11] Дж.Л. Келли. *Общая топология.* М., Наука, 1968.

[12] Э.А. Коддингтон и Н. Левинсон. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., 1958.

[13] М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд и Ю.С. Колесов. *Нелинейнык почти периодические колебания.* М., Наука, 1970.

[14] Б.М. Левитан и В.В. Жиков. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* М., МГУ (будет опубликовано в 1978).

[15] Б.М. Левитан. *Почти периодические функции.* М., ГИТТЛ, 1953.

[16] Лерман Л. М., Шильников Л. П., О классификации грубых неавтономных систем второго порядка с конечным числом ячеек. *Доклады АН СССР,* т.209, no.3, 544-547, 1973.

[17] В.М. Миллионщиков. Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР*, 161(1):43–44, 1965.

[18] В.М. Миллионщиков. О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем. *Дифференциальные уравнения*, 4(9):1555–1559, 1968.

[19] В.М. Миллионщиков. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 7(3):387–390, 1971.

[20] Э.М. Мухамадиев. Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на прямой функций. *Доклады АН СССР*, 196, 1, 47-49, 1971.

[21] Э.М. Мухамадиев. Об одном критерии обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций. *ДАН ТаджССР*, 15(9):7–10, 1972.

[22] В.В. Немыцкий и В.В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1949.

[23] В.В. Немыцкий. О некоторых методах качественного исследования в "большом"многомерных автономных систем. *Труды ММО*, 5:455–482, 1956.

[24] В.В. Немыцкий. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. *УМН*, 22(4):3–36, 1965.

[25] З. Нитецки. *Ввеление в дифференциальную динамику.* М., Мир, 1975.

[26] У. Рудин. *Функциональный анализ.* М., Мир, 1975.

[27] К.С. Сибирский. *Введение в топологическую динамику.* Кишинев, РИО АН МССР, 1970.
Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск, Наука и техника, 1986.

[28] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., Мир, 1970.

[29] Д. Хьюзмоллер. *Расслоенные пространства.* М., Мир, 1970.

[30] Д.Н. Чебан. Асимптотически устойчивые по Пуассону решения нелинейных дифференциальных уравнений. *Математические исследования*, Кишинев, Штиинца, т.37, 3б стр.231-237, 1975.

[31] Б.А. Щербаков, Д.Н. Чебан. Асимптотическая устойчивость по Пуассну движений динамических систем. *Тезисы докладов 4-ой Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений*, Рязань, 1976, стр.304.

[32] Д.Н. Чебан. О сравнимости точек динамических систем по характеру возвращаемости в пределе. *Математические науки*, Кишинев, Штиинца, 1:66-71, 1977.

[33] Д.Н. Чебан. Об ограниченности и асимптотической почти периодичности решений дифференциальных уравнений. *Исследования по алгебре, математическому анализу и их приложениям.* Кишинев, Штиинца, 1977, стр.72-76.

[34] Б.А. Щербаков, Д.Н. Чебан. Асимптотическая устойчивость по Пуассну движений динамических систем и сравнимость их по характеру возвращаемости в пределе. *Дифференциальные уравнения*, т.13, 5, стр.898-906, 1977.

[35] Д.Н. Чебан. Асимтпотически устойчивые по Пуассону решения операторных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 13(8):1411–1417, 1977.

[36] Д.Н. Чебан. Некоторые свойства решений линейных систем дифференциальных уравнений с асимптотически почти периодическими коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*, 13(7):940-942, 1977.

[37] Д.Н. Чебан. Равномерно изохронные решения линейных систем дифференциальных уравнений. *Математические исследования*, т.9, 2, 204-213, 1974.

[38] А.Н. Шарковский. О притягивающих и притягивающихся множествах. *Докл. АН СССР*, 160(5):1036-1038, 1965.

[39] Л. Шварц. *Анализ*, том 1. М., Мир, 1972.

[40] Л. Шварц. *Анализ*, том 2. М., Мир, 1972.

[41] Б.А. Щербаков. *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1972.

[42] Б.А. Щербаков. *О согласованной возвращаемости ограниченных решений дифференциальных уравнений 1-ого порядка.* Дифференциальные уравнения, 10(2):270-275, 1974.

[43] Б.А. Щербаков. *О сравнимости по характеру возвращаемости движений динамических систем.* Дифференциальные уравнения, 11(7):1246-1255, 1975.

[44] D. Barac. Asymptotically almost periodic solutions of the systems of differential equations. *Mathematica - Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation. Mathematica.* 19(42), 2:123-127, 1977.

[45] Bhatia N. P., Asymptotic recurrence and dynamical flow near a compact minimal set. *Lecture Notes in Mathematics,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, v.144, 1970, pp.22-29.

[46] Bhatia N. P. and Chow S.-N., Weak attraction, minimality, recurrence and almost periodicity in semi-sistems. *FE,* 15 (1972), 39–59.

[47] N.P. Bhatia and G.P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[48] W.A. Coppel. Almost periodic properties of ordinary differential equations. *Ann. Mat. Pura. Appl.* 76:27-49, 1976.

[49] W.F. Eberlein. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. *Transactions of American Math. Society*, 67(1):217-240, 1949. 43–58, 1977.

[50] A.M. Fink. Semi-separated conditions for almost periodic solutions. *J. Diff. Equat.*, 11(2):245-251, 1972.

[51] M. Frechet. Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques. *Revue scientifique*, 79(7-8):341-354, 1941.

[52] N. Gheorghiu. Soluţii aproape periodice şi asimptotic aproape periodice ale unor ecuaţii diferenţiale nelineare de ordine 1. *An. Ştiinţ. Univ. "Al.I. Cuza"din Iaşi.*, No.1, s.1, Fasc. 1-2, 17-20, 1955.

[53] J. Kato and F. Nakajima. On Sacker-Sell's theorem for a linear skew product flow. *Tôhoku Math. Journ.*, 28:79-88, 1976.

[54] R.K. Miller. Non linear Voltera intergral equations. *Math. Lecture Notes Serie*, 1971.

[55] I. Muntean. Exponential convergence of solutions of differential equations. *Revue Romaine de math. pure et appl.*, 17:1411-1417, 1972.

[56] Palmer K. J., A Generalization of Hartman's Linearization Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 41, no.3, pp.753-758, 1973.

[57] Precupanu A., Fonction et suites asymptotiquement presque periodiques des valeures dans un espace de Banch. *An. Stiint. Univer. Isi,* sec.1, t.15, pp.29-38, 1969.

[58] Selgrade J. F., Isolated Invariant Sets for Flows on Vector Bundles. N *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol.203, pp.359-389, 1975.

[59] G.R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I. The basic theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:241–262, 1967.

[60] G.R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, II. Limiting equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:263–283, 1967.

[61] G.R. Sell. Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations, *Van Nostrand–Reinbold, London,* 1971.

[62] R.J. Sacker and G.R. Sell. Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems, I. *Journal of Differential Equations*, 15:429–458, 1974.

[63] R.J. Sacker. Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems, IV. *Journal of Differential Equations*, 27(1):106–137, 1978.

[64] J. Traple. Weak almost periodic soluions of differential equations. *J. Diff. Equat.*, 45:199-206, 1972.

[65] Utz W. R. and Paul Waltman, asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 18, no.4, pp.597-601, 1967.

[66] T. Yoshizawa. Asymptotically almost periodic solutions an almost periodic system. *Funkcialaj Ekvacioj,* 12:23-40, 1969.