

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МССР  
КИШИНЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени В. И. ЛЕНИНА

На правах рукописи

**ЧЕБАН ДАВИД НИКОЛАЕВИЧ**

УДК 517.938.5; 517.925.52

***НЕАВТОНОМНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ  
СИСТЕМЫ***

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения и  
математическая физика

Диссертация  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Кишинев - 1991

## Оглавление

Введение	1
Обозначения	6
Глава 1. Автономные диссипативные динамические системы	7
1.1. Некоторые понятия, обозначения и факты	7
1.2. Предельные свойства динамических систем	13
1.3. Диссипативные динамические системы. Центр Левинсона	15
1.4. Диссипативные динамические системы в локально компактных пространствах	18
1.5. Критерии компактной диссипативности	20
1.6. Локально диссипативные динамические системы	28
1.7. Об одной проблеме Дж.Хейла	35
Глава 2. Неавтономные диссипативные динамические системы	41
2.1. Об устойчивости центра Левинсона	41
2.2. Неавтономные диссипативные динамические системы, удовлетворяющие условию равномерной положительной устойчивости	45
2.3. Поведение диссипативных динамических систем при гомоморфизмах	49
2.4. Динамические системы с конвергенцией	54
2.5. Некоторые признаки конвергентности неавтономных динамических систем	63
2.6. Неавтономные диссипативные системы в конечномерном пространстве	73
2.7. Линейные системы	75
Глава 3. Аналитические диссипативные системы	81
3.1. Косое произведение динамических систем и коциклы	81
3.2. С-аналитические системы	86
3.3. Динамические системы в пространствах сечений	91
3.4. Квазипериодические решения диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами	94
3.5. Почти периодические решения слабо нелинейных диссипативных систем	97

Глава 4. Структура центра Левинсона неавтономных динамических систем с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений	107
4.1. Топологические свойства центра Левинсона	107
4.2. Цепно рекуррентные движения	112
4.3. Спектральное разложение центра Левинсона неавтономной диссипативной динамической системы	114
4.4. Одномерные диссипативные динамические системы с гиперболическим центром	117
4.5. Диссипативные каскады на гладких многообразиях	120
4.6. Периодические диссипативные системы	123
Глава 5. Метод функций Ляпунова	127
5.1. Критерии диссипативности неавтономных динамических систем в терминах функций Ляпунова	127
5.2. Некоторые признаки диссипативности неавтономных дифференциальных уравнений (многомерный случай)	135
5.3. Теорема Барбашина–Красовского для неавтономных динамических систем	144
5.4. Уравнения с конвергенцией	149
5.5. Диссипативность и конвергентность некоторых уравнений 2-го и 3-го порядков, встречающиеся в приложениях	160
Глава 6. Диссипативность некоторых классов дифференциальных, разностных, импульсных, функционально-дифференциальных и эволюционных уравнений	165
6.1. Разностные уравнения, обладающие свойством диссипативности	165
6.2. Периодические диссипативные уравнения с импульсами	168
6.3. Импульсные периодические уравнения с конвергенцией	172
6.4. Асимптотическая устойчивость линейных функционально-дифференциальных уравнений	175
6.5. Конвергентность эволюционного уравнения с равномерно положительным оператором	178
Литература	181

## Введение

В качественной теории дифференциальных уравнений важную роль играют нелокальные проблемы. К ним относятся вопросы ограниченности, периодичности, почти периодичности, устойчивости по Пуассону, вопросы существования различного рода предельных режимов, конвергентность, диссипативность и т.д. Этому направлению принадлежит и настоящая работа, которая посвящена изучению абстрактных неавтономных диссипативных динамических систем и приложению таких систем к дифференциальным уравнениям.

В приложениях часто встречаются системы

$$u' = f(t, u), \quad (1)$$

у которых из-за естественной диссипации каждое решение в некоторый момент времени попадает в фиксированную ограниченную область и в ней остается при дальнейшем возрастании времени. Такие системы называются диссипативными [26]-[28],[74]-[76],[209], [210] и возникают они в гидродинамике при изучении явления турбулентности, в теории колебаний, биологии, радиотехнике и других областях науки и техники в связи с изучением различных предельных режимов. В последнее время интерес к диссипативным системам еще больше возрос в связи с интенсивной разработкой странных аттракторов (см., например, [57],[80], [125],[157]).

Изучение диссипативных систем, начиная с классических работ Н. Левинсона, посвящено большое число работ. Среди них можно условно выделить два направления.

Первому направлению принадлежат работы, в которых содержатся те или иные условия, обеспечивающие диссипативность системы (1), какого-то класса или конкретной системы (квазилинейные системы, монотонные, квазиоднородные,  $\mathcal{C}$ -аналитические системы и т.д.), представляющей теоретический или прикладной интерес. Отметим здесь работы П. В. Атрашенока [5], Б. П. Демидовича [26]-[28], В. И. Зубова [34]-[36], В. М. Матросова [61], В. В. Немыцкого [68]-[69], В. А. Плисса [74], В. Н. Щенникова [130],[131], К. Кордуняну [150], Н. Левинсона [182], Н. Павел [191]-[193], Р. Рейсига [76], Т. Талпалару [201] и многих других авторов.

Ко второму направлению относятся те работы, в которых изучаются внутренние свойства диссипативных систем, т.е. свойства, связанные с

характером поведения решений системы в предположении ее диссипативности. Этому кругу вопросов посвящены работы В. М. Герштейна [20]-[24], В. В. Жикова [29]-[30], И. Л. Зинченко [32], М. А. Красносельского [20], С. Ю. Пилюгина [73], В. А. Плисса [74]-[75], М. Л. Картрайта и Дж. Е. Литлвуда [145]-[147], Н. Левинсона [182], Дж. Фуско и М. Олива [160], Ж. Сковронского и С. Зембы [200] и других авторов.

Многие важные результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений [74]-[75] в работах Дж. Биллоти, Дж. Купермана, Дж. ЛаСалля, О. Лопеса, П. Массата, М. Слемрода, Дж. Хейла [88],[141],[149],[162]-[168],[181],[185]-[187] и других авторов обобщены на функционально-дифференциальные уравнения.

Работы А. В. Бабина и М. И. Вишика [6]-[9],[138], Ю. С. Ильяшенко [38]-[41], О. А. Ладыженской [51]-[55], Р. Темам [204], И. Д. Чуешова [123], А. Н. Шарковского [125] и других авторов посвящены эволюционным уравнениям с частными производными, допускающие максимальный компактный аттрактор (диссипативные эволюционные уравнения).

Следует отметить, что во всех упомянутых выше работах за редким исключением изучаются периодические или автономные системы. Эти результаты отражены в монографиях [74]-[76],[204],[88],[125].

Если правая часть  $f$  уравнения (1) непериодична, например, квазипериодична (почти периодична по Бору, рекуррентна в смысле Биркгофа, почти периодична по Левитану, устойчива по Пуассону) или более сложным образом зависти от времени, то ситуация здесь значительно усложняется (уже в классе почти периодических систем). Это обусловлено по крайней мере двумя причинами.

Во-первых, определение диссипативности в неавтономном случае необходимо уточнить, т.к. определение Левинсона в классе непериодических систем расщепляется на несколько неэквивалентных друг другу определений и необходимо выбрать то из них, которое позволяет построить достаточно содержательную теорию, которая содержала бы в качестве частного случая наиболее существенные результаты, полученные для периодических диссипативных систем.

Во-вторых, при изучении периодических диссипативных систем важную роль играет дискретная динамическая система (каскад), порожденная степенями преобразования Пуанкаре. Для непериодических систем, как известно, нет преобразования Пуанкаре и, следовательно, техника, созданная для исследования периодических диссипативных систем, непригодна в более общей ситуации. Поэтому для изучения непериодических диссипативных систем нужны новые идеи, т.е. построение теории неавтономных диссипативных динамических систем требует и построения соответствующих методов исследования.

Наш подход к изучению диссипативных систем дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы привлечь к изучению неавтономных диссипативных систем идеи и методы, развитые в теории абстрактных динамических систем. При этом выделяется класс динамических систем,

которые в работе называются диссипативными, моделирующими свойства диссипативных дифференциальных уравнений. Выделенный класс динамических систем подвергается систематическому исследованию, затем полученные общие результаты применяются при изучении диссипативных дифференциальных и некоторых других классов уравнений.

Идея применения методов теории динамических систем к изучению неавтономных дифференциальных уравнений сама по себе не нова. Она уже более двух десятилетий успешно применяется для решения различных задач в теории линейных и нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Впервые такой подход к неавтономным дифференциальным уравнениям был применен в работах В. М. Миллионщикова [62]-[64], Б. А. Щербакова [132],[134], Л. Г. Дейсача и Дж. Селла [156], Р. К. Миллера [188], Дж. Сейферта [195], Дж. Селла [196]-[197], позднее в работах В. В. Жикова [29], И. У. Бронштейна [15], а затем и многих других авторов. Этот подход состоит в том, что с каждым уравнением (1) естественным образом связывается пара динамических систем и гомоморфизм первой на вторую. При этом в одну динамическую систему, грубо говоря, закладывается информация о правой части уравнения (1), а во вторую – информация о решениях уравнения (1).

Следует отметить, что существует и другой подход к изучению неавтономных дифференциальных уравнений, предложенный в работах В. И. Зубова [34], а затем развитый в работах С. М. Дафермоса [151]-[154], Дж. Хейла [88], И. Хитоши [174] и многих других авторов (подробнее об этом см. обзор [129]). Он состоит в том, что с каждым неавтономным дифференциальным уравнением связывается двухпараметрическое семейство отображений (по терминологии некоторых авторов – процесс).

В начале оба эти подхода развивались независимо, однако позднее была установлена связь между ними (см., например, [153],[189]).

Автор придерживается первого подхода к изучению неавтономных дифференциальных уравнений. Этот подход на наш взгляд лучше приспособлен к решению тех задач, которые изучаются в настоящей работе.

Предлагаемая работа состоит из шести глав.

В первой главе для автономных динамических систем вводятся и изучаются различные типы диссипативности: поточечная, компактная и локальная. Приводятся критерии поточечной, компактной и локальной диссипативности. Показано, что для динамических систем в локально компактных пространствах все три типа диссипативности эквивалентны. Приводятся примеры, показывающие, что в общем случае понятия поточечной, компактной и локальной диссипативности различны. Вводится понятие центра Левинсона, являющееся важной характеристикой компактно диссипативной динамической системы. Дается решение одной проблемы Дж. Хейла для локально ограниченных динамических систем.

Вторая глава посвящена неавтономным диссипативным динамическим системам. Отмечено, что в общем случае центр Левинсона неавтономной диссипативной динамической системы не является орбитально

устойчивым. Изучается вопрос об устойчивости центра Левинсона неавтономной диссипативной системы. Приводится простое геометрическое условие, гарантирующее устойчивость центр Левинсона. Дается описание центра Левинсона неавтономной системы, удовлетворяющей условию равномерной положительной устойчивости. Указываются условия, при которых свойство диссипативности сохраняется при гомоморфизмах. Выделяется класс динамических систем, допускающих полное описание структуры центра Левинсона, названных в работе системами с конвергенцией. Приводятся некоторые признаки конвергентности абстрактных неавтономных динамических систем. Приводится ряд условий, эквивалентных диссипативности в конечномерном пространстве. Наконец, для линейных систем доказано, что диссипативность сводится к конвергенции и приводится ряд условий, эквивалентных диссипативности.

В третьей главе изучается главным образом один специальный класс неавтономных диссипативных динамических систем, названных в работе  $\mathcal{C}$ -аналитическими. Доказано, что  $\mathcal{C}$ -аналитическая диссипативная динамическая система обладает свойством равномерной положительной устойчивости на компактах. Дается полное описание структуры центра Левинсона этих систем. Приводится одна общая конструкция, позволяющая естественным образом связать с заданной неавтономной динамической системой некоторую автономную динамическую систему в пространстве непрерывных сечений. С помощью этой конструкции изучаются квазипериодические решения  $\mathcal{C}$ -аналитических диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами. В заключение приводятся условия, обеспечивающие диссипативность слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений, а также приводится признак, гарантирующий наличие в центре Левинсона слабо нелинейной системы с почти периодическими коэффициентами почти периодического решения.

Четвертая глава посвящена изучению структуры центра Левинсона с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. Устанавливаются некоторые свойства множества цепно рекуррентных движений диссипативной системы. Доказана теорема о спектральном разложении центра Левинсона, аналогичная известной теореме С. Смейла. Для одномерных диссипативных динамических систем устанавливается теорема, уточняющая теорему о спектральном разложении центра Левинсона и, в частности, показано, что центр Левинсона таких систем содержит локально максимальное гиперболическое марковское множество. В конце этой главы даются приложения полученных результатов к периодическим системам.

В пятой главе развивается метод функций Ляпунова для исследования неавтономных диссипативных динамических систем. Приводятся некоторые критерии диссипативности в терминах функций Ляпунова, с помощью которых удастся получить достаточные признаки диссипативности, удобные в приложениях. Доказывается ряд признаков диссипативности многомерных неавтономных дифференциальных уравнений

с помощью функций Ляпунова. На основе развитых для исследования неавтономных диссипативных систем методов удается получить критерий асимптотической устойчивости нулевого сечения неавтономных систем. В частности, для неавтономных динамических систем доказывается аналог известной теоремы Барбашина–Красовского. Устанавливаются некоторые признаки конвергентности систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова, зависящих от двух пространственных переменных. Доказываются признаки диссипативности и конвергентности некоторых систем дифференциальных уравнений 2-ого и 3-его порядков, встречающихся в приложениях.

Шестая глава посвящена некоторым приложениям общих результатов, полученных в предыдущих главах, к разностным уравнениям, к уравнениям с импульсами, к функционально-дифференциальным уравнениям и к эволюционным уравнениям  $x' + Ax = f$  с равномерно монотонным оператором  $A$ . В частности, приводятся признаки диссипативности и конвергентности слабо нелинейных систем разностных уравнений и уравнений с импульсами. Доказывается критерий асимптотической устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений. Устанавливается признак конвергентности эволюционного уравнения  $x' + Ax = f$  с равномерно монотонным оператором  $A$ .



## Обозначения

$\mathbb{N}$	множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$	множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$	множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$	множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$	множество всех комплексных чисел;
$\mathbb{S}$	одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$ ;
$\mathbb{S}_+(\mathbb{S}_-)$	подмножество всех неотрицательных (неположительных) чисел из множества $\mathbb{S}$ ;
$X \times Y$	прямое произведение двух множеств;
$M^n$	прямое произведение $n$ экземпляров множества $M$ ;
$E^n$	вещественное ( $\mathbb{R}^n$ ) или ( $\mathbb{C}^n$ ) $n$ -мерное евклидово пространство;
$\{x_n\}$	последовательность;
$x \in X$	$x$ элемент множества $X$ ;
$\partial X$	граница множества $X$ ;
$X \subseteq Y$	множество $X$ является частью или совпадает с множеством $Y$ ;
$X \cup Y$	объединение множеств $X$ и $Y$ ;
$X \setminus Y$	дополнение множества $Y$ в $X$ ;
$X \cap Y$	пересечение множеств $X$ и $Y$ ;
$\emptyset$	пустое множество;
$\overline{M}$	замыкание множества $M$ ;
$f(M)$	образ множества $M \subseteq X$ при отображении $f : X \rightarrow Y$ , т. е., $\{y \in Y : y = f(x), x \in M\}$ ;
$f(\cdot, x)$	частное отображение, задаваемое функцией $f$ при значении $x$ второго аргумента;
$Im(f)$	область значений функции $f$ ;
$D(f)$	область определения функции $f$ ;
$\ x\ $	норма элемента $x$ ;
$ x $	модуль числа $x \in \mathbb{C}$ ;
$(x, y)$	упорядоченная пара;
$f : X \rightarrow Y$	отображение из $X$ в $Y$ ;
$B(x_0, r)$	открытый шар с центром в точке $x_0$ и радиуса $r$ ;
$B[x_0, r]$	замкнутый шар с центром в точке $x_0$ и радиуса $r$ ;
$\{x, y, \dots, z\}$	множество состоящее из элементов $x, y, \dots, z$ ;
$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$	предел последовательности;
$\varphi' := \frac{d\varphi}{dx}$ ( $\dot{\varphi} := \frac{d\varphi}{dt}$ )	производная функции $\varphi$ ;
$\varphi'' := \frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ( $\ddot{\varphi} := \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ )	вторая производная функции $\varphi$ ;
$\frac{\partial f}{\partial x}$ ( $\frac{\partial f}{\partial y}$ )	производная функции $f$ по переменной $x$ ( $y$ );
$\omega_x(\alpha_x)$	$\omega(\alpha)$ —предельное множество точки $x$ .

## Автономные диссипативные динамические системы

### 1.1. Некоторые понятия, обозначения и факты

1. Ниже приводятся некоторые понятия, обозначения и факты из теории динамических систем [15],[17],[67],[70], [81], [132],[134], которыми мы будем пользоваться в этой книге.

Пусть  $X$  - топологическое пространство,  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{Z}$ ) - группа действительных (целых) чисел,  $\mathbb{R}_+$  ( $\mathbb{Z}_+$ ) - полугруппа неотрицательных действительных (целых) чисел и  $\mathbb{S}$  одно из множеств  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$  ( $\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}$ ) - подполугруппа аддитивной группы  $\mathbb{S}$ .

Тройку  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ , где  $\pi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  - непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

$$(1.1.1) \quad \pi(0, x) = x;$$

$$(1.1.2) \quad \pi(s, \pi(t, x)) = \pi(t + s, x);$$

называют динамической системой. При этом, если  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$  ( $\mathbb{R}$ ) или  $\mathbb{Z}_+$  ( $\mathbb{Z}$ ), то система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  называется полугрупповой (групповой). В случае  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$  или  $\mathbb{R}$  динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  называется потоком, а если  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$ , то  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  называется каскадом. Иногда, для краткости, будем писать вместо  $\pi(t, x)$  просто  $xt$ .

В дальнейшем  $X$  полное метрическое пространство с метрикой  $\rho$ .

Функцию  $\pi(\cdot, x) : \mathbb{T} \rightarrow X$  при фиксированном  $x \in X$  называют движением, а множество  $\Sigma_x := \pi(\mathbb{T}, x)$  траекторией этого движения.

Непустое множество  $M \subseteq X$  называют полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным) по отношению к данной динамической системе  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  или, просто, полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным), если  $\pi(t, M) \subseteq M$  ( $M \supseteq \pi(t, M)$ ,  $\pi(t, M) = M$ ) при каждом  $t \in \mathbb{T}$ .

Отметим, что введенные понятия инвариантности различны для полугрупповых систем и эквивалентны для групповых систем.

Замкнутое полуинвариантное множество, не содержащее собственного подмножества, являющегося замкнутым и полуинвариантным, называется минимальным.

Легко заметить, что всякое полуинвариантное минимальное множество инвариантно.

Замкнутое полуинвариантное (инвариантное) множество называют неразложимым, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых полуинвариантных (инвариантных) подмножеств.

Пусть  $M \subseteq X$ . Множество

$$\omega(M) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \pi(\tau, M)}$$

называют  $\omega$  - предельным для  $M$ . Если  $\mathbb{T} = \mathbb{S}$ , то множество

$$\alpha(M) := \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{\tau \leq t} \pi(\tau, M)}$$

называют  $\alpha$  предельным для  $M$ .

Положим  $\Sigma(M) := \pi(\mathbb{S}, M)$  ( $\Sigma^+(M) := \pi(\mathbb{S}_+, M)$ ) и  $H(M) := \overline{\pi(\mathbb{S}, M)}$  ( $H^+(M) := \overline{\pi(\mathbb{S}_+, M)}$ ). Если  $M = \{x\}$ , то полагают  $\omega_x := \omega(\{x\})$ ,  $\alpha_x := \alpha(\{x\})$ ,  $\Sigma_x^+ := \Sigma^+(\{x\})$ ,  $H^+(x) := H^+(\{x\})$  и  $H(x) := H(\{x\})$ .

Точку  $x$  называют точкой покоя, если  $xt = x$  при всех  $t \in \mathbb{T}$  и  $\tau$  периодической, если  $x\tau = x$  ( $\tau > 0$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$ ).

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Число  $\tau \in \mathbb{T}$  называют  $\varepsilon$  смещением (почти периодом) точки  $x$ , если  $\rho(x\tau, x) < \varepsilon$  ( $\rho(x(t + \tau), xt) < \varepsilon$  при всех  $t \in \mathbb{T}$ ). Точка  $x \in X$  называется почти рекуррентной (почти периодической), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $l > 0$  такое, что на любом отрезке длины  $l$ , найдется  $\varepsilon$  - смещение (почти период) точки  $x$ .

Если точка  $x \in X$  почти рекуррентна и множество  $H(x)$  компактно, то  $x$  называют рекуррентной.

Говорят, что точка  $x \in X$  устойчива по Пуассону в положительном направлении, если  $x \in \omega_x$ . Если система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  групповая и  $x \in \alpha_x$ , то говорят, что  $x$  устойчива по Пуассону в отрицательном направлении. И, наконец, если  $x$  устойчива по Пуассону в обоих направлениях, то говорят, что  $x$  устойчива по Пуассону.

Говорят, что движение  $\pi(\cdot, x) : \mathbb{T}_{\neq} \rightarrow X$  полугрупповой динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  продолжаемо на  $\mathbb{S}$ , если существует целая траектория  $\varphi$  (т.е. непрерывное отображение  $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow X$  такое, что  $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t + s)$  при всех  $t \in \mathbb{T}$  и  $s \in \mathbb{S}$ ) такая, что  $\varphi(0) = x$ . При этом через  $\alpha_{\varphi_x}$  обозначим  $\{y : \exists t_n \rightarrow -\infty, t_n \in \mathbb{S} \text{ и } \varphi(t_n) \rightarrow y\}$ , где  $\varphi$  - продолжение на  $\mathbb{S}$  движение  $\pi(\cdot, x)$ .

Через  $W^s(\Lambda)$  ( $W^u(\Lambda)$ ) обозначают множество, определяемое равенством

$$W^s(\Lambda) := \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, \Lambda) = 0\}$$

$$(W^u(\Lambda) := \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(xt, \Lambda) = 0\}),$$

и называют устойчивым (неустойчивым) многообразием множества  $\Lambda \subseteq X$ .

Множество  $M$  называют:

- орбитально устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(x, M) < \delta$  влечет  $\rho(xt, M) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- притягивающим, если существует  $\gamma > 0$  такое, что  $B(M, \gamma) \subset W^s(M)$ ;
- асимптотически устойчивым, если оно орбитально устойчиво и является притягивающим;
- асимптотически устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво и  $W^s(M) = X$ ;
- равномерно притягивающим, если существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$(1.1.3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B(M, \gamma)} \rho(xt, M) = 0.$$

**Теорема 1.1.1.** [82] Пусть  $M \subseteq X$  непустое компактное инвариантное множество, тогда каждое движение в  $M$  продолжаемо на  $\mathbb{S}$ .

**Теорема 1.1.2.** [82] Для того чтобы компактное множество  $M \subseteq X$  было квазиинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки  $x \in M$  существовала целая траектория  $\varphi$ , проходящая через точку  $x \in M$ , такая что  $\varphi(t) \in M$  при всех  $t \leq 0$ .

**Теорема 1.1.3.** [82] Объединение и замыкание полуинвариантных (квазиинвариантных, инвариантных) множеств полуинвариантно (квазиинвариантно, инвариантно).

**Теорема 1.1.4.** [82] Имеют место следующие утверждения:

- (1)  $\forall x \in X \omega_x$  полуинвариантно;
- (2)  $\forall x \in X$  и  $\varphi \in \Phi_x \alpha_{\varphi_x}$  полуинвариантно.

**2.** В этом пункте указывается один общий способ построения динамических систем в пространстве непрерывных функций. Указанным способом получают многие известные динамические системы в функциональных пространствах (см., например, [15],[132]).

Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  - динамическая система на  $X$ ,  $Y$  - полное псевдометрическое пространство и  $\mathcal{P}$  - комплект псевдометрик на  $Y$ . Через  $C(X, Y)$  обозначим семейство всех непрерывных функций  $f : X \rightarrow Y$ , наделенное открыто-компактной топологией. Эта топология задается следующим семейством псевдометрик  $\{d_K^p\}$  ( $p \in \mathcal{P}$ ,  $K \in C(X)$ ), где

$$d_K^p(f, g) := \sup_{x \in K} p(f(x), g(x))$$

и  $C(X)$  - семейство всех компактных подмножеств  $X$ . Определим при каждом  $\tau \in \mathbb{T}$  отображение  $\sigma_\tau : C(X, Y) \rightarrow C(X, Y)$  по следующему правилу  $(\sigma_\tau f)(x) := f(\pi(\tau, x))$  ( $x \in X$ ). Отметим следующие свойства отображений  $\{\sigma_\tau : \tau \in \mathbb{T}\}$ :

- a.  $\sigma_0 = id_{C(X, Y)}$ ;
- b.  $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T} \sigma_{\tau_1} \circ \sigma_{\tau_2} = \sigma_{\tau_1 + \tau_2}$ ;
- c.  $\forall \tau \in \mathbb{T} \sigma_\tau$  - непрерывно.

**Лемма 1.** *Отображение  $\sigma : \mathbb{T} \times C(X, Y) \rightarrow C(X, Y)$ , определенное равенством  $\sigma(\tau, f) = \sigma_\tau f$  ( $f \in C(X, Y)$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$ ), непрерывно.*

*Доказательство.* Пусть  $f \in C(X, Y)$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$  и  $\{f_\nu\}, \{\tau_\nu\}$  - произвольные направленные последовательности сходящиеся к  $f$  и  $\tau$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}
d_K^p(\sigma(\tau_\nu, f_\nu), \sigma(\tau, f)) &= \sup_{x \in K} p(\sigma(\tau_\nu, f_\nu)(x), \sigma(\tau, f)(x)) = \\
&= \sup_{x \in K} p((f_\nu(\pi(\tau_\nu, x)), f(\pi(\tau, x))) : x \in K) \leq \\
&\leq \sup_{x \in K} p(f_\nu(\pi(\tau_\nu, x)), f(\pi(\tau_\nu, x))) + \sup_{x \in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)), f(\pi(\tau, x))) \leq \\
&\leq \sup_{x \in K, s \in Q} p(f_\nu(\pi(s, x)), f(\pi(s, x))) + \sup_{x \in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)), f(\pi(\tau, x))) \\
&\leq \sup_{m \in \pi(Q, K)} p(f_\nu(m), f(m)) + \sup_{x \in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)), f(\pi(\tau, x))) = \\
(1.1.4) \quad &d_{\pi(Q, K)}^p(f_\nu, f) + \sup_{x \in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)), f(\pi(\tau, x))),
\end{aligned}$$

где  $Q = \overline{\{\tau_\nu\}}$ . Переходя к пределу в неравенстве (1.1.4) получим требуемое утверждение.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Тройка  $(C(X, Y), \mathbb{T}, \sigma)$  есть динамическая система на  $C(X, Y)$ .*

**Замечание 1.1.1.** *Лемма 1 имеет место и в том случае, когда  $X$  есть произвольное топологическое хаусдорфово пространство.*

Рассмотрим некоторые примеры динамических систем вида  $(C(X, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ , встречающихся в приложениях.

**Пример 1.** Положим  $X = \mathbb{T}$  и через  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  обозначим динамическую систему на  $\mathbb{T}$ , где  $\pi(t, x) := x + t$ . Динамическая система  $(C(\mathbb{T}, Y), \mathbb{T}, \sigma)$  называется системой Бебутова [132] (динамическая система сдвигов). Динамическая система Бебутова является удобным средством исследования общих свойств непрерывных функций.

Будем говорить, что функция  $\varphi \in C(\mathbb{T}, Y)$  обладает свойством  $A$ , если этим свойством обладает движение  $\sigma(\cdot, \varphi) : \mathbb{T} \rightarrow C(\mathbb{T}, Y)$  в динамической системе Бебутова  $(C(\mathbb{T}, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ , порожденное функцией  $\varphi$ . В качестве свойства  $A$  может быть периодичность, почти периодичность, рекуррентность, асимптотическая почти периодичность и т. д.

**Пример 2.** Положим  $X := \mathbb{T} \times W$ , где  $W$  - некоторое метрическое пространство, и через  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  обозначим динамическую систему на  $X$  определенную по следующему правилу:  $\pi(t, (s, w)) := (s + t, w)$ . Приведенная выше конструкция позволяет естественным образом определить на  $C(\mathbb{T} \times W, Y)$  динамическую систему сдвигов  $(C(\mathbb{T} \times W, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ .

Будем говорить, что функция  $f \in C(\mathbb{T} \times W, Y)$  почти периодична (рекуррентна и т.д.) по переменной  $t \in \mathbb{T}$  равномерно по  $w$  на компактах из  $W$ , если движение  $\sigma(\cdot, f)$  почти периодически (рекуррентно и т.д.) в динамической системе  $(C(\mathbb{T} \times W, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ .

**Пример 3.** Пусть  $W := \mathbb{C}^n$ ,  $Y := \mathbb{C}^m$  и  $A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  - множество всех функций  $f \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ , голоморфных по второму аргументу. Нетрудно проверить, что множество  $A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  является замкнутым инвариантным подмножеством динамической системы  $(C(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), \mathbb{T}, \sigma)$  и, следовательно, на  $A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  индуцируется динамическая система сдвигов  $(A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), \mathbb{T}, \sigma)$ .

**Пример 4.** Пусть  $W$  и  $X$  полные псевдометрические пространства [45]. Обозначим через  $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$  - множество всех непрерывных функций  $f : \mathbb{T} \times W \rightarrow X$ , ограниченных на ограниченных множествах из  $\mathbb{T} \times W$  и непрерывных по  $t \in \mathbb{T}$  равномерно по  $w$  на ограниченных множествах из  $W$ , снабженное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из  $\mathbb{T} \times W$ . Эту топологию можно задать при помощи следующего семейства псевдометрик  $\{d_B^p\}$  ( $p \in \mathcal{P}$ ,  $B \in B(\mathbb{T} \times W)$ ), где

$$(1.1.5) \quad d_B^p(f, g) = \sup_{(t, w) \in B} p(f(t, w), g(t, w)),$$

$B(\mathbb{T} \times W)$  семейство всех ограниченных подмножеств  $\mathbb{T} \times W$  и  $\mathcal{P}$  - комплект псевдометрик на  $X$ . Отметим, что множество  $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ , наделенное комплектом псевдометрик  $\{d_B^p | p \in \mathcal{P}, B \in B(\mathbb{T} \times W)\}$  превращается в полное псевдометрическое пространство, инвариантное относительно сдвигов по  $t \in \mathbb{T}$ . При каждом  $\tau \in \mathbb{T}$  обозначим через  $f_\tau$  сдвиг функции  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$  на  $\tau$  по переменной  $t \in \mathbb{T}$ , т.е.  $f_\tau(t, w) = f(t + \tau, w)$  ( $(t, w) \in \mathbb{T} \times W$ ). Определим отображение  $\sigma : \mathbb{T} \times \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$  по следующему правилу:  $\sigma(\tau, f) := f_\tau$  при всех  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$  и  $\tau \in \mathbb{T}$ . Легко проверить, что  $\sigma(0, f) = f$  и  $\sigma(\tau_2, \sigma(\tau_1, f)) = \sigma(\tau_1 + \tau_2, f)$  при всех  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$  и  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$ . Также как и в лемме 1 проверяется непрерывность отображения  $\sigma$  и, следовательно, тройка  $(\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X), \mathbb{T}, \sigma)$  является динамической системой на  $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ .

**Замечание 1.1.2.** Если функция  $f \in C(\mathbb{T} \times W, X)$  равномерно непрерывна на любом ограниченном подмножестве из  $\mathbb{T} \times W$ , то  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ . Обозначим через  $U(\mathbb{T} \times W, X)$  множество всех функций  $f \in C(\mathbb{T} \times W, X)$  равномерно непрерывных на ограниченных подмножествах из  $\mathbb{T} \times W$ . Тогда  $U(\mathbb{T} \times W, X)$  инвариантно относительно сдвигов по  $t \in \mathbb{T}$  и замкнуто в  $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$  и, следовательно, на  $U(\mathbb{T} \times W, X)$  индуцируется динамическая система сдвигов  $(U(\mathbb{T} \times W, X), \mathbb{T}, \sigma)$  (см., например, [15], [132] и [134]).

Пусть  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  ( $\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \subseteq \mathbb{S}$ ) две динамические системы. Отображение  $h : X \rightarrow Y$  называется гомоморфизмом (соответственно изоморфизмом) динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ , если отображение  $h$  непрерывно (соответственно гомеоморфно) и  $h(\pi(x, t)) =$

$\sigma(h(x), t)$  ( $t \in \mathbb{T}_1$ ,  $x \in X$ ). При этом говорят, что  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  есть расширение<sup>1</sup> динамической системы  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  при помощи гомоморфизма  $h$ , а  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  - фактор динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  при гомоморфизме  $h$ . Динамическую систему  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  называют также базой расширения  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

Тройку  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ , где  $h$  - гомоморфизм  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  и  $(X, h, Y)$  локально-тривиальное расслоение [89], будем называть неавтономной динамической системой.

Тройка  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$ , где  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  - динамическая система на  $Y$ ,  $W$  - полное метрическое пространство и  $\varphi$  - непрерывное отображение  $\mathbb{T}_1 \times W \times Y$  в  $W$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- a.  $\varphi(0, u, y) = u$  ( $u \in W, y \in Y$ );
- b.  $\varphi(t + \tau, u, y) = \varphi(\tau, \varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$  ( $t, \tau \in \mathbb{T}_1, u \in W, y \in Y$ ),

называется [196] - [197] коциклом над  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $W$ .

Положим  $X := W \times Y$  и определим отображение  $\pi : X \times \mathbb{T}_1 \rightarrow X$  правилом:  $\pi((u, y), t) := (\varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$  (то есть  $\pi = (\varphi, \sigma)$ ). Тогда легко проверить, что  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  - динамическая система на  $X$ , называемая косым произведением [1], [198], а  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$  - гомоморфизм  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  и, следовательно,  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  есть неавтономная динамическая система.

Таким образом, если задан коцикл  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над динамической системой  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $W$ , то по нему естественным образом строится неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ( $X := W \times Y$ ), которую назовем неавтономной динамической системой, ассоциированной коциклом  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ .

Неавтономные динамические системы (коциклы), как это уже отмечалось во введении, играют важную роль при изучении неавтономных эволюционных дифференциальных уравнений. При определенных условиях с данным неавтономным уравнением можно связать некоторый коцикл (неавтономную динамическую систему). Ниже приводится пример такого рода.

**Пример 5.** Пусть  $E^n$  -  $n$ -мерное вещественное или комплексное евклидово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1.1.6) \quad u' = f(t, u),$$

где  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ . Наряду с уравнением (3.1.146) рассмотрим и его  $H$ -класс [15],[28],[56], [132],[134], т.е. семейство уравнений

$$(1.1.7) \quad v' = g(t, v),$$

где  $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$  и  $f_\tau(t, u) = f(t + \tau, u)$ . В дальнейшем будем предполагать, что функция  $f$  регулярна, то есть для каждого

<sup>1</sup>В последние годы в работах И.У.Бронштейна и его учеников (см. например [15],[17] и ссылки в них) расширением называют тройку  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, h), h \rangle$  т.е. то, что мы здесь называем неавтономной динамической системой.

уравнения (1.1.7) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на  $\mathbb{R}_+$ . Обозначим через  $\varphi(\cdot, v, g)$  решение уравнения (1.1.7), проходящее через точку  $v \in E^n$  при  $t = 0$ . Тогда  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \rightarrow E^n$  и при этом выполнены следующие условия (см., например, [15],[196],[197]):

- 1)  $\varphi(0, v, g) = v$  для любых  $v \in E^n$  и  $g \in H(f)$ ;
- 2)  $\varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau) = \varphi(t + \tau, v, g)$  для любых  $v \in E^n$ ,  $g \in H(f)$  и  $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ ;
- 3)  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \rightarrow E^n$  непрерывно.

Обозначим через  $Y = H(f)$  и  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  - динамическую систему сдвигов (полугрупповую) на  $Y$ , индуцированную динамической системой сдвигов  $(C(\mathbb{R} \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ . Тройка  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{R}_+, \sigma) \rangle$  является коциклом над  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  со слоем  $E^n$ . Следовательно, уравнение (1.2.13) естественно порождает коцикл  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{R}_+, \sigma) \rangle$  и неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ , где  $X := E^n \times Y$ ,  $\pi = (\varphi, \sigma)$  и  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$ .

## 1.2. Пределные свойства динамических систем

Пусть  $M \subseteq X$  и  $\omega(M)$   $\omega$ -пределное множество  $M$ . Непосредственно из определения  $\omega(M)$  вытекает следующая

**Лемма 2.** *Имеют место следующие утверждения:*

- (1) для того чтобы точка  $y \in \omega(M)$  необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательности  $\{x_n\} \subseteq M$  и  $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}$  такие, что  $t_n \rightarrow +\infty$  и  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ ;
- (2) множество  $\omega(M)$  замкнуто и полуинвариантно;
- (3) если  $A \subseteq B$ , то  $\omega(A) \subseteq \omega(B)$ ;
- (4)  $\omega(A \cup B) \subseteq \omega(A) \cup \omega(B)$  для любой пары подмножеств  $A$  и  $B$  из  $X$ ;
- (5) если множество  $A$  полуинвариантно (квазиинвариантно, инвариантно), то  $\omega(A) \subseteq \bar{A}$  ( $\bar{A} \subseteq \omega(A)$ ,  $\omega(A) \bar{A}$ );
- (6)  $\overline{\cup\{\omega_x \mid x \in M\}} \subseteq \omega(M)$ ;
- (7) если  $\Sigma^+(M)$  относительно компактно, то  $\omega(M)$  инвариантно.

**Лемма 3.** *Пусть  $B \subseteq X$ , тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) каковы бы ни были  $\{x_k\} \subseteq B$  и  $t_k \rightarrow +\infty$  последовательность  $\{x_k t_k\}$  относительно компактна;
- (2) (а)  $\omega(B)$  непусто и компактно;  
(б)  $\omega(B)$  инвариантно и имеет место равенство

$$(1.2.8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B} \rho(xt, \omega(B)) = 0;$$

- (3) существует непустой компакт  $K \subseteq X$  такой, что

$$(1.2.9) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B} \rho(xt, K) = 0.$$



*Доказательство.* Покажем, что из 1. следует 2.. Пусть  $\{x_k\} \subseteq B$  и  $t_k \rightarrow +\infty$ , тогда согласно 1. последовательность  $\{x_k t_k\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k t_k$ , тогда  $\bar{x} \in \omega(B)$  и, следовательно,  $\omega(B) \neq \emptyset$ . Покажем, что  $\omega(B)$  компактно. Пусть  $\varepsilon_k \downarrow 0$  и  $\{y_k\} \subseteq \omega(B)$ , тогда существуют  $x_k \in B$  и  $t_k \geq k$  такие, что

$$(1.2.10) \quad \rho(x_k t_k, y_k) < \varepsilon_k$$

По условию 1. последовательность  $\{x_k t_k\}$  относительно компактна и так как  $\varepsilon_k \downarrow 0$ , то и  $\{y_k\}$  относительно компактна. Из определения  $\omega(B)$  следует его полуинвариантность и, следовательно, для инвариантности  $\omega(B)$  достаточно показать, что оно квазиинвариантно. Пусть  $y \in \omega(B)$  и  $t \in \mathbb{T}$ , тогда существуют  $\{x_k\} \subseteq B$  и  $t_k \rightarrow +\infty$  такие, что  $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k t_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(t_k - t + t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi^t(x_k(t_k - t))$ . Так как  $t_k - t \rightarrow +\infty$ , то согласно 1. последовательность  $\{x_k(t_k - t)\}$  можно считать сходящейся. Положим  $y_t = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k(t_k - t)$ , тогда  $y = \pi^t y_t$  и  $y_t \in \omega(B)$ , т.е.  $y \in \pi^t \omega(B)$ . Таким образом инвариантность  $\omega(B)$  доказана. Теперь покажем, что имеет место равенство (1.2.8). Если допустить, что (1.2.8) не имеет места, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $t_k \rightarrow +\infty$  и  $x_k \in B$  такие, что

$$(1.2.11) \quad \rho(x_k t_k, \omega(B)) \geq \varepsilon_0.$$

Согласно условию 1. последовательность  $\{x_k t_k\}$  можно считать сходящейся. Пусть  $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k t_k$ , тогда  $y \in \omega(B)$ . С другой стороны, переходя в (1.2.11) к пределу, когда  $k \rightarrow +\infty$ , получим  $y \notin \omega(B)$ . Полученное противоречие завершает доказательство импликации 1.  $\Rightarrow$  2.

Очевидно, из 2. следует 3., а из 3. следует 1. Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Пусть  $M \subseteq X$  непусто и  $\Sigma^+(M)$  относительно компактно, тогда  $\omega(M) \neq \emptyset$ , компактно, инвариантно и

$$(1.2.12) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in M} \rho(xt, \omega(M)) = 0.$$

Имеет место и утверждение, обратное к следствию 2, но прежде, чем сформулировать его мы напомним понятие меры некомпактности.

Мерой некомпактности  $\lambda$  на  $X$  называют [79], [88], [170] отображение  $\lambda : B(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1)  $\lambda(A) = 0$  тогда и только тогда, когда  $A \in B(X)$  относительно компактно;
- (2)  $\lambda(A \cup B) = \max(\lambda(A), \lambda(B))$  для любых  $A, B \in B(X)$ .

Мера некомпактности Куратовского  $\lambda : B(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$  определяется равенством  $\lambda(A) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \text{ допускает конечное } \varepsilon \text{ покрытие}\}$ .

**Лемма 4.** Пусть  $M \subseteq X$  непусто и относительно компактно. Если множество  $\omega(M)$  непусто, компактно и имеет место равенство (1.2.12), то  $\Sigma^+(M)$  относительно компактно.

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда из равенства (1.2.12) следует существование положительного числа  $L(\varepsilon)$  такого, что

$$(1.2.13) \quad M_\varepsilon := \bigcup_{t \geq L(\varepsilon)} \pi^t M \subseteq B(\omega(M), \varepsilon).$$

Обозначим через  $\lambda(K)$  меру некомпактности Куратовского множества  $K$ . Из включения (1.2.13) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda(\Sigma^+(M)) &= \lambda(\pi(M, [0, L(\varepsilon)]) \cup M_\varepsilon) = \\ &= \max(\lambda(\pi(M, [0, L(\varepsilon)])), \lambda(M_\varepsilon)) = \lambda(M_\varepsilon) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Откуда получаем равенство  $\lambda(\Sigma^+(M)) = 0$ . Лемма доказана.

**Теорема 1.2.5.** Пусть  $M \subseteq X$  непусто и относительно компактно. Для того чтобы множество  $\Sigma^+(M)$  было относительно компактно, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

- (1)  $\omega(M) \neq \emptyset$ ;
- (2)  $\omega(M)$  компактно;
- (3) имеет место равенство (1.2.12).

Сформулированное утверждение вытекает из следствия 2 и леммы 4.

### 1.3. Диссипативные динамические системы. Центр Левинсона

Пусть  $\mathfrak{M}$  - некоторое семейство подмножеств из  $X$ . Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем  $\mathfrak{M}$  диссипативной, если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $M \in \mathfrak{M}$  существует  $L(\varepsilon, M) > 0$  такое, что  $\pi^t M \subseteq B(K, \varepsilon)$  при всех  $t \geq L(\varepsilon, M)$ , где  $K$  некоторое фиксированное подмножество из  $X$ , зависящее только от  $\mathfrak{M}$ . При этом множество  $K$  назовем аттрактором для  $\mathfrak{M}$ .

Наиболее важными для приложений являются случаи, когда  $K$  ограничено или компактно и  $\mathfrak{M} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ , либо  $\mathfrak{M} = C(X)$ , либо  $\mathfrak{M} = \{B(x, \delta_x) \mid x \in X, \delta_x > 0\}$ , либо  $\mathfrak{M} = B(X)$ .

Систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем:

- поточечно диссипативной, если существует  $K \subseteq X$  такое, что при всех  $x \in X$

$$(1.3.14) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, K) = 0;$$

- компактно диссипативной, если равенство (1.3.14) имеет место равномерно по  $x$  на компактах из  $X$ ;
- локально диссипативной, если для любой точки  $p \in X$  существует  $\delta_p > 0$  такое, что равенство (1.3.14) имеет место равномерно по  $x \in B(p, \delta_p)$ ;
- ограниченно диссипативной, если равенство (1.3.14) имеет место равномерно по  $x$  на каждом ограниченном подмножестве из  $X$ .

Как уже отмечалось выше, для приложений наибольший интерес представляют случаи когда  $K$  компактно или ограничено. В соответствии с этим систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем поточечно  $k$  ( $b$ )-диссипативной, если  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна и множество  $K$ , фигурирующее в (1.3.14), компактно (ограничено). Аналогично определяются понятие компактно  $k$  ( $b$ )-диссипативной системы и другие типы  $k$  ( $b$ )-диссипативности.

Из приведенных выше определений следует, что ограниченная  $k$  ( $b$ )-диссипативность влечет локальную  $k$  ( $b$ )-диссипативность, локальная диссипативность влечет (см. лемму 5) компактную  $k$  ( $b$ )-диссипативность, а компактная  $k$  ( $b$ )-диссипативность влечет поточечную  $k$  ( $b$ )-диссипативность.

Как будет показано ниже, в общем случае, введенные нами классы диссипативных систем различны.

Нас будут интересовать следующие задачи:

- (1) Какова связь между различными типами диссипативности?
- (2) Условия при которых диссипативная система допускает максимальное компактное инвариантное множество.
- (3) Структура центра Левинсона (максимального компактного инвариантного аттрактора) для различных классов динамических систем.
- (4) Условия асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости центра Левинсона.

**Лемма 5.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально  $k$  ( $b$ )-диссипативна, тогда она компактно  $k$  ( $b$ )-диссипативна.

*Доказательство.* Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально  $k$  ( $b$ )-диссипативна. Тогда существует непустое компактное (ограниченное) множество  $K \subseteq X$ , такое что для любых  $\varepsilon > 0$  и  $x \in X$  существуют  $\delta(x) > 0$  и  $l = l(\varepsilon, x) > 0$  для которых

$$(1.3.15) \quad \rho(yt, K) < \varepsilon$$

при всех  $t \geq l$  и  $y \in B(x, \delta(x))$ .

Пусть  $M$  - некоторый компакт из  $X$ . Тогда для любого  $x \in M$  существуют  $\delta = \delta(x) > 0$  и  $l = l(\varepsilon, x) > 0$  такие, что имеет место неравенство (1.3.15). Рассмотрим открытое покрытие  $\{B(x, \delta(x)) \mid x \in M\}$  множества  $M$ . В силу компактности  $M$  и полноты пространства  $X$  из построенного покрытия множества  $M$  можно извлечь конечное подпокрытие  $\{B(x_i, \delta(x_i)) \mid i \in \overline{1, m}\}$ . Положим  $L(\varepsilon, M) = \max\{l(\varepsilon, x_i) \mid i \in \overline{1, m}\}$ , тогда из (1.3.15) следует, что  $\rho(xt, K) < \varepsilon$  при всех  $x \in M$  и  $t \geq L(\varepsilon, M)$ . Лемма доказана.

**Лемма 6.** Пусть  $M \subseteq X$  и множество  $\Sigma^+(M)$  относительно компактно. Если  $\omega(M) \subseteq M$ , то

$$(1.3.16) \quad \omega(M) = \bigcap \{\pi^t M \mid t \in \mathbb{T}\}.$$

*Доказательство.* Обозначим через  $I(M) := \bigcap \{\pi^t M \mid t \in \mathbb{T}\}$ . Ясно, что  $I(M) \subseteq \omega(M)$ . Покажем, что имеет место и обратное включение, если  $\omega(M) \subseteq M$ . Действительно, согласно лемме 3 и следствию 2 множество  $\omega(M)$  инвариантно и, следовательно,  $\omega(M) = \pi^t \omega(M) \subseteq \pi^t M$  для любого  $t \in \mathbb{T}$ . Откуда вытекает включение  $\omega(M) \subseteq I(M)$ . Лемма доказана.

**Замечание 1.3.3.** *Всюду ниже мы будем рассматривать в основном,  $k$ -диссипативные динамические системы. Поэтому значок  $k$ -мы будем опускать везде, где это не приведет к недоразумению.*

Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна и  $K$  - непустое компактное множество, являющееся аттрактором для компактных подмножеств  $X$ . Тогда для любого компакта  $M \subseteq X$  имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in M} \rho(xt, K) = 0.$$

Поэтому  $\omega(K) \subseteq K$  и, следовательно,

$$(1.3.17) \quad J := \omega(K) = \bigcap \{\pi^t K \mid t \in \mathbb{T}\}.$$

Покажем, что множество  $J$  не зависит от выбора множества  $K$ , притягивающего все компактные подмножества пространства  $X$ . Действительно, если мы обозначим через  $J(K) := \omega(K)$  и  $K_1$  - любое другое компактное множество, притягивающее все компакты из  $X$ , то найдется  $L = L(K, K_1, \varepsilon) > 0$ , что  $\pi^t J(K) \subseteq K_1$  и  $\pi^t J(K_1) \subseteq K$  при всех  $t \geq L$ . Так как  $J(K) = \omega(K) \subseteq K$  и  $J(K_1) = \omega(K_1) \subseteq K_1$ , то из инвариантности  $J(K_1)$  и  $J(K)$  следует, что  $J(K) \subseteq K_1$ ,  $J(K_1) \subseteq K$ ,  $J(K) \subseteq \pi^t K_1$  и  $J(K_1) \subseteq \pi^t K$  при всех  $t \in \mathbb{T}$  и, следовательно,  $J(K) = J(K_1)$ .

Таким образом множество  $J$ , определенное равенством (1.3.17), не зависит от выбора аттрактора  $K$ , а определяется только внутренними свойствами динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

Множество  $J$ , определенное равенством (1.3.17), следуя [30], назовем центром Левинсона компактно диссипативной динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

**Теорема 1.3.6.** [54],[88] *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  - компактно диссипативная система и  $J$  - ее центр Левинсона. Тогда:*

- (1)  $J$  - компактное инвариантное множество;
- (2)  $J$  орбитально устойчиво;
- (3)  $J$  является аттрактором семейства всех компактов  $X$ ;
- (4)  $J$  является максимальным компактным инвариантным множеством в  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из определения  $J$  и леммы 3.

Покажем, что множество  $J$  орбитально устойчиво. Допустив противное, мы получим существование  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  ( $\delta_n > 0$ ),  $x_n \in B(J, \delta_n)$  и

$t_n \rightarrow +\infty$  таких, что

$$(1.3.18) \quad \rho(x_n t_n, J) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $x_n \in B(J, \delta_n)$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  и  $J$  компактно, то, не умаляя общности рассуждений, последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. В силу компактной диссипативности системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  множество  $\Sigma^+(\{x_n\})$  относительно компактно. Заметим, что, наряду с множеством  $K$ , и множество  $K' = K \cup H^+(\{x_n\})$  является аттрактором для семейства всех компактов из  $X$  и, следовательно,  $\omega(K') = \omega(K) = J$ . В частности,  $\omega(H^+(\{x_n\})) \subseteq \omega(K) = J$ . В силу компактности  $H^+(\{x_n\})$  последовательность  $\{x_n t_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ , тогда с одной стороны,  $p \in \omega(H^+(\{x_n\}))$ . С другой стороны, из (1.3.18) следует, что  $p \notin J$ . Полученное противоречие доказывает второе утверждение теоремы.

Пусть теперь  $M \in C(X)$ . Тогда в силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  множество  $\Sigma^+(M)$  относительно компактно и согласно теореме 1.2.5 выполняются условия (1)-(2). В частности, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $L(\varepsilon) > 0$ , что  $\pi^t M \subseteq B(\omega(M), \varepsilon)$  при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . Наряду с множеством  $K$  и множество  $K' = K \cup \omega(M)$  является аттрактором, компактных подмножеств из  $X$  и, следовательно,  $\omega(K') = \omega(K) = J$ . Поэтому  $\omega(M) \subseteq \omega(K') = J$ , а значит

$$\beta(\pi^t M, J) \leq \beta(\pi^t M, \omega(M)) < \varepsilon,$$

т.е.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t M, J) = 0$  для любого  $M \subseteq C(X)$ , где  $\beta(A, B)$  - полуотклонение множества  $A$  от множества  $B$ .

Наконец, докажем четвертое утверждение теоремы. Пусть  $J_1$  - компактное инвариантное подмножество из  $X$ . Тогда согласно третьему утверждению теоремы имеем

$$(1.3.19) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t J_1, J) = 0.$$

В силу инвариантности  $J_1$  имеем  $\pi^t J_1 = J_1$  при всех  $t \in \mathbb{T}$ . Из последнего соотношения и равенства (1.3.19) получаем  $J_1 \subseteq J$ . Теорема полностью доказана.

#### 1.4. Диссипативные динамические системы в локально компактных пространствах

Как отмечалось выше, из локальной диссипативности системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  следует еще компактная диссипативность. С другой стороны, если пространство  $X$  локально компактно, то нетрудно заметить, что верно и обратное. Таким образом в локально компактных пространствах компактная и локальная диссипативности эквивалентны. На самом деле, как будет показано ниже, имеет место более сильное предложение, а именно: в локально компактных пространствах из поточечной диссипативности вытекает локальная диссипативность.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем:

- локально вполне непрерывной, если для любой точки  $p \in X$  существуют  $\delta = \delta(p) > 0$  и  $l = l(p) > 0$  такие, что  $\pi^l B(p, \delta)$  относительно компактно;
- слабо диссипативной, если существует непустой компакт  $K \subseteq X$  такой, что для любых  $\varepsilon > 0$  и  $x \in K$  найдется  $\tau = \tau(\varepsilon, x) > 0$ , для которого  $x\tau \in B(K, \varepsilon)$ . При этом компакт  $K$  назовем слабым аттрактором.

Отметим, что всякая динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ , заданная на локально компактном метрическом пространстве  $X$ , является локально вполне непрерывной.

**Лемма 7.** Пусть  $K \subseteq X$  - непустой компакт,  $p_i \in X$  и  $\delta_i > 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Если  $K \subseteq \cup\{B(p_i, \delta_i) \mid i = \overline{1, m}\}$ , то существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$(1.4.20) \quad B(K, \gamma) \subseteq \cup\{B(p_i, \delta_i) \mid i = \overline{1, m}\}.$$

*Доказательство.* Допустим, что каково бы ни было  $\gamma > 0$  включение (1.4.20) не имеет места. Тогда найдутся  $\gamma_n \downarrow 0$  и  $r_n \in B(K, \gamma_n)$  такие, что  $r_n \notin \cup\{B(p_i, \delta_i) \mid i = \overline{1, m}\}$ . Так как  $\gamma_n \downarrow 0$ , то для каждой точки  $r_n$  существует точка  $q_n \in K$  такая, что

$$(1.4.21) \quad \rho(r_n, q_n) < \gamma_n.$$

В силу компактности  $K$ , последовательность  $\{q_n\}$  можно считать сходящейся к некоторой точке  $q \in K$ . Тогда согласно (1.4.21)  $r_n \rightarrow q$ , что противоречит выбору последовательности  $\{r_n\}$ .

**Лемма 8.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  слабо диссипативна и локально вполне непрерывна, а  $K \subset X$  - слабый аттрактор  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ , тогда:

- 1) существуют  $a_0 > 0$  и  $l_0 > 0$  такие, что  $\pi^t B(K, a_0)$  относительно компактно для каждого  $t \geq l_0$ ;
- 2) существует  $L_0 \geq l_0$  такое, что при всех  $t \geq L_0$

$$\pi^t B(K, a_0) \subseteq \pi^{l_0} B(K, a_0).$$

*Доказательство.* Пусть  $x \in K$ . В силу локальной вполне непрерывности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  для точки  $x \in K$  существуют  $l(x) > 0$  и  $\delta_x > 0$  такие, что  $\pi^t B(x, \delta_x)$  относительно компактно при всех  $t \geq l(x)$ . Очевидно,  $\{B(x, \delta_x) \mid x \in K\}$  является открытым покрытием  $K$  и в силу его компактности из построенного покрытия можно извлечь конечное подпокрытие  $\{B(x_i, \delta_{x_i}) \mid i \in \overline{1, n}\}$ . Положим  $l_0 = \max\{l(x_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$ . Согласно лемме 7 существует  $a_0 > 0$  такое, что

$$K \subseteq B(K, a_0) \subseteq \cup\{B(x_i, \delta_{x_i}) \mid i \in \overline{1, n}\}.$$

Следовательно,

$$\pi^t B(K, a_0) \subseteq \cup\{\pi^t B(x_i, \delta_{x_i}) \mid i \in \overline{1, n}\},$$

поэтому  $\pi^t B(K, a_0)$  относительно компактно при всех  $t \geq l_0$ .

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть  $a_0$  и  $l_0$  – положительные числа из предыдущего пункта. Если допустить, что второе утверждение леммы неверно, то существуют  $\{x_k\} \subset B(K, a_0)$  и  $t_k \rightarrow +\infty$  такие, что

- (1)  $x_k \in \overline{B(K, a_0)}$ .
- (2)  $x_k t \in X \setminus B(K, a_0)$  при всех  $0 < t < t_k$ .
- (3)  $x_k t_k \in \overline{B(K, a_0)}$ .

Из 2) следует, что

4.  $x'_k t \in X \setminus B(K, a_0)$  при всех  $0 < t < t_k - l_0$ , где  $x'_k = x_k l_0$ .

В силу относительной компактности  $\pi^{l_0} B(K, a_0)$  последовательность  $x'_k = x_k l_0$  можно считать сходящейся. Положим  $x_0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k$ , тогда из 4. следует, что  $x_0 t \in X \setminus B(K, a_0)$  при всех  $0 < t < +\infty$  и, следовательно,  $\emptyset \neq \omega_{x_0} \subset X \setminus B(K, a_0)$ . Таким образом  $\omega_{x_0} \cap K = \emptyset$ , что противоречит слабой диссипативности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  и тому факту, что  $K$  является слабым аттрактором. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**Теорема 1.4.7.** *Для локально вполне непрерывных динамических систем слабая, поточечная, компактная и локальная диссипативность эквивалентны.*

*Доказательство.* Очевидно, для доказательства сформулированной теоремы достаточно показать, что из слабой диссипативности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  вытекает еч локальная диссипативность, если  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально вполне непрерывна. Пусть  $K \neq \emptyset$ , компактно и является слабым аттрактором  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ . Обозначим через  $a_0$  – число из леммы 8. Если  $x \in X$ , то существует  $\tau > 0$  такое, что  $x\tau \in B(K, a_0)$ . Пусть  $\gamma > 0$  таково, что  $B(x\tau, \gamma) \subset B(K, a_0)$ . В силу непрерывности отображения  $\pi^\tau : X \rightarrow X$  в точке  $x$  существует  $\alpha > 0$  такое, что

$$\pi^\tau B(x, \alpha) \subset B(x\tau, \gamma) \subset B(K, a_0).$$

Положим  $M = \omega(B(K, a_0))$ . Согласно лемм 8 и 3 множество  $M \neq \emptyset$ , компактно и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta(\pi^k B(x, \alpha), M) = 0.$$

Таким образом мы построили непустой компакт  $M \subset X$ , притягивающий каждую точку вместе с некоторой  $\varepsilon$ -окрестностью, то есть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна. Теорема доказана.

### 1.5. Критерии компактной диссипативности

Положим  $\Omega := \overline{\cup\{\omega_x | x \in X\}}$ . Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  – компактно диссипативная динамическая система и  $J$  – ее центр Левинсона. Ясно, что  $\Omega \subseteq J$ . Вместе с тем простые примеры показывают, что в общем случае,

$\Omega \neq J$ . В то же время множество  $\Omega$  является важной характеристикой диссипативной динамической системы. Например, из теоремы 1.4.7 следует, что в локально компактном пространстве  $X$  динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  диссипативна тогда и только тогда, когда  $\Omega$  непусто, компактно и  $\omega_x \neq \emptyset$  при всех  $x \in X$ . В связи с выше сказанным представляют интерес следующие вопросы:

- а. Каковы необходимые и достаточные условия совпадения множеств  $\Omega$  и  $J$ ?
- б. Какова связь между  $\Omega$  и  $J$  в общем случае?

Из приводимых ниже результатов вытекают ответы на поставленные вопросы.

Обозначим через

$$D^+(M) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\bigcup \{\pi^t B(M, \varepsilon) \mid t \geq 0\}},$$

$$J^+(M) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup \{\pi^\tau B(M, \varepsilon) \mid \tau \geq t\}},$$

$$D_x^+ := D^+(\{x\}) \text{ и } J_x^+ := J^+(\{x\}).$$

Непосредственно из определения  $D^+(M)$  и  $J^+(M)$  следует, что имеет место

**Лемма 9.** *Имеют место следующие утверждения:*

- (1)  $p \in D^+(M)$  ( $p \in J^+(M)$ ) тогда и только тогда, когда существуют  $\{x_n\}$  и  $\{t_n\}$  такие, что  $\rho(x_n, M) \rightarrow 0$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$  и  $x_n t_n \rightarrow p$ ;
- (2) множество  $D^+(M)$  ( $J^+(M)$ ) замкнуто и полуинвариантно.

**Лемма 10.** *Пусть  $y \in \omega_x$ , тогда  $J_x^+ \subseteq J_y^+$ .*

*Доказательство.* Пусть  $y \in \omega_x$  и  $p \in J_x^+$ , тогда существуют последовательности  $\{\tau'_n\} \rightarrow +\infty$ ,  $x\tau'_n \rightarrow y$ ,  $\{t'_n\}$  и  $\{x_n\}$  такие, что  $x_n \rightarrow x$ ,  $t'_n \rightarrow +\infty$  и  $x_n t'_n \rightarrow p$ . Согласно лемме 9 можно считать, что  $t'_n - \tau'_n > n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  рассмотрим последовательность  $\{x_n \tau'_k\}$ . По аксиоме непрерывности  $x_n \tau'_k \rightarrow x\tau'_k$  при  $n \rightarrow +\infty$  (при каждом  $k \in \mathbb{N}$ ) и, следовательно, для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдется  $n_k \geq k$  такое, что  $\rho(x_n \tau'_k, x\tau'_k) \leq k^{-1}$  при всех  $n \geq n_k$ . Так как  $x\tau'_n \rightarrow y$ , то  $\rho(y, x_{n_k} \tau'_k) \leq \rho(y, x\tau'_k) + \rho(x\tau'_k, x_{n_k} \tau'_k) \leq \rho(y, x\tau'_k) + k^{-1}$ . Заметим, что  $x_{n_k} t'_{n_k} = x_{n_k} \tau'_{n_k} (t'_{n_k} - \tau'_{n_k})$ ,  $x_{n_k} \tau'_{n_k} \rightarrow y$  и  $t'_{n_k} - \tau'_{n_k} > n_k \geq k$ . Отсюда следует, что  $p \in J_y^+$ , т.е.  $J_x^+ \subseteq J_y^+$ . Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 3.** *Если  $y \in \omega_x$ , то  $J_y^+ = D_y^+$ .*

*Доказательство.* Действительно, так как  $J_y^+ \subseteq D_y^+$ , то достаточно показать что  $D_y^+ \subseteq J_y^+$ . Заметим, что  $D_y^+ = \Sigma_y^+ \cup J_y^+$ . Поскольку  $y \in \omega_x$  то,  $\Sigma_y^+ \subseteq \omega_x \subseteq J_x^+ \subseteq J_y^+$ . Поэтому  $D_y^+ = \Sigma_y^+ \cup J_y^+ \subseteq J_y^+ \cup J_y^+ = J_y^+$ .



**Лемма 11.** Если  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  при  $n \rightarrow +\infty$  и  $x_n \in D_{y_n}^+$  ( $x_n \in J_{y_n}^+$ ), то  $x \in D_y^+$  ( $x \in J_y^+$ ).

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$ . Из включения  $x_n \in D_{y_n}^+$  ( $x_n \in J_{y_n}^+$ ) при каждом  $n$  следует существование точки  $z_n \in B(y_n, \frac{\delta}{2})$  и числа  $t_n \geq 0$  ( $t_n \geq n$ ) таких, что

$$(1.5.22) \quad \rho(x_n, z_n t_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из  $x_n \rightarrow x$  и  $y_n \rightarrow y$  вытекает существование такого натурального  $n_0$ , что при всех  $n > n_0$  одновременно выполнены неравенства

$$(1.5.23) \quad \rho(y, y_n) < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из  $z_n \in B(y_n, \frac{\delta}{2})$  и (1.5.23) получаем  $\rho(y, z_n) < \delta$ , а из (1.5.22) и (1.5.23) следует неравенство  $\rho(x, z_n t_n) < \varepsilon$ , т.е.  $x \in D_y^+$  ( $x \in J_y^+$ ). Лемма доказана.

**Лемма 12.** Если множество  $M \subseteq X$  компактно, то  $D^+(M) = \cup\{D_x^+ | x \in M\}$  и  $J^+(M) = \cup\{J_x^+ | x \in M\}$ .

*Доказательство.* Так как  $\cup\{D_x^+ | x \in M\} \subseteq D^+(M)$ , то для доказательства леммы достаточно показать, что  $D^+(M) \subseteq \cup\{D_x^+ | x \in M\}$ . Пусть  $y \in D^+(M)$ , тогда существуют  $\{x_n\}$  и  $t_n \geq 0$  такие, что  $\rho(x_n, M) \rightarrow 0$  и  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ . Так как  $M$  компактно, то последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $x := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  тогда,  $x \in M$ . Итак,  $x_n \rightarrow x$ ,  $y \in D_x^+$  и  $y_n \rightarrow y$  ( $y_n := x_n t_n$ ). Согласно лемме 11  $y \in D_x^+ \subseteq \cup\{D_x^+ | x \in M\}$ . Аналогично устанавливается и второе равенство. Лемма доказана.

**Лемма 13.** Если  $M$  - непустое компактное квазиинвариантное множество, то  $M \subseteq J^+(\Omega)$ .

*Доказательство.* Пусть  $M$  - непустое компактное квазиинвариантное множество и  $x \in M$ , тогда согласно теореме 1.1.2 существует целая траектория  $\varphi : S \rightarrow X$  такая, что  $\varphi(0) = x$  и  $\varphi(t) \in M$  при всех  $t \geq 0$ . Так как  $\alpha_{\varphi_x} \neq \emptyset$ , замкнуто и  $\alpha_{\varphi_x} \subseteq M$ , то оно компактно. Пусть  $y \in \alpha_{\varphi_x}$ , тогда  $\omega_y \subseteq \alpha_{\varphi_x}$ . Если  $p \in \omega_y \subseteq \Omega$ , то существует  $t_n \rightarrow +\infty$  такая, что  $x_k = \varphi(-t_k) \rightarrow p$  и  $x = \pi^{t_k} \varphi(-t_k)$  и, следовательно,  $x \in J_p^+ \subseteq J^+(\Omega)$ . Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Если  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна,  $\Omega \neq \emptyset$  и компактно, то  $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$ .

*Доказательство.* Действительно, так как  $\omega_x$  инвариантно при любом  $x \in X$  и  $\Omega = \overline{\cup\{\omega_x | x \in X\}}$ , то  $\Omega$  также инвариантно и согласно лемме 13  $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$ .

**Лемма 14.** Если динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна и  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) компактно, то  $D^+(\Omega) = D^+(D^+(\Omega))$  ( $J^+(\Omega) = J^+(J^+(\Omega))$ ).

*Доказательство.* Так как  $\Omega \subseteq D^+(\Omega)$ , то  $D^+(D^+(\Omega)) \subseteq D^+(\Omega)$  и, следовательно, для доказательства леммы 14 достаточно установить обратное включение  $D^+(D^+(\Omega)) \subseteq D^+(\Omega)$ . Пусть  $x \in D^+(\Omega)$ , тогда  $\omega_x \subseteq \Omega$  и, если  $y \in \omega_x \subseteq \Omega$ , то согласно лемме 10 и следствию 3  $J_x^+ \subseteq J_y^+ = D_y^+ \subseteq D^+(\Omega)$ . Так как  $D_x^+ = \Sigma_x^+ \cup J_x^+ \subseteq D^+(\Omega) \cup D^+(\Omega) = D^+(\Omega)$  для любого  $x \in D^+(\Omega)$  и  $D^+(\Omega)$  компактно, то согласно лемме 12  $D^+(D^+(\Omega)) = \cup\{D_x^+ | x \in D^+(\Omega)\} \subseteq D^+(\Omega)$ . Аналогично доказывается и второе равенство, но при этом надо учесть, что  $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$ . Лемма доказана.

**Лемма 15.** *Если  $(X, T, \pi)$  компактно диссипативна, то  $D^+(D^+(\Omega)) = D^+(\Omega)$  ( $J^+(J^+(\Omega)) = J^+(\Omega)$ ).*

*Доказательство.* Пусть  $(X, T, \pi)$  компактно диссипативна и  $J$  - ее центр Левинсона, тогда  $\Omega \subseteq J$ . В силу орбитальной (асимптотической) устойчивости  $J$  имеем  $D^+(J) = J$  ( $J^+(J) \subseteq J$ ) и, следовательно,  $D^+(\Omega) \subseteq J$  ( $J^+(\Omega) \subseteq J$ ). Так как  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) замкнуто и  $J$  компактно, то  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) также компактно и для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на лемму 14.

Известно [140], что для компактного полуинвариантного множества  $M$  равенство  $D^+(M) = M$  имеет место тогда и только тогда, когда  $M$  орбитально устойчиво ( $X$  локально компактно и  $T = \mathbf{R}$ ). Ниже нами будет показано, что это утверждение сохраняется и для компактно диссипативных систем на произвольном метрическом пространстве как с непрерывным, так и с дискретным времени. А именно, имеет место следующая

**Лемма 16.** *Пусть  $(X, T, \pi)$  компактно диссипативна. Для того чтобы компактное полуинвариантное множество  $M \subseteq X$  было орбитально устойчивым, необходимо и достаточно выполнение равенства  $D^+(M) = M$ .*

*Доказательство.* Если  $M$  орбитально устойчиво, то стандартными рассуждениями (см., например, [140]) показывается, что  $D^+(M) = M$  для любых систем (в том числе и диссипативных).

Пусть теперь  $D^+(M) = M$  и покажем, что  $M$  орбитально устойчиво. Если допустить противное, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $x_n \rightarrow x \in M$  и  $t_n \geq 0$  такие, что

$$(1.5.24) \quad \rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0.$$

Так как система  $(X, T, \pi)$  компактно диссипативна, то множество  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно, где  $K := \{x_n\}$  и, следовательно, последовательность  $\{x_n t_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $y := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ , тогда, с одной стороны  $y \in D^+(M) = M$ . С другой стороны, из (1.5.24) следует, что  $\rho(y, M) \geq \varepsilon_0 > 0$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

**Теорема 1.5.8.** *Если динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна, то  $J = J^+(\Omega)$ .*

*Доказательство.* Так как  $\Omega \subseteq J$  и  $J$  асимптотически устойчиво, то  $J^+(\Omega) \subseteq J^+(J)$ . Из лемм 15 и 16 следует, что множество  $J^+(\Omega)$  орбитально устойчиво, так как  $D^+(J^+(\Omega)) = J^+(\Omega)$ . Пусть  $x \in J \setminus J^+(\Omega)$  и  $d_x := \rho(x, J^+(\Omega)) \geq 0$ . Если  $d_x = 0$  для всех  $x \in J \setminus J^+(\Omega)$ , то теорема доказана. Допустим, что для некоторого  $x_0 \in J \setminus J^+(\Omega)$  имеем  $d_{x_0} > 0$ . Для числа  $0 < \varepsilon < 2^{-1}d_{x_0}$  выберем  $\delta(\varepsilon) > 0$  из условия орбитальной устойчивости  $J^+(\Omega)$ . Так как  $x_0 \in J$ , то согласно теореме 1.1.2 существует непрерывное отображение  $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow J$  такое, что  $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$  при всех  $t \in \mathbb{T}$ ,  $s \in \mathbb{S}$  и  $\varphi(0) = x_0$ . Так как  $J$  компактно, то множество  $\alpha$  предельных точек  $\alpha_{\varphi_{x_0}}$  движения  $\varphi$  непусто, компактно и  $\alpha_{\varphi_{x_0}} \cap \Omega \neq \emptyset$  и, следовательно, существует  $t_n \rightarrow -\infty$  такая, что  $\rho(x_0 t_n, \Omega) \rightarrow 0$ . Выберем  $n_0$  так, чтобы  $\rho(x_0 t_n, \Omega) < \delta$  ( $n \geq n_0$ ), тогда имеем  $\rho(x_0 t_n, J^+(\Omega)) < \delta$  и, следовательно,  $\rho(x_0(t + t_n), J^+(\Omega)) < \varepsilon$  при всех  $t_0 \geq 0$  и  $n \geq n_0$ . В частности, при  $t = -t_n$  имеем  $d_{x_0} = \rho(x_0, J^+(\Omega)) < \varepsilon < 2^{-1}d_{x_0}$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**СЛЕДСТВИЕ 5.** *В условиях теоремы 1.5.8 имеет место равенство  $J = D^+(\Omega)$ .*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 1.5.8 с учетом того, что  $J \subseteq J^+(\Omega) \subseteq D^+(\Omega) \subseteq J$ .

**СЛЕДСТВИЕ 6.** *Если  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна, то  $J = \Omega$  тогда и только тогда, когда  $\Omega$  орбитально устойчиво.*

*Доказательство.* Это утверждение вытекает из теоремы 1.5.8 и леммы 16.

**Теорема 1.5.9.** *Для того чтобы динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была компактно диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовало непустое компактное множество  $K \subseteq X$ , удовлетворяющее условию: для любых  $\varepsilon > 0$  и  $x \in X$  существуют  $\delta(\varepsilon, x) > 0$  и  $l(\varepsilon, x) > 0$  такие, что*

$$(1.5.25) \quad \pi^t B(x, \delta(\varepsilon, x)) \subseteq B(K, \varepsilon)$$

*при всех  $t \geq l(\varepsilon, x)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна,  $J$  - ее центр Левинсона,  $\varepsilon > 0$  и  $x \in X$ . Согласно теореме 1.3.6  $J$  орбитально устойчиво. Обозначим через  $\gamma(\varepsilon) > 0$  - число, определенное по  $\varepsilon$  из условия орбитальной устойчивости  $J$ . Множество  $J$  является асимптотически устойчивым в целом, поэтому для  $x \in X$  и  $\gamma(\varepsilon) > 0$  найдется  $l(\varepsilon, x)$  такое, что  $xt \in B(J, \gamma)$  при всех  $t \geq l(\varepsilon, x)$ . Так как  $B(J, \gamma)$  открыто, то существует  $\alpha = \alpha(\varepsilon, x) > 0$  для которого  $B(\pi(x, l(\varepsilon, x)), \alpha) \subseteq B(J, \gamma)$ . В

силу непрерывности отображения  $\pi(l(\varepsilon, x), \cdot) : X \longrightarrow X$  для всех  $x \in X$  и  $\alpha > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  такое, что

$$(1.5.26) \quad \pi(l(\varepsilon, x), B(x, \delta)) \subseteq B(\pi(l(\varepsilon, x), x), \alpha).$$

Из включения (1.5.26) и в силу выбора  $\gamma$  имеем  $\pi^t B(x, \delta) \subseteq B(J, \varepsilon)$  при всех  $t \geq l(\varepsilon, x)$ .

Пусть теперь  $K \subseteq X$  - непустой компакт, удовлетворяющий условию (1.5.25). Если  $\varepsilon > 0$  и  $M$  - некоторый компакт из  $X$ , то для любого  $x \in M$  существуют  $\delta(\varepsilon, x) > 0$  и  $l(\varepsilon, x) > 0$  такие, что имеет место (1.5.25). Рассмотрим открытое покрытие  $\{B(x, \delta(\varepsilon, x)) \mid x \in M\}$  множества  $M$ . В силу компактности  $M$  и полноты пространства  $X$  из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие  $\{B(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)) \mid i \in \overline{1, n}\}$ . Положим  $L(\varepsilon, M) := \max\{l(\varepsilon, x_i) \mid i \in \overline{1, n}\}$ . Из (1.5.25) следует, что  $\pi^t M \subseteq B(K, \varepsilon)$  при всех  $t \geq L(\varepsilon, M)$ . Теорема доказана.

**Теорема 1.5.10.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна. Для того чтобы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была компактно диссипативной, необходимо и достаточно существование непустого компактного множества  $M$ , обладающего следующими свойствами:*

- (1)  $\Omega \subseteq M$ ;
- (2)  $M$  орбитально устойчиво;

При этом  $J \subseteq M$ , где  $J$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

*Доказательство.* Необходимость условий теоремы очевидна, поэтому для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать достаточность условий а. и б. Рассуждая также, как и в первой части теоремы 1.5.9, устанавливаем что для любого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in X$  существуют  $\delta(\varepsilon, x) > 0$  и  $l(\varepsilon, x) > 0$ , удовлетворяющие условию (1.5.25). При этом в качестве  $K$  следует взять множество  $M$  из теоремы 1.5.10. Применяя теорему 1.5.9, получаем компактную диссипативность  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

Покажем теперь, что  $J \subseteq M$ . Действительно, так как  $\Omega \subseteq M$  и  $M$  орбитально устойчиво, то  $D^+(\Omega) \subseteq D^+(M) = M$ . Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на следствие 5.

**Теорема 1.5.11.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна. Для того чтобы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была компактно диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы множество  $D^+(\Omega)$  ( $J^+\Omega$ ) было компактным и орбитально устойчивым. При этом  $J = D^+(\Omega)$  ( $J = J^+(\Omega)$ ), где  $J$  - центр Левинсона динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теорем 1.5.8, 1.5.9, 1.5.10 и следствия 5.

**Теорема 1.5.12.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна. Для того чтобы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была компактно диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы  $\Sigma^+(K)$  было относительно компактным, каков бы ни был компакт  $K \subseteq X$ .*

*Доказательство.* Необходимость условия теоремы вытекает из теоремы 1.2.5. Докажем достаточность условия теоремы. Прежде всего заметим, что в условиях теоремы множество  $J^+(\Omega) \neq \emptyset$  и компактно. Действительно, согласно следствию 4  $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$  и, следовательно,  $J^+(\Omega) \neq \emptyset$ . Покажем теперь, что  $J^+(\Omega)$  компактно. Пусть  $\{y_k\} \subseteq J^+(\Omega)$  и  $\varepsilon_k \downarrow 0$ , тогда существуют  $p_k \in \Omega$ ,  $y_k \in J_{p_k}^+$ ,  $\bar{p}_k \in B(p_k, \varepsilon_k)$  и  $t_k > 0$  такие, что

$$(1.5.27) \quad \rho(y_k, \bar{p}_k t_k) < \varepsilon_k.$$

Так как  $\{p_k\} \subseteq \Omega$ ,  $\Omega$  компактно и  $\varepsilon_k \downarrow 0$ , то последовательность  $\{p_k\}$  относительно компактна и, следовательно, в условиях теоремы последовательность  $\{\bar{p}_k t_k\}$  также относительно компактна. Тогда из неравенства (1.5.27) следует, что последовательность  $\{y_k\}$  относительно компактна, т.е.  $J^+(\Omega)$  компактно.

Покажем, что  $J^+(\Omega)$  притягивает все компакты из  $X$ .

Пусть  $K$  - произвольный непустой компакт из  $X$ . Тогда в условиях теоремы множество  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно и согласно теореме 1.2.5 множество  $\Omega(K)$  непусто, компактно и имеет место равенство

$$(1.5.28) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t K, \Omega(K)) = 0.$$

Согласно лемме 3 множество  $\Omega(K)$  инвариантно и по лемме 13  $\Omega(K) \subseteq J^+(\Omega)$  и, следовательно, из (1.5.28) следует, что  $J^+(\Omega)$  притягивает  $K$ . Теорема доказана.

В заключение этого параграфа приведем пример поточечно диссипативной динамической системы, которая не является компактно диссипативной.

**Пример 6.** Пусть  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная функция, равная нулю на  $\mathbb{R}_-$  и определенная на  $\mathbb{R}_+$  равенством

$$(1.5.29) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \exp \left\{ [(t-1)^2 - 1]^{-1} + 1 \right\} & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Положим  $X = \{\varphi(at+b) \mid a, b, t \in \mathbb{R}\}$ . Заметим, что  $X \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  является замкнутым и инвариантным относительно сдвигов подмножеством  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  и, следовательно, динамическая система Бebutова индуцирует на  $X$  групповую динамическую систему сдвигов  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ . Отметим некоторые свойства построенной динамической системы:

- (1) какова бы ни была функция  $\psi \in X$  множество  $\{\sigma(t, \psi) : t \in \mathbb{R}\}$  относительно компактно и существует  $c = c(\psi) \in [0, 1]$  такое, что  $\omega_\psi = \alpha_\psi = \{\varphi_c\}$ , где  $\varphi_c(t) = c$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  поточечно диссипативна и  $\Omega = \{\varphi_c \mid 0 \leq c \leq 1\}$ ;
- (3)  $D^+(\Omega) = X$ .

Заметим, что  $X$  некомпактно. Действительно, если бы это было не так, то согласно теореме Асколи-Арцеля функции из  $X$  были бы равномерно непрерывными на отрезке  $[0, 2]$ . Построим подмножество в  $X$ ,

которое отмеченным свойством не обладает. Пусть  $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$ . Положим  $t_n^1 = n^{-1}$  и  $t_n^2 = 2n^{-1}$ . Очевидно,  $t_n^1, t_n^2 \in [0, 2]$ ,  $t_n^1 - t_n^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  и  $|\varphi_n(t_n^1) - \varphi_n(t_n^2)| = |\varphi(1) - \varphi(2)| = 1$ , т.е. последовательность  $\{\varphi_n\}$  не является равномерно непрерывной на отрезке  $[0, 2]$ . Таким образом,  $D^+(\Omega) = X$  не является компактным и согласно теореме 1.5.11 динамическая система  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  не является компактно диссипативной.

В связи с примером 6 отметим, что согласно теореме 1.5.11 примеры поточечно диссипативных, но не компактно диссипативных динамических систем могут быть двух типов: либо  $D^+(\Omega)$  некомпактно (как в примере 6), либо  $D^+(\Omega)$  компактно, но не является орбитально устойчивым. То, что этот случай реализуется, показывает приводимый ниже пример.

**Пример 7.** Пусть  $\varphi$  - функция, определенная в предыдущем примере. Положим  $X = \{\varphi(at + b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ и } t \in \mathbb{R}\}$ . Через  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  обозначим полугрупповую динамическую систему сдвигов на  $X$ . Отметим следующие свойства построенной динамической системы:

- (1) какова бы ни была функция  $\psi \in X$ , множество  $\{\sigma(t, \psi) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$  относительно компактно и существует  $c \in [0, 1]$  такое, что  $\omega_\psi = \{\varphi_c\}$ ;
- (2)  $D^+(\Omega) = \Omega$  и, следовательно,  $D^+(\Omega)$  компактно, так как  $\Omega = \{\varphi_c \mid 0 \leq c \leq 1\}$ .

Покажем, что  $D^+(\Omega)$  не является орбитально устойчивым. Очевидно для доказательства этого утверждения достаточно построить последовательность  $\{\psi_n\} \subseteq X$  и  $t_n \geq 0$  так, что  $\psi_n \rightarrow \psi_0 \in \Omega$  и

$$\inf\{\rho(\sigma(t_n, \psi_n), \Omega) \mid n \geq 0\} > 0.$$

Положим  $\psi_n(t) = \varphi(nt + 1 - n^2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) и  $t_n = n$ . Тогда  $\sigma(t_n, \psi_n)(s) = \varphi(ns + 1)$  является расходящейся в  $X$  и, значит,

$$\inf\{\rho(\sigma(t_n, \psi_n), \Omega) \mid n \geq 0\} > 0$$

(на самом деле последовательность  $\varphi(ns + 1)$  не содержит подпоследовательностей, сходящихся в  $X$ ).

Таким образом, для полугрупповой поточечно диссипативной динамической системы  $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$  множество  $D^+(\Omega)$  компактно, но не орбитально устойчиво. Согласно теореме 1.5.11  $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$  не является компактно диссипативной.

**Замечание 1.5.4.** Как было доказано в лемме 16), для компактного полуинвариантного множества  $M \subseteq X$  равенство  $D^+(M) = M$  гарантирует орбитальную устойчивость  $M$ , если динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна. Пример 7 показывает, что для поточечно диссипативных систем аналогичный факт не имеет места, т.е. в этом случае известная теорема Ура [140] не верна.

### 1.6. Локально диссипативные динамические системы

**Теорема 1.6.13.** *Для того чтобы компактно диссипативная динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была локально диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки  $p \in X$  существовало  $\delta_p > 0$  такое, что*

$$(1.6.30) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), J) = 0,$$

где  $J$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

*Доказательство.* Достаточность теоремы очевидна. Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативная динамическая система. Тогда существует непустой компакт  $K \subseteq X$  такой, что для любой точки  $p \in X$  найдется  $\delta_p > 0$ , для которого имеет место равенство

$$(1.6.31) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K) = 0.$$

Из леммы 3 следует, что множество  $K_p := \omega(B(p, \delta_p))$  непусто, компактно, инвариантно и

$$(1.6.32) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K_p) = 0.$$

Из равенства (1.6.31) следует включение  $K_p \subseteq K$  и, следовательно,  $\omega(K_p) \subseteq \omega(K) \subseteq J$ . В силу инвариантности множества  $K_p$  имеем  $K_p = \omega(K_p)$ , поэтому  $K_p \subseteq J$ . Из последнего включения и равенства (1.6.32) следует равенство (1.6.30). Теорема доказана.

**Теорема 1.6.14.** *Для того чтобы компактно диссипативная динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была локально диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы ее центр Левинсона  $J$  был равномерно притягивающим множеством.*

*Доказательство.* Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна,  $J$  - ее центр Левинсона и  $p \in J$ . Тогда согласно теореме 1.6.13 существует  $\delta_p > 0$  такое, что имеет место равенство (1.6.30). В силу компактности  $J$  из его открытого покрытия  $\{B(p, \delta_p) \mid p \in J\}$  можно извлечь конечное подпокрытие  $\{B(p_i, \delta_{p_i}) \mid i \in \overline{1, m}\}$ . Согласно лемме 7 существует  $\gamma > 0$  такое, что  $B(J, \gamma) \subset U\{B(p_i, \delta_{p_i}) \mid i \in \overline{1, m}\}$ . Очевидно, для найденного  $\gamma > 0$  имеет место равенство

$$(1.6.33) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(J, \gamma), J) = 0,$$

т.е.  $J$  является равномерно притягивающим множеством.

Пусть теперь  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна и ее центр Левинсона  $J$  является равномерно притягивающим множеством, т.е. существует  $\gamma > 0$  такое, что имеет место равенство (1.6.33). Для  $x \in X$  существует  $l = l(x) > 0$ , для которого

$$(1.6.34) \quad \rho(xt, J) < \gamma$$

при всех  $t \geq l$ . Согласно (1.6.33) для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно подобрать  $L(\varepsilon) > 0$  таким образом, что

$$(1.6.35) \quad \rho(yt, J) < \varepsilon$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$  и  $y \in B(J, \gamma)$ . Так как  $B(J, \gamma)$  открыто, то в силу (1.6.34) можно подобрать  $\eta = \eta(x) > 0$  так, чтобы имело место включение  $B(xl, \eta) \subset B(J, \gamma)$ . В силу непрерывности отображения  $\pi(l, \cdot) : X \rightarrow X$  для  $\eta$  можно найти  $\delta = \delta_x > 0$  такое, что  $yl \in B(xl, \eta)$  и  $yl \in B(J, \gamma)$  при всех  $y \in B(x, \delta_x)$ . В силу (1.6.35)  $y(t+l) \in B(J, \varepsilon)$  при всех  $t \geq L(\varepsilon)$  и  $y \in B(x, \delta_x)$ . Положим  $L(\varepsilon, x) = l(x) + L(\varepsilon)$ , тогда  $yt \in B(J, \varepsilon)$  при всех  $t \geq L(\varepsilon, x)$  и  $y \in B(x, \delta_x)$ , т.е.  $(X, T, \pi)$  локально диссипативна. Теорема полностью доказана.

**Лемма 17.** Пусть  $M \subseteq X$  - непустое компактное полуинвариантное множество в  $(X, T, \pi)$ . Если  $M$  является равномерно притягивающим, то оно орбитально устойчиво.

*Доказательство.* Допустим, что условия леммы выполнены, а  $M$  не является орбитально устойчивым. Тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $x_n \in B(M, \delta_n)$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(1.6.36) \quad \rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $M$  является равномерно притягивающим, то для числа  $\varepsilon_0$  найдется положительное число  $L(\varepsilon_0)$  такое, что

$$(1.6.37) \quad \rho(xt, M) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

при всех  $x \in B(M, \gamma)$  и  $t \geq L(\varepsilon_0)$ , где  $\gamma > 0$  таково, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(M, \gamma), M) = 0.$$

Так как  $x_n \in B(M, \delta_n)$  и  $\delta_n \downarrow 0$ , то последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , тогда  $x_0 \in M$  и  $t_n \geq L(\varepsilon_0)$  для достаточно больших  $n$ . Согласно (1.6.37) имеет место неравенство

$$(1.6.38) \quad \rho(x_n t_n, M) < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Неравенства (1.6.36) и (1.6.38) противоречивы. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**Теорема 1.6.15.** Для того чтобы поточечно диссипативная динамическая система  $(X, T, \pi)$  была локально диссипативной, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

- (1)  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) компактно;
- (2)  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) является равномерно притягивающим множеством.



*Доказательство.* Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна и выполнены условия 1. и 2. теоремы. Так как по лемме 17 множество  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) орбитально устойчиво, то согласно теореме 1.5.11 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна и  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) совпадает с ее центром Левинсона  $J$ . Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 1.6.14.

Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна. Так как по лемме 5 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна, то согласно теореме 1.5.11  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\Omega)$ ) компактно и орбитально устойчиво. По теореме 1.5.8 и следствию 5 имеет место равенство  $J = D^+(\Omega)$  ( $J = J^+(\Omega)$ ), где  $J$  центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ . Из теоремы 1.6.14 следует, что  $D^+(\Omega)$  ( $J^+(\omega)$ ) является равномерно притягивающим множеством. Теорема полностью доказана.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем локально асимптотически уплотняющей, если для любой точки  $p \in X$  существуют  $\delta_p > 0$  и непустой компакт  $K_p \subseteq X$  такие, что

$$(1.6.39) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K_p) = 0.$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.6.16.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна. Для того чтобы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была локально диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была локально асимптотически уплотняющей.*

*Доказательство.* Если  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна, то, очевидно,  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является и асимптотически уплотняющей. Предположим, что  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна и является локально асимптотически уплотняющей и покажем, что  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна. Прежде всего докажем, что для любого компакта  $K \in C(X)$  множество  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно. Пусть  $p \in K$ ,  $\delta_p > 0$  и  $K_p \in C(X)$  таковы, что выполнено равенство (1.6.39). В силу компактности  $K$  из его открытого покрытия  $\{B(p, \delta_p) \mid p \in K\}$  можно извлечь конечное подпокрытие  $\{B(p_i, \delta_{p_i}) \mid 1 \leq i \leq n\}$ . Положим  $W = K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \dots \cup K_{p_n}$ , тогда  $W$  компактно и

$$(1.6.40) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t K, W) = 0.$$

Из равенств (1.6.40) следует относительная компактность  $\Sigma^+(K)$ . Согласно теореме 1.5.12 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна. Пусть теперь  $J$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ;  $p \in J$ ,  $\delta_p > 0$  и  $K_p \in C(X)$  таковы, что имеет место равенство (1.6.39). По лемме 3 множество  $\omega(B(p, \delta_p)) \neq \emptyset$ , компактно, инвариантно и имеет место равенство

$$(1.6.41) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), \omega(B(p, \delta_p))) = 0.$$

Так как  $J$  является максимальным компактным инвариантным множеством  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ , то  $\omega(B(p, \delta_p)) \subseteq J$  и из равенства (1.6.41) вытекает

равенство (1.6.30). Согласно теореме 1.6.13 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна. Теорема доказана.

В конце этого параграфа приведем пример компактно диссипативной динамической системы, которая не является локально диссипативной.

**Пример 8.** Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$(1.6.42) \quad \dot{x} = Ax$$

в гильбертовом пространстве  $H := L_2[0, 1]$  с непрерывным оператором  $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ , определенным равенством  $(A\varphi)(\tau) = -\tau\varphi(\tau)$  для любых  $\tau \in [0, 1]$  и  $\varphi \in L_2[0, 1]$ . Заметим, что спектр оператора  $A$  совпадает с отрезком  $[-1, 0]$ . Обозначим через  $U(t)$  - оператор Коши уравнения (1.6.42), очевидно,  $(U(t)\varphi)(\tau) = e^{-\tau t}\varphi(\tau)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in [0, 1]$  и  $\varphi \in L_2[0, 1]$  (см. [59, с.404]). Обозначим через  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  динамическую систему, порожденную уравнением (1.6.42), т.е.  $\pi(\varphi, t) := U(t)\varphi$  для любых  $t \in \mathbb{R}$  и  $\varphi \in L_2[0, 1]$ . По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\|\pi(t, \varphi)\|^2 = \int_0^1 e^{-2\tau t} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0$$

при всех  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому, динамическая система  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  поточечно диссипативна и  $\omega_\varphi = \{0\}$  для любого  $\varphi \in H$ , следовательно,

$$\Omega = \overline{\cup\{\omega_\varphi | \varphi \in H\}} = \{0\}.$$

Далее, заметим что

$$\|\pi(t, \varphi)\|^2 = \int_0^1 e^{-2\tau t} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \leq \int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau = \|\varphi\|^2$$

при всех  $t \geq 0$ . Согласно теореме 1.5.11 динамическая система  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  компактно диссипативна и ее центр Левинсона  $J = \{0\}$ .

Покажем, что построенная динамическая система  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  не является локально диссипативной. Действительно, если бы  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  была локально диссипативной, то согласно теореме 1.6.14 существовало бы  $\gamma > 0$  такое, что

$$(1.6.43) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\| \leq \gamma} \|\pi(t, \varphi)\| = 0.$$

В силу линейности системы  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  равенство (1.6.43) эквивалентно условию

$$(1.6.44) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\pi(t, \varphi)\| = 0.$$

Определим функцию  $\varphi_n \in H$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) по следующему правилу:  $\varphi_n(\tau) := \sqrt{n}\chi_n(\tau)$  при всех  $\tau \in [0, 1]$ , где  $\chi_n$  - характеристическая функция множества  $[0, n^{-1}] \subseteq [0, 1]$ . Заметим, что  $\|\varphi_n\| = 1$  и

$$(1.6.45) \quad \begin{aligned} \|\pi(t_n, \varphi_n)\|^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n e^{-2\tau t} d\tau \\ &= \frac{n}{2t_n} \left[ 1 - e^{-\frac{2t_n}{n}} \right] = 1 - e^{-1} \neq 0, \end{aligned}$$

где  $t_n = \frac{n}{2}$ . Однако (1.6.44) и (1.6.45) не могут иметь места одновременно. Полученное противоречие показывает, что наше допущение о локальной диссипативности  $(H, \mathbb{R}, \pi)$  неверно. Нужный пример построен.

Непустое компактное множество  $I \subset X$  назовем глобальным аттрактором динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ , если выполнены следующие условия:

- a.  $I$  инвариантно относительно  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ;
- b.  $I$  притягивает все ограниченные подмножества из  $X$ .

**Теорема 1.6.17.** *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  допускает компактный глобальный аттрактор;
- (2) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  ограничено  $k$ -диссипативна;
- (3) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $k$ -диссипативна и ее центр Левинсона  $J$  притягивает все ограниченные подмножества  $X$ .

*Доказательство.* Импликация 1.  $\Rightarrow$  2. очевидна. Покажем, что из 2. следует 3.. Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  ограничено  $k$ -диссипативна, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $k$ -диссипативна. Обозначим через  $J$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  и покажем, что  $J$  притягивает все ограниченные подмножества из  $X$ . Пусть  $B \in B(X)$  и  $K$  - непустой компакт из  $X$ , притягивающий все ограниченные подмножества из  $X$ , тогда

$$(1.6.46) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B, K) = 0.$$

Из равенства (1.6.46) и леммы 3 следует, что  $\omega(B) \neq \emptyset$ , компактно, инвариантно и

$$(1.6.47) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B, \omega(B)) = 0.$$

Согласно теореме 1.3.6  $J$  является максимальным компактным инвариантным множеством  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  и, следовательно,  $\omega(B) \subseteq J$ . Из последнего включения и равенства (1.6.47) следует, что

$$(1.6.48) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B, J) = 0.$$

Наконец, очевидно, из 3. следует 1.. Теорема доказана.

Следуя [42] будем говорить, что динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  удовлетворяет условию Ладыженской, если для любого ограниченного множества  $B \subseteq X$  существует непустой компакт  $K \subseteq X$  такой, что имеет место равенство (1.6.46).

**Теорема 1.6.18.** *Следующие условия эквивалентны:*

- (1)  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  ограничено  $k$ -диссипативна;
- (2)  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $b$ -диссипативна и удовлетворяет условию Ладыженской.

*Доказательство.* Согласно теореме 1.6.17 из а. следует б. Докажем теперь, что из б. следует а. Прежде всего заметим, что из условия б. следует компактная  $k$ -диссипативность. Пусть  $K \in C(X)$ , тогда из условия Ладыженской, леммы 3 и теоремы 1.2.5 вытекает относительная компактность  $\Sigma^+(K)$ . Согласно теореме 1.5.12 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $k$ -диссипативна. Обозначим через  $J$  центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  и пусть  $B \in B(X)$ . Тогда в силу условия Ладыженской и леммы 3  $\omega(B) \neq \emptyset$ , компактно, инвариантно и имеет место равенство (1.6.47). Так как  $\omega(B) \subseteq J$ , то из равенства (1.6.47) следует, что  $J$  притягивает  $B$ . Теорема доказана.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем:

- вполне непрерывной, если для любого  $B \in B(X)$  существует  $l = l(B) > 0$  такое, что  $\pi^l B$  относительно компактно;
- слабо  $b$ -диссипативной, если существует непустое ограниченное множество  $B_0 \subseteq X$  такое, что  $\Sigma_x^+ \cap B_0 \neq \emptyset$  для любой точки  $x$  из  $X$  (т.е. для любого  $x \in X$  найдется  $\tau = \tau(x) \geq 0$  такое, что  $x\tau \in B_0$ ). При этом множество  $B_0$  назовем слабым  $b$ -аттрактором динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

**Теорема 1.6.19.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  слабо  $b$ -диссипативна и вполне непрерывна, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  допускает компактный глобальный аттрактор.*

*Доказательство.* Пусть  $B_0 \in B(X)$  - слабый  $b$ -аттрактор системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ,  $l_0 = \underline{l(B_0)} > 0$  таково, что  $\pi^{l_0} B_0$  относительно компактно, и пусть  $K := \overline{\pi^{l_0} B_0}$ . Согласно условию теоремы 1.6.19 для любой точки  $x \in X$  существует  $\tau = \tau(x) \geq 0$  такое, что  $x\tau \in B_0$  и, следовательно,  $x(\tau + l_0) \in K$ . Таким образом динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является слабо  $k$  диссипативной, а компакт  $K$  является ее слабым  $k$ -аттрактором. Согласно теореме 1.4.7 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $k$ -диссипативна. Пусть  $J$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ,  $B \in B(X)$  и  $l = l(B) > 0$  таково, что  $\pi^l B$  относительно компактно. Согласно теореме 1.3.6 центр Левинсона  $J$  притягивает компакт  $\overline{\pi^l B}$  и, следовательно, имеет место равенство (1.6.48). Теорема доказана.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем асимптотически компактной, если для любого ограниченного положительно инвариантного множества

$B \subseteq X$  (т.е.  $\pi^t B \subseteq B$  при всех  $t \geq 0$ ) существует непустой компакт  $K \subseteq X$  такой, что имеет место равенство (1.6.46).

**Теорема 1.6.20.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $k$ -диссипативна и асимптотически компактна, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально  $k$ -диссипативна.*

*Доказательство.* Пусть  $J$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ . Согласно теореме 1.6.14 для локальной  $k$ -диссипативности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  достаточно показать, что множество  $J$  является равномерно притягивающим. Пусть  $\varepsilon_0 = 1$  и  $\delta_0 = \delta(1) > 0$  - такие числа, что из  $x \in B(J, \delta_0)$  следует  $xt \in B(J, 1)$  при всех  $t \geq 0$  (согласно теореме 1.3.6 такое  $\delta_0$  существует). Понятно, что множество  $B := \cup\{\pi^t B(J, \delta_0) \mid t \geq 0\}$  ограничено и положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  существует непустой компакт  $K \subseteq X$  такой, что имеет место равенство (1.6.46). Согласно лемме 3 множество  $\omega(B) \neq \emptyset$ , компактно, инвариантно и имеет место равенство (1.6.47). Так как  $J$  является максимальным компактным инвариантным множеством  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ , то  $\omega(B) \subseteq J$  и, в частности, из (1.6.47) следует (1.6.48). Из равенства (1.6.48) и включения  $B(J, \delta_0) \subseteq B$  следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(J, \delta_0), J) = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть  $\mathfrak{M}$  - некоторое семейство ограниченных подмножеств из  $X$  и  $K$  - непустое ограниченное (компактное) подмножество  $X$ . Напомним, что динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  называется  $b$  ( $k$ )-диссипативной относительно семейства  $\mathfrak{M}$ , если

$$(1.6.49) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t M, K) = 0$$

при всех  $M \in \mathfrak{M}$ .

**Лемма 18.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является  $b$ -диссипативной относительно семейства  $\mathfrak{M}$  и асимптотически компактной, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является также  $k$ -диссипативной относительно семейства  $\mathfrak{M}$ .*

*Доказательство.* Найдется ограниченное замкнутое множество  $B_0 \subseteq X$  такое, что для любого  $M \in \mathfrak{M}$  найдется  $L > 0$ , для которого  $\pi^t M \subseteq B_0$  при всех  $t \geq L$ . Положим  $B := \{x \in B_0 \mid xt \in B_0 \text{ при всех } t \geq 0\}$ . Очевидно,  $B \neq \emptyset$ , ограничено и положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  найдется компактное множество  $K \subseteq B_0$  такое, что выполнено равенство (1.6.46). Согласно лемме 3 множество  $\omega(B) \neq \emptyset$ , компактно и имеет место равенство (1.6.47). Заметим, что  $M_L := \cup\{\pi^t M \mid t \geq L\} \subseteq B$  и  $M_L$  положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  и согласно лемме 3 множество  $\omega(M_L) \neq \emptyset$ , компактно,  $\omega(M_L) \subseteq \omega(B)$  и  $\omega(M_L)$  притягивает  $M_L$ . Теперь для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что множество  $M$  притягивается компактом  $\omega(M_L)$ , значит, и компактом

$\omega(B)$ . Таким образом мы построили непустой компакт  $\omega(B)$  притягивающий все множества из семейства  $\mathfrak{M}$ . Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 7.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно (компактно, локально, ограничено)  $b$ -диссипативна и асимптотически компактна, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно (компактно, локально, ограничено)  $k$ -диссипативна.

**СЛЕДСТВИЕ 8.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  асимптотически компактна, тогда локальная  $b$ -диссипативность и компактная  $b$ -диссипативность эквивалентны.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из следствия 7 и теоремы 1.6.20.

**Теорема 1.6.21.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  удовлетворяет условию Ладыженской, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  слабо  $b$ -диссипативна;
- (2) существует ограниченное множество  $B_1 \subseteq X$ , поглощающее все точки из  $X$ , т.е. для любого  $x \in X$  существует  $\tau = \tau(x) \geq 0$  такое, что  $x\tau \in B_1$  при всех  $t \geq \tau$ ;
- (3) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$ -диссипативна;
- (4) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  слабо  $k$ -диссипативна;
- (5) динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  ограничено  $k$ -диссипативна;
- (6) существует ограниченное множество  $B_2 \subseteq X$ , поглощающее все ограниченные подмножества  $X$ , т.е. для любого  $B \in \mathcal{B}(X)$  существует  $L = L(B) > 0$ , что  $\pi^t B \subseteq B_2$  при всех  $t \geq L(B)$ .

*Доказательство.* Очевидно из 2. следует 1.. Покажем, что из 1. следует 3.. Пусть  $B_0$  слабый аттрактор системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ . Так как  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  удовлетворяет условию Ладыженской, то множество  $K_1 := \omega(B_0) \neq \emptyset$ , компактно и притягивает множество  $B_0$ . Так как для любого  $x \in X$  существует  $\tau = \tau(x) > 0$  такое, что  $x\tau \in B_0$  и, следовательно,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, K_1) = 0$ .

Очевидно, из 3. следует 4.. Пусть выполнено условие 4. и  $K_2 \subseteq X$  - непустой компакт такой, что  $\omega_x \cap K_2 \neq \emptyset$  для любого  $x \in X$ ,  $\gamma > 0$  и  $K_3 := \omega(B(K_2, \gamma))$ . В условиях теоремы множество  $K_3 \neq \emptyset$ , компактно и притягивает  $B(K_2, \gamma)$ . Согласно условию 4. для каждого  $x \in X$  найдется  $\tau(x) > 0$  такое, что  $x\tau \in B(K_2, \gamma)$  и, следовательно,  $x$  притягивается множеством  $K_3$ . Таким образом  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$ -диссипативна и согласно теореме 1.6.18 она ограничено  $k$ -диссипативна.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что из 5. следует 6., а из 6. вытекает 2.. Теорема доказана.

### 1.7. Об одной проблеме Дж.Хейла

Пусть  $P : X \rightarrow X$  - непрерывное отображение и  $(X, P)$  каскад, порожденный положительными степенями отображения  $P$ .

Непрерывное отображение  $P : X \rightarrow X$  называется  $\lambda$  сжатием порядка  $k \in ]0, 1[$ , если  $\lambda(P(A)) \leq k\lambda(A)$  для любого  $A \in B(X)$ , где  $\lambda$  некоторая мера некомпактности на  $X$ .

В работе [167] сформулирована следующая

**Задача Дж.Хейла.** Пусть каскад  $(X, P)$  поточечно  $b$ -диссипативен и отображение  $P$  является  $\lambda$  сжатием. Существует ли в  $(X, P)$  максимальное компактное инвариантное множество?

В связи с проблемой Дж.Хейла нам представляется интересной следующая

**Задача.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $b$ -диссипативна. Найти условия, при которых динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  допускает максимальное компактное инвариантное множество.

Ниже приводятся некоторые результаты в связи с сформулированной задачей.

С одной стороны пример 6 показывает, что не всякая поточечно  $k$ -диссипативная динамическая система обладает максимальным компактным инвариантным множеством. С другой стороны, согласно теореме 1.3.6 для компактно  $k$ -диссипативной системы центр Левинсона является максимальным компактным инвариантным множеством.

Имеет место следующая

**Лемма 19.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$ -диссипативна и  $J^+(\Omega)$  компактно, тогда в  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  имеется максимальное квазиинвариантное множество  $I \subseteq J^+(\Omega)$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $I^*$  - класс всех непустых компактных квазиинвариантных подмножеств  $A \subseteq J^+(\Omega)$ . Заметим, что  $I^* \neq \emptyset$ , так как согласно следствию 4  $\Omega \in I^*$ .

Обозначим через  $I$  - замыкание объединения всех квазиинвариантных подмножеств  $J^+(\Omega)$ . Согласно теореме 1.1.3 множество  $I$  квазиинвариантно и, очевидно, является искомым. Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 9.** В условиях леммы 19 множество  $I$  является инвариантным.

*Доказательство.* Действительно, так как  $I$  квазиинвариантно, то при всех  $t \in \mathbb{T}$  множество  $\pi^t I$  также квазиинвариантно и компактно, и согласно лемме 13  $\pi^t I \subseteq J^+(\Omega)$ . По лемме 19 множество  $I$  является максимальным компактным квазиинвариантным множеством и, следовательно,  $\pi^t I \subseteq I$  т.е.  $\pi^t I = I$  при всех  $t \in \mathbb{T}$ .

Итак, если  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$ -диссипативна и  $J^+(\Omega)$  компактно, то в  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  существует максимальное компактное инвариантное множество  $I \subseteq J^+(\Omega)$ . Как показывает пример 7, существуют поточечно  $k$ -диссипативные динамические системы, не являющиеся компактно  $k$ -диссипативными, для которых  $J^+(\Omega)$  компактно.

**Лемма 20.** Пусть  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ . Для того чтобы динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  была асимптотически компактной, необходимо и достаточно,

чтобы при некотором  $t_0 > 0$  каскад  $(X, P)$  был асимптотически компактным, где  $P := \pi^{t_0} : X \rightarrow X$ .

*Доказательство.* Необходимость леммы очевидна. Пусть  $M \subseteq X$  - ограниченное положительно инвариантное множество  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ . Тогда  $P(M) \subseteq M$  и в силу асимптотической компактности каскада  $(X, P)$  найдется компакт  $K_0 \in C(X)$  такой, что

$$(1.7.50) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(P^n(M), K_0) = 0.$$

Положим  $K := \pi([0, t_0], K_0)$ . В силу непрерывности отображения  $\pi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  и компактности множества  $[0, t_0] \times K_0$  множество  $K$  компактно. Покажем, что имеет место равенство  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t M, K) = 0$ . Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$  и  $\{x_n\} \subseteq M$  такие, что

$$(1.7.51) \quad \rho(x_n t_n, K) \geq \varepsilon_0.$$

Пусть  $t_n = k_n t_0 + \tau_n$ , где  $k_n$  - целая часть  $t_n t_0^{-1}$  и  $\tau_n \in [0, t_0]$ . Тогда  $\pi(t_n, x_n) = \pi(\tau_n, \pi(k_n t_0, x_n))$ . Учитывая равенство (1.7.50), последовательность  $\{\pi(k_n t_0, x_n)\}$  можно считать сходящейся. Пусть  $y_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(k_n t_0, x_n)$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(t_n, x_n) = \pi(\tau_0, y_0)$ . Так как  $y_0 \in K_0$ , то  $\pi(\tau_0, y_0) \in K$ . С другой стороны, переходя в (1.7.51) к пределу, тогда  $n \rightarrow +\infty$ , мы получим  $\rho(\pi(\tau_0, y_0), K) \geq \varepsilon_0$ , т.е.  $y_0 \tau_0 \notin K$ . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Напомним (см. [79],[88] и [170]), что непрерывное отображение  $P : X \rightarrow X$  называют уплотняющим относительно меры некомпактности  $\lambda$ , если  $\lambda P(A) < \lambda(A)$  для любого  $A \in B(X)$ , такого что  $\lambda(A) > 0$ .

**Лемма 21.** [88] Пусть  $P : X \rightarrow X$  - непрерывное  $\lambda$  уплотняющее отображение, тогда каскад  $(X, P)$  является асимптотически компактным.

*Доказательство.* Сначала покажем, что для любого ограниченного множества  $B \subset X$  с условием  $P(B) \subseteq B$  и последовательности  $\{k_j\}$  с целыми  $k_j \rightarrow +\infty$  множество  $\{P^{k_j} x_j\}$  относительно компактно. Пусть  $C = \{\{P^{k_j} x_j\} : \{x_j\} \subseteq B, \{k_j\} \text{ целые}, 0 \leq k_j \rightarrow +\infty\}$ . Положим  $\eta := \sup\{\lambda(h) : h \in C\}$ . Так как  $h \subseteq B$ , если  $h \in C$ , то  $\eta < \lambda(B)$ . Докажем существование такого  $h^* \in C$ , что  $\lambda(h^*) = \eta$ . Пусть  $\{h_l\}$  - последовательность элементов множества  $C$ , для которой  $\lambda(h_l) \rightarrow \eta$ . Определим  $\tilde{h}_l := \{P^{k_j} x_j : P^{k_j} x_j \in h_l, k_j > l\}$ . Тогда  $\lambda(\tilde{h}_l) = \lambda(h_l)$ . Если  $h^* = \cup\{\tilde{h}_l \mid l = 1, 2, \dots\}$  упорядочено любым образом, то  $h^* \in C$  и  $\lambda(h^*) \geq \lambda(h_l)$  для каждого  $l$ . Поэтому  $\lambda(h^*) = \eta$ . Положим

$$\tilde{h}^* := \left\{ P^{k_j-1} x_j : P^{k_j} x_j \in h^* \right\}.$$



Тогда  $\tilde{h}^*C$  и  $\lambda(\tilde{h}^*) \leq \eta$ . Но  $P(\tilde{h}^*) = h^*$ , так что  $\lambda(P(\tilde{h}^*)) \geq \lambda(\tilde{h}^*)$ , откуда следует  $\lambda(\tilde{h}^*) = 0$ , поскольку  $P$  является  $\lambda$  уплотняющим. Поэтому  $\tilde{h}^*$  и  $h^*$  относительно компактны и  $\eta = 0$ . Таким образом, каждая последовательность в  $C$  относительно компактна.

Согласно лемме 3 множество  $\omega(B) \neq \emptyset$ , компактно, инвариантно и имеет место равенство

$$(1.7.52) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(P^n(B), \omega(B)) = 0.$$

Лемма доказана.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем локально ограниченной, если для любого  $x \in X$  существуют  $\delta_x > 0$  и  $l_x > 0$  такие, что множество  $\cup\{\pi^t B(x, \delta_x) : t \geq l_x\}$  ограничено.

Пример 6 показывает, что существуют поточечно диссипативные и локально ограниченные динамические системы, которые не являются компактно диссипативными.

Будем говорить что  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является  $\lambda$  уплотняющей, если  $\lambda(\pi^t B) < \lambda(B)$  при всех  $B \in B(X)$ ,  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\lambda(B) > 0$  и  $\pi^t B \in B(X)$ .

**Теорема 1.7.22.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $b$ -диссипативна и локально ограничена и является  $\lambda$  уплотняющей, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально  $k$ -диссипативна.*

*Доказательство.* Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  -  $\lambda$  уплотняющая динамическая система, тогда согласно леммам 20 и 21 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  асимптотически компактна. Из следствия 7 вытекает, что динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$  диссипативна. Пусть  $p \in X$ ,  $\delta_p > 0$  и  $l_p > 0$  - числа из определения локальной ограниченности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ . Рассмотрим множество  $M_p := \cup\{\pi^t B(p, \delta_p) : t \geq l_p\}$ . Оно является ограниченным и положительно инвариантным. В силу асимптотической компактности  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  найдется компактное множество  $K_p \in C(X)$  такое, что

$$(1.7.53) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K_p) = 0.$$

Согласно теореме 1.6.16 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально диссипативна. Теорема доказана.

**Теорема 1.7.23.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $b$ -диссипативна и является  $\lambda$  уплотняющей. Если для любого  $p \in \Omega$  существуют  $\delta_p > 0$  и  $l_p > 0$  такие, что  $\cup\{\pi^t B(p, \delta_p) | t \geq l_p\} \in B(X)$ , то динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  локально  $k$ -диссипативна.*

*Доказательство.* Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $b$ -диссипативна и является  $\lambda$  уплотняющей. Тогда согласно леммам 20 и 21 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является асимптотически компактной. Поэтому динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$ -диссипативна и, следовательно,  $\Omega \neq \emptyset$  и компактно. Из открытого покрытия  $\{B(p, \delta_p) | p \in \Omega\}$  компактного

множества  $\Omega$  выберем конечное подпокрытие  $\{B(p_i, \delta_{p_i}) \mid i \in \overline{1, m}\}$ . Положим,  $l_0 = \max\{l_{p_i} \mid i \in \overline{1, m}\}$ . Согласно лемме 7 существует  $\gamma > 0$  такое, что  $B(\Omega, \gamma) \subset \cup\{B(p_i, \delta_{p_i}) \mid i \in \overline{1, m}\}$ . Если  $x \in X$ , то существует  $l(x) > 0$  такое, что  $xl \in B(\Omega, \gamma)$ . Так как  $B(\Omega, \gamma)$  открыто, то существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B(xl, \varepsilon) \subset B(\Omega, \gamma)$ . В силу непрерывности отображения  $\pi^l : X \rightarrow X$  найдется  $\delta_x > 0$  такое, что  $yl \in B(xl, \varepsilon)$  при всех  $y \in B(x, \delta)$  и, следовательно,  $\cup\{\pi^t B(x, \delta) \mid t \geq l_0 + l(x)\}$  ограничено. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 1.7.22.

Теоремы 1.7.22 и 1.7.23 дают решение проблемы Дж.Хейла для локально ограниченных динамических систем.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем компактно ограниченной, если для любого компакта  $K \in C(X)$  множество  $\Sigma^+(K) \in B(X)$ .

Имеет место следующая

**Теорема 1.7.24.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $b$ -диссипативна, компактно ограничена и является  $\lambda$  уплотняющей, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $b$ -диссипативна.*

*Доказательство.* Согласно леммам 20 и 21  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  является асимптотически компактной и, следовательно,  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно  $k$ -диссипативна. Так как  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно ограничена  $\Sigma^+(K)$  положительно инвариантно и  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  асимптотически компактна, то  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно для любого  $K \in C(X)$  и согласно теореме 1.5.12  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно  $k$ -диссипативна.

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  назовем ограниченной, если для любого  $B \in B(X)$  множество  $\Sigma^+(B) \in B(X)$ .

**Теорема 1.7.25.** *Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  ограничена и является  $\lambda$  уплотняющей, тогда  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  ограничено  $k$ -диссипативна.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 1.7.22.

В заключении этого параграфа приведем пример поточечно диссипативной, но не локально ограниченной динамической системы, которая не имеет максимального компактного инвариантного множества.

**Пример 9.** Пусть  $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  - функция обладающая следующими свойствами:

- (1)  $\varphi(0) = 0$ ;
- (2)  $\text{supp}(\varphi) = [0, 2]$ ;
- (3)  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ;
- (4)  $\varphi(1) = 1$ ;
- (5)  $\varphi$  монотонно возрастает от 0 до 1 и убывает от 1 до 2;
- (6)  $x\varphi(x^{-1}) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую условиям 1. – 6. можно построить, например, следующим образом. Пусть

$$\varphi_0(t) := \begin{cases} \exp([t^2 - 1]^{-1} + 1) & , |t| < 1 \\ 0 & , |t| \geq 1. \end{cases}$$

Тогда функция  $\varphi(t) := \varphi_0(t + 1)$  является искомой. Положим  $X := \{a\varphi(\frac{t}{a} + h) \mid h \in \mathbb{R}, a > 0\} \cup \{\theta\}$ , где  $\theta$  - функция из  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  тождественно равная нулю. Можно показать, что множество  $X$  замкнуто в  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  и инвариантно относительно сдвигов. Поэтому на  $X$  индуцируется динамическая система (на  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  определена динамическая система сдвигов система Бebutова), которую обозначим через  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ . Отметим некоторые свойства, построенной системы:

- (1) какова бы ни была функция  $\psi \in X$  множество  $\{\sigma(t, \psi) : t \in \mathbb{R}\}$  относительно компактно и  $\omega_\psi = \alpha_\psi = \{\theta\}$ ;
- (2) динамическая система  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  поточечно диссипативна и  $\Omega := \overline{\cup\{\omega_x \mid x \in X\}} = \{\theta\}$ ;
- (3)  $D^+(\Omega) = X$  и, следовательно, динамическая система  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  не является компактно диссипативной, так как  $X$ , очевидно, не компактно;
- (4) динамическая система  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  не является локально ограниченной;

Действительно, каково бы ни было  $\delta > 0$  имеем

$$\Sigma^+(B(\theta, \delta)) := \cup\{\pi^t B(\theta, \delta) : t \geq 0\} = X.$$

Отсюда следует, что множество  $\Sigma^+(B(\theta, \delta))$  не является ограниченным ни при каком  $\delta > 0$ .

5. динамическая система  $(X, \mathbb{R}, \sigma)$  не имеет максимального компактного инвариантного множества.

Нужный пример построен.

## НЕВТОНОВНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 2.1. Об устойчивости центра Левинсона

Рассмотрим неавтономную систему

$$(2.1.54) \quad \langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle.$$

Обозначим через  $2^X$  семейство всех ограниченных, замкнутых подмножеств  $X$ , наделенных метрикой Хаусдорфа. Пусть  $K \subseteq X$  - некоторое компактное подмножество  $X$ . Будем говорить, что  $K$  удовлетворяет условию (C), если отображение  $F : Y \rightarrow 2^X$ , определенное равенством

$$(2.1.55) \quad F(y) := K_y := \{x \in K \mid h(x) = y\},$$

непрерывно.

Отметим, что условие (C) означает открытость  $h : X \rightarrow Y$  на  $K$ . В дальнейших рассуждениях условие (C) играет важную роль, поэтому мы приведем простой признак, который гарантирует для некоторого компактного инвариантного множества наличие этого свойства.

**Лемма 22.** *Для того чтобы непустое компактное множество  $K \subseteq X$  удовлетворяло условию (C), достаточно выполнения одного из следующих условий:*

- (1) *существуют  $y_0 \in Y$  и  $\tau > 0$  ( $\tau \in \mathbb{T}_2$ ) такие, что  $y_0\tau = y_0$  и  $Y = \{\sigma(y_0, t) \mid 0 \leq t < \tau\}$ , т.е.  $\tau$  - наименьший положительный период для  $y_0$ ;*
- (2)  *$Y$  - компактное минимальное множество и неавтономная система (2.1.54) дистальна на  $K$ , т.е. для любых различных точек  $x_1$  и  $x_2$  из  $K$ , при которых  $h(x_1) = h(x_2)$ , выполняется неравенство*

$$(2.1.56) \quad \inf_{t \in \mathbb{T}_2} \rho(x_1 t, x_2 t) > 0.$$

*Доказательство.* Первое утверждение леммы очевидно. Второе вытекает из предложения 4 работы [56, с.107].

Неавтономную динамическую систему (2.1.54) назовем поточечно (компактно, локально) диссипативной, если этим свойством обладает динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

Пусть неавтономная система (2.1.54) компактно диссипативна и  $J$  – центр Левинсона динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . Множество  $J$  будем называть центром Левинсона неавтономной системы (2.1.54).

Как было установлено выше, центр Левинсона  $J$  орбитально устойчив относительно динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . При рассмотрении  $J$ , как центра Левинсона неавтономной динамической системы (2.1.54), более естественной является орбитальная устойчивость относительно неавтономной системы (2.1.54).

Множество  $K \subseteq X$  называют орбитально устойчивым относительно неавтономной системы (2.1.54), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(x, K_y) < \delta$  ( $x \in X, y = h(x)$ ) влечет  $\rho(xt, K_{yt}) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . Если при этом,

- a. существует  $\gamma > 0$  такое, что  $\rho(xt, K_{yt}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  для всех  $x \in K_y$  таких, что  $\rho(x, K_y) \leq \gamma$ , то говорят, что  $K$  орбитально асимптотически устойчиво;
- b.  $\rho(xt, K_{yt}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  для всех  $x \in X_y$ , то говорят, что множество  $K \subseteq X$  асимптотически устойчиво в целом относительно неавтономной динамической системы (2.1.54).

Следуя [30] множеств  $K \subseteq X$  назовем асимптотически устойчивым в целом в смысле Ляпунова–Барабашина, если

$$(2.1.57) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, K_{h(x)t}) = 0$$

при всех  $x \in X$ , причем равенство (2.1.57) имеет место равномерно по  $x$  на компактах из  $X$ .

Как было показано в работе [30], центр Левинсона неавтономной системы, вообще говоря, не является асимптотически устойчивым в целом в смысле Ляпунова–Барабашина. Ниже нами будет установлено, что центр Левинсона неавтономной системы (2.1.54) будет асимптотически устойчивым в целом, если он удовлетворяет условию (C).

Имеет место

**Лемма 23.** Пусть  $K \subseteq X$ . Если множество  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно и  $M$  ( $\omega(K) \subseteq M, h(M) = Y$ ) удовлетворяет условию (C), то при каждом  $x \in K$  равномерно относительно  $y \in h(H^+(K))$  выполняется равенство

$$(2.1.58) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K_y} \rho(xt, M_{yt}) = 0,$$

где  $M_y = M \cap h^{-1}(y)$ .

*Доказательство.* Допустим противное. Тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\{y_n\} \subseteq h(H^+(K))$ ,  $x_n \in M_{y_n}$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.1.59) \quad \rho(x_n t_n, M_{y_n t_n}) \geq \varepsilon_0.$$

В силу относительной компактности множества  $\Sigma^+(K)$  последовательности  $\{x_n t_n\}$  и  $\{y_n t_n\}$  можно считать сходящимися. Положим

$$\bar{x} := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n \text{ и } \bar{y} := \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n t_n.$$

Заметим, что

$$(2.1.60) \quad h(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) t_n = \bar{y}$$

и, следовательно,  $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$ . С другой стороны, согласно лемме 2  $\bar{x} \in \omega(K)$ . Таким образом,  $\bar{x} \in \omega_{\bar{y}}(K) \subseteq M_{\bar{y}}$ .

Обратимся теперь к неравенству (2.1.59). Так как множество  $M$  удовлетворяет условию (C), то, переходя к пределу в неравенстве (2.1.59) при  $n \rightarrow +\infty$ , получим

$$(2.1.61) \quad \rho(\bar{x}, M_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что  $\bar{x} \in M_{\bar{y}}$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.1.26.** Пусть система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна и центр Левинсона  $J$  данной системы удовлетворяет условию (C). Если  $Y = h(J)$ , то:

- (1)  $J$  орбитально устойчиво в положительном направлении относительно неавтономной динамической системы (2.1.54).
- (2)  $J$  является компактным аттрактором данной системы т.е.,

$$(2.1.62) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, J_h(xt)) = 0,$$

причем (2.1.61) имеет место равномерно по  $x$  на каждом компакте из  $X$ .

*Доказательство.* Покажем, что центр Левинсона  $J$  орбитально устойчив в положительном направлении относительно неавтономной системы (2.1.54). Допустим, что это не так. Тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $x_n \in B(J_h(x_n), \delta_n)$  и  $t_n \geq 0$  такие, что

$$(2.1.63) \quad \rho(x_n t_n, J_h(x_n) t_n) \geq \varepsilon_0.$$

В условиях теоремы последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{h(x_n)\}$  можно считать сходящимися. Положим  $x_0 := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . Так как неавтономная система (2.1.54) компактно диссипативна, то множество  $H^+(\{x_n\})$  компактно и, следовательно, последовательности  $\{x_n t_n\}$  и  $\{h(x_n) t_n\}$  можно считать сходящимися. Положим  $\bar{x} := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$  и  $\bar{y} := \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) t_n$ .

Покажем теперь, что последовательность  $\{t_n\}$  в (2.1.63) стремится к  $+\infty$ . Если допустить противное, то ее можно считать сходящейся. Положим  $t_0 := \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  и, переходя к пределу в (2.1.63) с учетом того, что  $J$  удовлетворяет условию (C), получаем

$$(2.1.64) \quad \rho(x_0 t_0, J_h(x_0) t_0) \geq \varepsilon_0.$$

С другой стороны,  $\rho(x_n, J_{h(x_n)}) < \delta_n$  и, следовательно,  $x_0 \in J_{h(x_0)}$ . Так как  $J$  инвариантно, то из последнего включения следует, что  $x_0 t_0 \in J_{h(x_0)t_0}$ . Но это противоречит (2.1.64). Таким образом,  $t_n \rightarrow +\infty$  и, следовательно,  $\bar{x} \in \omega(K_0) \subseteq J$ . Из (2.1.58) следует, что  $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$  т.е.  $\bar{x} \in \omega_{\bar{y}}(K) \subseteq J_{\bar{y}}$ . Из (2.1.59) следует, что  $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$  т.е.  $\bar{x} \in \omega_{\bar{y}}(K) \subseteq J_{\bar{y}}$ .

Переходя в неравенстве (2.1.63) к пределу, когда  $n \rightarrow +\infty$  и учитывая, что  $\bar{x} \in J_{\bar{y}}$  и множество  $J$  удовлетворяет условию (C), мы получим  $\varepsilon_0 \leq 0$ . Последнее противоречит выбору  $\varepsilon_0$ . Таким образом орбитальная устойчивость в положительном направлении множества  $J$  доказана.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть  $K \subseteq X$  произвольный компакт, тогда в условиях теоремы множество  $H^+(K)$  компактно и  $\omega(K) \subseteq J$  и для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 23.

**Замечание 2.1.5.** Отметим, что вопрос об устойчивости в целом в смысле Ляпунова–Барабашина центра Левинсона неавтономной динамической системы (в одном специальном случае) изучался в работе [30]. Следует, однако, подчеркнуть, что в работе [30] под устойчивостью понимается не орбитальная устойчивость, а равенство (2.1.62). Пользуясь нашей терминологией, результат работы [30] можно сформулировать следующим образом. Пусть  $X$  – локально-компактно, неавтономная динамическая система (2.1.54) поточечно диссипативна и  $Y$  – компактное минимальное множество. Тогда, если центр Левинсона  $J$  динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  удовлетворяет условию (C), то  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна и ее центр Левинсона является аттрактором для компактных подмножеств из  $X$  относительно неавтономной динамической системы (2.1.54).

Это утверждение вытекает из теорем 1.4.7 и 2.1.26. Однако из этих же теорем вытекает также, что центр Левинсона  $J$  орбитально устойчив в положительном направлении.

**Теорема 2.1.27.** Пусть неавтономная система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна, ее центр Левинсона  $J$  удовлетворяет условию (C) и  $h(J) = Y$ , тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $J$  асимптотически устойчиво в целом, т.е.  $J$  – орбитально устойчиво, и

$$(2.1.65) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, J_{h(x)t}) = 0$$

при всех  $x \in X$ ;

- (2)  $J$  асимптотически устойчиво в целом в смысле Ляпунова–Барабашина.

*Доказательство.* Покажем, что в условиях теоремы из 1. следует 2. В самом деле, если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $K_0 \in C(X)$ ,  $x_n \in K_0$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.1.66) \quad \rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактной диссипативности  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  последовательности  $\{x_n t_n\}$  и  $\{h(x_n) t_n\}$  можно считать сходящимися. Положим  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$  и  $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) t_n$ , тогда  $\bar{x} \in J_{\bar{y}} = J \cap X_{\bar{y}}$ . С другой стороны, переходя к пределу в неравенстве (2.1.65) при  $n \rightarrow +\infty$  и учитывая, что  $J_{h(x_n) t_n} \rightarrow J_{\bar{y}}$  в метрике Хаусдорфа, получим  $\rho(\bar{x}, J_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0$  т.е.  $\bar{x} \notin J_{\bar{y}}$ . Полученное противоречие завершает доказательство требуемого утверждения.

Теперь покажем, что из 2. следует 1. Для этого, очевидно, достаточно показать, что из 2. следует орбитальная устойчивость множества  $J$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $x_n \in B(J, \delta_n)$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.1.67) \quad \rho(x_n t_n, J_{h(x_n) t_n}) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактности  $J$  последовательность  $\{x_n\}$  относительно компактна и согласно условию 2. для числа  $\varepsilon_0 > 0$  и компакта  $K_0 = \overline{\{x_n\}}$  найдется число  $L = L(\varepsilon_0, K_0) > 0$  такое, что

$$(2.1.68) \quad \rho(x_n t, J_{h(x_n) t}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

при всех  $t \geq L$ . Неравенства (2.1.67) и (2.1.68) не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Замечание 2.1.6.** *Заметим, что в доказательстве второй части теоремы 2.1.27 мы не использовали тот факт, что  $J$  удовлетворяет условию (C). Нам неизвестно насколько существенно условие (C) в первой части теоремы.*

## 2.2. Неавтономные диссипативные динамические системы, удовлетворяющие условию равномерной положительной устойчивости

Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система. Обозначим через  $C(X, Y; h)$  множество всех функций  $\xi : X \rightarrow X$  удовлетворяющие следующим двум условиям:

- (1)  $\xi(X_{h(x)}) \subseteq X_{h(\xi(x))}$  при всех  $x \in X$ ,
- (2)  $\xi : X_{h(x)} \rightarrow X_{h(g(x))}$  непрерывна на  $X_{h(x)}$  при каждом  $x \in X$ .

Топологию на  $C(X, Y; h)$  определим семейством псевдометрик

$$(2.2.69) \quad \rho_{y, K}(f, g) := \max_{x \in K_y} \rho(f(x), g(x))$$

где  $K$  – произвольный непустой компакт из  $X$  и  $y \in Y$ . Отметим, что семейство псевдометрик (2.2.69) задает на  $C(X, Y; h)$  топологию равномерной сходимости (послойно) на компактах.

**Лемма 24.**  *$C(X, Y; h)$  является топологической полугруппой относительно послойной композиции.*



*Доказательство.* Для доказательства леммы достаточно проверить непрерывность отображения

$$F : C(X, Y; h) \times C(X, Y; h) \rightarrow C(X, Y; h),$$

определенного равенством  $F(f, g) := f \circ g$ . Доказательство проведем от противного. Допустим, что в некоторой точке  $(f_0, g_0)$  отображение  $F$  не является непрерывным, т.е. существует направленность  $(f_\lambda, g_\lambda) \rightarrow (f_0, g_0)$  такая, что  $f_\lambda \circ g_\lambda \not\rightarrow f_0 \circ g_0$ . Тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ , компакт  $K^0 \subseteq X$  и  $y_0 \in Y$  такие, что

$$(2.2.70) \quad \max_{x \in K_{y_0}^0} \rho(f_\lambda(g_\lambda(x)), f_0(g_0(x))) \geq \varepsilon_0.$$

Из (2.2.70) следует существование  $\{x_\lambda\} \subseteq K_{y_0}^0$  такой, что

$$(2.2.71) \quad \rho(f_\lambda(g_\lambda(x_\lambda)), f_0(g_0(x_\lambda))) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактности  $K^0$ , направленность  $\{x_\lambda\}$  можно считать сходящейся. Пусть  $x_\lambda \rightarrow x_0$ , тогда  $g_0(x_\lambda) \rightarrow g_0(x_0)$ . Покажем, что  $g_\lambda(x_\lambda) \rightarrow g_0(x_0)$ . Действительно,

$$(2.2.72) \quad \begin{aligned} \rho(g_\lambda(x_\lambda), g_0(x_0)) &\leq \max_{x \in K_{y_0}^0} \rho(g_\lambda(x), g_0(x)) \\ &+ \rho(g_0(x_\lambda), g_0(x_0)) \end{aligned}$$

и переходя к пределу в (2.2.72), получим требуемое утверждение. Аналогично устанавливается, что  $f_\lambda(g_\lambda(x_\lambda)) \rightarrow f_0(g_0(x_0))$ . Переходя к пределу в (2.2.71) мы получим  $\varepsilon_0 \leq 0$ , что противоречит выбору  $\varepsilon_0$ . Лемма доказана.

Пусть  $\alpha > 0$  и  $\mathbb{T}_\alpha := \{t \in \mathbb{T} : t \geq \alpha\}$ . Положим  $\mathcal{P}^\alpha := \mathcal{P}^\alpha(X, Y; h) := \overline{\{\pi^t : t \in \mathbb{T}_\alpha\}}$ , где чертой обозначено замыкание в  $C(X, Y; h)$ .

**Лемма 25.**  $\mathcal{P}^\alpha$  является замкнутой подполугруппой полугруппы  $C(X, Y; h)$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из леммы 24 и определения  $\mathcal{P}^\alpha$ .

Неавтономную динамическую систему (2.1.54) назовем равномерно устойчивой в положительном направлении на компактах из  $X$ , если для любых  $\varepsilon > 0$  и компакта  $K \subseteq X$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$  такое, что при всех  $x_1, x_2 \in K$ , для которых  $h(x_1) = h(x_2)$ , из неравенства  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  следует  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ .

Положим  $\mathcal{P}_y := \{\xi \in \mathcal{P}^\alpha : \xi X_y \subseteq X_y\}$ . Нетрудно проверить, что  $\mathcal{P}_y$  есть замкнутая подполугруппа полугруппы  $\mathcal{P}^\alpha$ . Имеет место

**Лемма 26.** Если система (2.1.54) компактно диссипативна и равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из  $X$ , то  $\mathcal{P}^\alpha$  есть компактная полугруппа и  $\mathcal{P}_y$  - ее непустая подполугруппа для любой устойчивой по Пуассону в положительном направлении точки  $y \in Y$ .

*Доказательство.* Прежде всего покажем, что в условиях леммы полугруппа  $\mathcal{P}^\alpha$  компактна. Пусть  $K \subseteq X$  - произвольный компакт. Тогда в силу компактной диссипативности неавтономной системы (2.1.54) множество  $\Sigma^+(K)$  компактно. В силу равномерной положительной устойчивости неавтономной системы (2.1.54) семейство отображений  $\{\pi^t : t \in \mathbb{T}_\alpha\} \subseteq C(X, Y; h)$  равномерно непрерывно на  $K_y$  ( $y \in Y$ ). Тогда согласно теореме Асколи-Арцеля, с учетом топологии на  $C(X, Y; h)$ , заключаем, что  $\{\pi^t : t \in \mathbb{T}_\alpha\}$  компактно в  $C(X, Y; h)$  и, следовательно, его замыкание есть компакт.

Покажем, что  $\mathcal{P}_y \neq \emptyset$ . Пусть  $t_n \rightarrow +\infty$  такова, что  $yt_n \rightarrow y$ . Рассмотрим последовательность  $\{\pi^{t_n}\} \subseteq \mathcal{P}^\alpha$ . В силу компактности  $\mathcal{P}^\alpha$  последовательность  $\{\pi^{t_n}\}$  можно считать сходящейся в  $C(X, Y; h)$ . Положим  $\xi := \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{t_n}$  и покажем, что  $\xi \in \mathcal{P}_y$ . Для этого, очевидно, достаточно показать, что  $\xi X_y \subseteq X_y$ . Пусть  $x \in X_y$ , тогда  $\xi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} xt_n$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} h(\xi(x)) &= h\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} xt_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(xt_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x)t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} yt_n = y. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 27.** Пусть  $Y$  - компактное минимальное множество, а неавтономная динамическая система (2.1.54) удовлетворяет условиям леммы 26. Тогда центр Левинсона  $J$  системы (2.1.54) двусторонне дистален, т.е. для любых  $x_1$  и  $x_2$  из  $J$  ( $x_1 \neq x_2$ ,  $h(x_1) = h(x_2)$ ) справедливо неравенство  $\inf\{\rho(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) : s \in \mathbb{S}\} > 0$ , где  $\varphi_i$  есть продолжение на  $\mathbb{S}$  движения  $\pi(\cdot, x_i)$  ( $i = 1, 2$ ).

*Доказательство.* Согласно теореме 1.3.6 на множестве  $J$  все движения продолжаемы влево. Из равномерной устойчивости в положительном направлении множества  $J$  следует его дистальность в отрицательном направлении. Поскольку  $Y$  минимально, то согласно лемме 22.4 [15] (см. также [16] и лемму 1 из [56, с.104])  $J$  двусторонне дистально.

**Теорема 2.2.28.** Пусть неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна, равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из  $X$  и  $Y$  минимально, тогда:

- (1) Все движения на центре Левинсона  $J$  системы (2.1.54) продолжаемы влево и множество  $J$  двусторонне дистально;
- (2)  $J$  состоит из рекуррентных траекторий и любые две точки  $x_1, x_2 \in J_y := X_y \cap J$  ( $y \in Y$ ) совместно рекуррентны;
- (3) Если слои  $X_y$  связны, то при каждом  $y \in Y$  множество  $J_y$  связно и при различных  $y_1$  и  $y_2$  множества  $J_{y_1}$  и  $J_{y_2}$  гомеоморфны;

- (4)  $J$  орбитально устойчиво относительно (2.1.54), т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(x, J_{h(x)}) < \delta$  влечет  $\rho(xt, J_{h(x)}t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- (5)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, J_{h(x)}t) = 0$  каково бы ни было  $x \in X$ .

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы совпадает с леммой 27.

Второе утверждение теоремы вытекает из первого и леммы 1 из [56, с.104]

Докажем теперь третье утверждение теоремы. Пусть  $y \in Y$ , тогда в условиях теоремы точка  $y$  устойчива по Пуассону и согласно лемме 26  $\mathcal{P}_y$  есть непустая компактная топологическая подполугруппа полугруппы  $\mathcal{P}^\alpha$ . Согласно лемме 4.11 [15] в  $\mathcal{P}_y$  существует идемпотент т.е. такой элемент  $u \in \mathcal{P}_y$ , что  $u \circ u = u$ . Покажем, что для идемпотента  $u$  найдется  $t_n \rightarrow +\infty$  для которой  $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{t_n}$ . Действительно, так как  $u \in \mathcal{P}_y \subseteq \mathcal{P}^\alpha$ , то существует последовательность  $\bar{t}_n \geq \alpha$  такая, что  $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{\bar{t}_n}$ .

Если последовательность  $\{t_n\}$  неограничена, то из нее можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к  $+\infty$  и нужное утверждение доказано. Пусть теперь  $\{t_n\}$  ограничена, тогда ее можно считать сходящейся. Положим  $t_0 := \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$  ( $t_0 \geq \alpha$ ) и  $t'_n := nt_0$ . Как нетрудно сообразить, что  $t'_n \rightarrow +\infty$  и  $\pi^{t'_n} \rightarrow u$ .

Итак, в  $\mathcal{P}_y$  имеется идемпотент  $u$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такая, что  $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{t_n}$ .

Но тогда из первых двух утверждений теоремы 2.2.28 следует, что  $u(X_y) \subseteq J_y$ . Покажем, что на самом деле имеет место равенство  $J_y = u(X_y)$ . Для этого достаточно показать, что  $J_y = u(J_y)$ . Справедливость последнего равенства следует из того, что на  $J$  имеется двусторонняя дистальность и, следовательно, всякий идемпотент из  $\mathcal{P}_y$  на множестве  $J_y$  действует как тождественное отображение. Связность  $J_y$  следует из непрерывности  $u$ , связности  $X_y$  и равенства  $J_y = u(X_y)$ .

Покажем, что имеет место вторая часть третьего утверждения теоремы. Пусть  $y_1$  и  $y_2 \in Y$ . Так как  $Y$  является минимальным множеством, то существует  $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}$  такая, что  $y_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_1 t_n$ . Рассмотрим последовательность  $\{\pi^{t_n}\}$  на  $J_{y_1}$ . Так как  $\pi^{t_n} : J_{y_1} \rightarrow J$  и на  $J$  имеет место двусторонняя равномерная устойчивость [56, с.107], то семейство отображений  $\{\pi^{t_n}\}$  равномерно непрерывно и, следовательно, ее можно считать равномерно сходящейся. Положим  $\xi := \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{t_n}$ . Из третьего утверждения теоремы и предложения 4 из [56, с.107] следует, что  $\xi(J_{y_1}) = J_{y_2}$ . Итак, мы показали, что непрерывное отображение  $\xi$  отображает  $J_{y_1}$  на  $J_{y_2}$ . Из двусторонней дистальности  $J$  следует, что  $\xi x_1 \neq \xi x_2$ , если  $x_1 \neq x_2$  ( $x_1, x_2 \in J_{y_1}$ ). Из последнего следует, что  $\xi$  есть гомеоморфизм  $J_{y_1}$  и  $J_{y_2}$ .

Четвертое утверждение теоремы вытекает из равномерной устойчивости в положительном направлении системы (2.1.54) на компактах из  $X$ . Действительно, если допустить, что не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $x_n \in X$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.2.73) \quad \rho(x_n, J_{h(x_n)}) < \delta_n \quad \text{и} \quad \rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \geq \varepsilon_0.$$

Из (2.2.73) вытекает, что множество  $K_0 = \overline{\{x_n\}}$  компактно. Для числа  $\frac{\varepsilon_0}{2}$  и компакта  $K = K_0 \cup J$  выберем  $\delta = \delta(\frac{\varepsilon_0}{2}, K) > 0$  из условия равномерной устойчивости в системе (2.1.54) на компактах и пусть  $\bar{x}_n \in J_{h(x_n)}$  таково, что  $\rho(x_n, J_{h(x_n)}) = \rho(x_n, \bar{x}_n)$ . Тогда для достаточно больших  $n$  имеем  $\rho(x_n, \bar{x}_n) < \delta$  и, следовательно,

$$(2.2.74) \quad \rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \leq \rho(x_n t_n, \bar{x}_n t_n) < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Неравенства (2.2.74) и (2.2.73) не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Докажем пятое утверждение теоремы, т.е. если  $x \in X$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, J_{h(x)t}) = 0$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $x_0 \in X$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.2.75) \quad \rho(x_0 t_n, J_{h(x_0)t_n}) \geq \varepsilon_0.$$

В условия теоремы последовательность  $\{\pi^{t_n}\}$  можно считать сходящейся в  $C(X, Y; h)$ . Пусть  $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{t_n}$ ,  $\bar{x} = \xi(x_0)$  и  $\bar{y} = \xi(y_0)$ . Переходя к пределу в неравенстве (2.2.75) и учитывая, что  $\xi(J_{h(x_0)}) = J_{h(\xi(x_0))}$ , получим

$$(2.2.76) \quad \rho(\bar{x}, J_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0.$$

С другой стороны  $\bar{x} \in \omega_x$  и  $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$  и, следовательно,  $\bar{x} \in J_{\bar{y}}$ . Последнее противоречит (2.2.76). Полученное противоречие полностью завершает доказательство теоремы.

### 2.3. Поведение диссипативных динамических систем при гомоморфизмах

В этом параграфе устанавливаются условия, при которых свойства поточечной, компактной и локальной диссипативности сохраняются при гомоморфизмах.

Пусть  $X$  и  $Y$  - полные метрические пространства,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  - динамические системы на  $X$  и  $Y$  соответственно,  $\Omega_X$  ( $\Omega_Y$ ) - замыкание множества всех  $\omega$ -предельных точек динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  ( $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ ) и  $J_X$  ( $J_Y$ ) - ее центр Левинсона.

**Лемма 28.** Пусть  $h : X \rightarrow Y$  - гомоморфизм динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ , тогда:

$$(1) \quad h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y;$$

(2) если множество  $M$  компактно, то

$$h(D^+(M)) \subseteq D^+(h(M))$$

и

$$h(J^+(M)) \subseteq J^+(h(M));$$

(3) если  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна, то

$$h(D^+(\Omega_X)) \subseteq D^+(\Omega_Y)$$

и

$$h(J^+(\Omega_X)) \subseteq J^+(\Omega_Y).$$

*Доказательство.* Пусть  $x \in \Omega_X$ , тогда существует  $x_n \in \omega_{x_n}$  ( $\tilde{x}_n \in X$ ) такая, что  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . Так как  $h(\omega_{\tilde{x}_n}) \subseteq \omega_{h(\tilde{x}_n)}$ , то  $h(x_n) \in \omega_{h(\tilde{x}_n)}$  и, следовательно,  $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) \in \Omega_{h(X)} \subseteq \Omega_Y$ .

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть  $x \in \Omega_X$ , тогда согласно лемме 12 существует  $\tilde{x} \in M$  такое, что  $x \in D_{\tilde{x}}^+$  и, следовательно, существуют  $x_n \rightarrow \tilde{x}$  и  $t_n \geq 0$  такие, что  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ . Заметим, что  $h(x_n) \rightarrow h(\tilde{x}) \in h(M)$  и  $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) t_n \in D^+(h(M))$ . Аналогично устанавливается и включение  $h(J^+(M)) \subseteq J^+(h(M))$ .

Наконец, заметим, что третье утверждение леммы вытекает из первых двух.

**Теорема 2.3.29.** Пусть  $h$  гомоморфизм  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ . Имеют место следующие утверждения:

- (1) если динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна, то  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  также является поточечно диссипативной и  $h(\Omega_X) = \Omega_Y$ ;
- (2) если динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна, то  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  также компактно диссипативна и  $h(J_X) = J_Y$ ;
- (3) если динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  локально диссипативна и  $h$  - открытое отображение, то  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  также локально диссипативна.

*Доказательство.* В силу того, что  $Y = h(X)$  и все положительные полутраектории системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  относительно компактны, то такими являются и положительные полутраектории системы  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ . Поэтому для ее поточечной диссипативности достаточно показать, что  $\Omega_Y = h(\Omega_X)$ . Пусть  $y \in \Omega_Y$ , тогда существуют  $\{y_n\}$  и  $\{\tilde{y}_n\}$  такие, что  $y_n \in \omega_{\tilde{y}_n}$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ . Так как  $Y = h(X)$ , то существует  $\tilde{x}_n \in X$  такое, что  $\tilde{y}_n = h(\tilde{x}_n)$  и, следовательно,  $h(\omega_{\tilde{x}_n}) = \omega_{\tilde{y}_n}$ . Поэтому найдется  $x_n \in \omega_{\tilde{x}_n} \subseteq \Omega_X$ , для которого  $h(x_n) = y_n$ . В силу поточечной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  множество  $\Omega_X$  компактно и, следовательно, последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $x := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , тогда  $x \in \Omega_X$

и  $h(x) = y$ . Таким образом  $\Omega_Y \subseteq h(\Omega_X)$ . Для завершения доказательства первого утверждения теоремы достаточно сослаться на лемму 28.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Если  $h$  - гомоморфизм компактно диссипативной динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ , то согласно первому утверждению теоремы система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  поточечно диссипативна. Согласно теореме 1.5.12 для компактной диссипативности  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  достаточно показать, что для любого непустого компакта  $N \subset Y$  множество  $\Sigma_N^+ = \{\sigma(t, y) \mid t \geq 0, y \in N\}$  относительно компактно. Пусть  $\{\tilde{y}_n\} \subset \Sigma_N^+$  - произвольная последовательность. Тогда существуют  $\{y_n\} \subseteq N$  и  $\{t_n\} \subset \mathbb{T}_2$  ( $t_n \geq 0$ ) такие, что  $\tilde{y}_n = \sigma(t_n, y_n)$ . Если  $\{t_n\}$  ограничена, то последовательность  $\{\tilde{y}_n\}$  относительно компактна, поэтому без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что  $t_n \rightarrow +\infty$  и  $y_n \rightarrow y \in Y$ . Так как  $(X, h, Y)$  локально-тривиально, то существует последовательность  $\{x_n\} \subseteq X$  такая, что  $x_n \rightarrow x$  и  $h(x_n) = y_n$ . В силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  последовательность  $\{x_n t_n\}$  можно считать сходящейся, и, следовательно,  $\{h(x_n t_n)\} = \{h(x_n) t_n\} = \{y_n t_n\}$  также является сходящейся. Таким образом,  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна. Покажем теперь, что  $h(J_X) = J_Y$ . Согласно лемме 28  $h(J^+(\Omega_X)) \subseteq J^+(\Omega_Y)$ . Покажем, что имеет место и обратное включение  $J^+(\Omega_Y) \subseteq h(J^+(\Omega_X))$ . Пусть  $q \in J^+(\Omega_Y)$ , тогда найдется  $y \in \Omega_Y$  такое, что  $q \in J_y^+$ . Согласно первому утверждению теоремы 2.3.29 имеем  $h(\Omega_X) = \Omega_Y$  и, следовательно, существует  $x \in \Omega_X$  такой, что  $h(x) = y$ . Пусть  $y_n \rightarrow y$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  таковы, что  $y_n t_n \rightarrow q$ . Так как  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  локально-тривиально, то существует  $\{x_n \rightarrow x\}$  такая, что  $h(x_n) = y_n$ . В силу компактной диссипативности системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  последовательность  $\{x_n t_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ , тогда  $p \in J_x^+ \subseteq J^+(\Omega_X)$  и, следовательно,  $h(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n t_n = q$ , т.е.  $J^+(\Omega_Y) \subseteq h(J^+(\Omega_X))$ . Таким образом,  $h(J^+(\Omega_X)) = J^+(\Omega_Y)$ , и для завершения доказательства второго утверждения теоремы достаточно заметить, что согласно теореме 1.5.8  $J_X = J^+(\Omega_X)$  и  $J_Y = J^+(\Omega_Y)$ .

Покажем третье утверждение теоремы. Прежде всего заметим, что согласно второму утверждению теоремы динамическая система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $h(J_X) = J_Y$ . По теореме 1.6.15 для локальной диссипативности  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  достаточно показать, что  $J_Y$  является равномерно притягивающим множеством. Предварительно докажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$(2.3.77) \quad \rho(h(x), J_Y) < \varepsilon$$

при всех  $x \in B(J_X, \delta)$ . Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0, \delta_n \downarrow 0$  и  $x_n \in B(J_X, \delta_n)$  такие, что

$$(2.3.78) \quad \rho(h(x_n), J_Y) \geq \varepsilon_0.$$

Последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. Полагая

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

и переходя к пределу в неравенстве (2.3.78), когда  $n \rightarrow +\infty$ , мы получим

$$(2.3.79) \quad \rho(h(x_0), J_Y) \geq \varepsilon_0,$$

т.е.  $h(x_0) \notin J_Y$  и  $x_0 \in J_X$ . Последнее противоречит равенству  $h(J_X) = J_Y$ . Итак, пусть  $\varepsilon > 0$  и  $\delta(\varepsilon) > 0$  таковы, что выполнено неравенство (2.3.77). В силу локальной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  из теоремы 1.6.15 следует, что найдется  $\gamma > 0$  такое, что будет выполняться равенство

$$(2.3.80) \quad \lim \beta(\pi^t B(J_X, \gamma), J_X) = 0.$$

В силу открытости гомоморфизма  $h$  множество  $V = h(B(J_X, \gamma)) \supset J_Y$  открыто. Пусть  $\alpha > 0$  таково, что  $B(J_Y, \alpha) \subset V$ . Из Равенства (2.3.80) следует, что для  $\delta(\varepsilon) > 0$  найдется  $L(\varepsilon) = L(\delta(\varepsilon)) > 0$  такое, что

$$(2.3.81) \quad \beta(\pi^t B(J_X, \gamma), J_X) < \delta(\varepsilon)$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . Из неравенств (2.3.77) и (2.3.81) вытекает неравенство

$$\beta(\sigma^t B(J_Y, \alpha), J_Y) < \varepsilon$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . Теорема полностью доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 10.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - компактно диссипативная неавтономная динамическая система и  $Y$  компактное инвариантное множество (т.е.  $\sigma^t Y = Y$  при всех  $t \in \mathbb{T}_2$ ), тогда:

- (1)  $h(J_X) = Y$  и, следовательно,  $J_y = J_X \cap X_y \neq \emptyset$  при всех  $y \in Y$ , где  $X_y = h^{-1}(y)$ ;
- (2)  $J_y = \{x \in X_y \mid \text{существует целая относительно компактная траектория } \varphi_x \text{ динамической системы } (X, \mathbb{T}_1, \pi) \text{ такая, что } \varphi(0) = x\}$ .

**Замечание 2.3.7.** Нам неизвестно, насколько существенно условие открытости  $h$  в теореме 2.3.29, однако полностью отказаться от этого условия, видимо, нельзя.

Напомним, что  $\varphi : Y \rightarrow X$  называют непрерывным сечением гомоморфизма  $h : X \rightarrow Y$ , если  $\varphi$  непрерывно и  $h \circ \varphi = Id_Y$ .

Непрерывное сечение  $\varphi$  называют инвариантным, если  $\varphi \circ \sigma^t = \pi^t \circ \varphi$  при всех  $t \in \mathbb{T}_1$ .

**Теорема 2.3.30.** Пусть гомоморфизм  $h$  допускает непрерывное инвариантное сечение, тогда:

- (1) если  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна, то  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  также поточечно диссипативна,  $h(\Omega_X) = \Omega_Y$  и  $h(D^+(\Omega_X)) = D^+(\Omega_Y)$ ;
- (2) если  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна, то и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $h(J_X) = J_Y$ ;
- (3) если  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  локально диссипативна, то и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  локально диссипативна.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi$  - непрерывное инвариантное сечение  $h$ . Так как  $h \circ \varphi = id_Y$ , то  $h(X) = Y$ , и первое и второе утверждения вытекают из теоремы 2.3.29, кроме равенства  $h(D^+(\Omega_X)) = D^+(\Omega_Y)$ . Для доказательства последнего равенства заметим, что в силу компактности  $\Omega_X$  из леммы 28 следует включение  $h(D^+(\Omega_X)) \subseteq D^+(\Omega_Y)$ .

Покажем, что имеет место и обратное включение. Действительно, согласно теореме 2.3.29 динамическая система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  поточечно диссипативна и  $\Omega_Y = h(\Omega_X)$  компактно. Так как  $\varphi : Y \rightarrow X$  есть гомоморфизм  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  в  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , то согласно лемме 28  $\varphi(D^+(\Omega_Y)) \subseteq D^+(\Omega_X)$  и, следовательно,

$$D^+(\Omega_Y) = h \circ \varphi(D^+(\Omega_X)) \subseteq h(D^+(\Omega_X)).$$

Пусть  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  локально диссипативна, тогда по доказанному выше динамическая система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна. Согласно теореме 1.6.15 для локальной диссипативности  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  достаточно показать, что ее центр Левинсона  $J_Y$  является равномерно притягивающим множеством. Также, как и в теореме 2.3.29, для произвольного  $\varepsilon > 0$  ( $\eta > 0$ ) можно подобрать  $\delta(\varepsilon) > 0$  ( $\xi(\eta) > 0$ ) так, что

$$(2.3.82) \quad \rho(h(x), J_Y) < \varepsilon \quad (\rho(\varphi(y), J_X) < \eta)$$

при всех  $x \in B(J_X, \delta)$  ( $y \in B(J_Y, \xi)$ ). Так как  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  локально диссипативна, то существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$(2.3.83) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\pi^t B(J_X, \gamma), J_X) = 0.$$

Положим  $\nu = \xi(\gamma) > 0$  и покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\sigma^t B(J_Y, \nu), J_Y) = 0.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , согласно (2.3.83) найдется  $L(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$(2.3.84) \quad \pi^t B(J_X, \gamma) \subseteq B(J_X, \delta)$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . В силу выбора  $\nu$  имеем

$$(2.3.85) \quad \varphi(B(J_X, \gamma)) \subseteq B(J_X, \gamma).$$

Из включений (2.3.84) и (2.3.85) вытекает, что

$$(2.3.86) \quad \pi^t \varphi(B(J_X, \gamma)) \subseteq B(J_X, \delta)$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . Из (2.3.82) и (2.3.86) получаем

$$(2.3.87) \quad h(\pi^t \varphi(B(J_Y, \nu))) \subseteq B(J_X, \varepsilon)$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . Так как  $h \circ \pi^t \circ \varphi = \sigma^t \circ h \circ \varphi = \sigma^t$  ( $h \circ \varphi = Id_Y$ ) при всех  $t \in \mathbb{T}_1$ , то из (2.3.87) имеем

$$\sigma^t B(J_Y, \nu) \subseteq B(J_Y, \varepsilon)$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$ . Теорема полностью доказана.



### 2.4. Динамические системы с конвергенцией

Изучим один специальный класс неавтономных динамических систем, называемых системами с конвергенцией.

Неавтономную систему  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  назовем конвергентной, если выполнены следующие условия:

- (1)  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативны;
- (2)  $J_X \cap X_y$  содержит ровно одну точку  $x_y$  (т.е.  $J_X \cap X_y = \{x_y\}$ ), каково бы ни было  $y \in J_Y$ , где  $J_X(J_Y)$  - центр Левинсона динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$   $((Y, \mathbb{T}_2, \sigma))$ .

Напомним, что целой траекторией динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , проходящей через точку  $x \in X$ , называется непрерывное отображение  $\varphi: S \rightarrow X$ , удовлетворяющее следующим условиям:  $\varphi(0) = x$  и  $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$  при всех  $t \in \mathbb{T}_1$  и  $s \in S$ .

Множество  $K \subseteq X$  назовем слабо инвариантным, если через каждую точку  $x \in K$  проходит хотя бы одна целая траектория, целиком лежащая в  $K$ .

Пусть  $K \subseteq X$  и  $K \otimes K = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in K, h(x_1) = h(x_2)\}$ . Имеет место следующая

**Лемма 29.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система,  $K \subseteq X$  - компактное слабо инвариантное множество и  $M = h(K)$ . Если

$$(2.4.88) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{(x_1, x_2) \in K \otimes K} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0,$$

то  $K_y = K \cap X_y$  состоит ровно из одной точки при всех  $y \in M$ .

*Доказательство.* Если допустить, что это не так, то найдется  $y_0 \in M$ , такое что  $K_{y_0}$  содержит по крайней мере две различные точки  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Так как  $K$  слабо инвариантно, то существует целая траектория  $\varphi_i$ , проходящая через точку  $\bar{x}_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $t = 0$  и целиком находящаяся в  $K$ , т.е.  $\varphi_i(S) \subseteq K$ . Пусть  $0 < \varepsilon < \frac{\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{2}$  и  $L(\varepsilon) > 0$  таковы, что

$$(2.4.89) \quad \rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$$

при всех  $t \geq L(\varepsilon)$  и  $(x_1, x_2) \in K \otimes K$ . Тогда, в частности, имеем

$$(2.4.90) \quad \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \rho(\pi^t \varphi_1(-t), \pi^t \varphi_2(-t)) < \varepsilon$$

при  $t \geq L(\varepsilon)$ . Неравенство (2.4.90) противоречит выбору  $\varepsilon$ . Лемма доказана.

Будем говорить, что система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  удовлетворяет условию (А), если для любого  $K \in C(X)$ , множество  $\Sigma^+(K) := \bigcup \{\pi^t K \mid t \geq 0\}$  относительно компактно.

Обозначим через  $L_X$  множество всех точек  $x \in X$ , через которые проходит хотя бы одна целая относительно компактная траектория  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

**Замечание 2.4.8.** Заметим, что для компактно диссипативных динамических систем  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  имеет место равенство  $L_X = J_X$ , где  $J_X$  центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

Будем говорить, что полутраектория  $\Sigma_x^+ = \{xt \mid t \geq 0\}$  асимптотически устойчива относительно неавтономной системы (2.1.54), если

- (1) для любых  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon, x) > 0$  такое, что  $\rho(x, p) < \delta$  ( $h(x) = h(p)$ ) влечет  $\rho(xt, pt) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- (2) существует  $\gamma = \gamma(x) > 0$  такое, что из  $(x, p) \in X \otimes X$  и  $\rho(x, p) < \gamma$  следует  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, pt) = 0$ .

**Теорема 2.4.31.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  неавтономная динамическая система,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  удовлетворяет условию (A) и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $L_X \cap X_y$  содержит не более одной точки, каково бы ни было  $y \in J_Y$ ;
- (2) каждая полутраектория  $\Sigma_x^+ = \{xt \mid t \geq 0\}$  асимптотически устойчива относительно неавтономной системы (2.1.54).
- (3) (а) для любого  $\varepsilon > 0$  и  $K \in C(X)$  существует  $\delta(\varepsilon, K) > 0$  такое, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  ( $h(x_1) = h(x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in K$ ) влечет  $\rho(x_1t, x_2t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- (б)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1t, x_2t) = 0$  при всех  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$ ;
- (4) Имеет место равенство (2.4.88) для любых  $K \in C(X)$ .

*Доказательство.* Пусть выполнено условие 1. и докажем 2.. Прежде всего докажем 2а. Если допустить, что 2.(а) неверно, то найдутся  $p_0 \in X$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $p_n \rightarrow p_0$  ( $h(p_n) = h(p_0)$ ) и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.4.91) \quad \rho(p_n t_n, p_0 t_n) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  удовлетворяет условию (A), то последовательности  $\{p_n t_n\}$  и  $\{p_0 t_n\}$  можно считать сходящимися. Положим  $\bar{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n t_n$  и  $\bar{p}_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_0 t_n$ . Из неравенства (2.2.70) следует, что  $\bar{p} \neq \bar{p}_0$ . С другой стороны,  $h(\bar{p}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(p_n) t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(p_0) t_n = h(\bar{p}_0) = \bar{y} \in J_Y$ , и, согласно лемме 3,  $\bar{p}, \bar{p}_0 \in L_X \cap X_{\bar{y}}$ , что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие показывает, что из 1. следует 2а. Покажем теперь, что для любого  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$  имеет место равенство

$$(2.4.92) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0.$$

Если допустить, что противное, то найдутся  $(x_1^0, x_2^0) \in X \otimes X$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.4.93) \quad \rho(x_1^0 t_n, x_2^0 t_n) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  удовлетворяет условию (А), то последовательности  $\{x_i^0 t_n\}$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\{y_0 t_n\}$  ( $y_0 = h(x_1^0) = h(x_2^0)$ ) можно считать сходящимися. Положим  $\bar{x}_i^0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^0 t_n$  и  $\bar{y}_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_0 t_n$ , тогда  $\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0 \in L_X \cap X_{\bar{y}_0}$ , и в силу условия 1.  $\bar{x}_1^0 = \bar{x}_2^0$ . Последнее противоречит неравенству (2.4.93). Докажем теперь, что из 2. следует 3. Прежде всего покажем, что если  $p_0 \in X$  и  $x \in X_q$  ( $q = h(p)$ ), то

$$(2.4.94) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, pt) = 0.$$

Допустим, что это не так. Обозначим через  $G_q$  множество всех точек  $x \in X_q$ , для которых имеет место равенство (2.4.94). В силу нашего допущения  $G_q \neq X_q$ . Отметим, что в условиях теоремы множество  $G_q$  открыто в  $X_q$ . Положим  $\Gamma_q := \partial G_q$  ( $\partial G_q$  - граница  $G_q$ ) и пусть  $\bar{p} \in \Gamma_q$ . Тогда  $B(\bar{p}, \gamma(\bar{p}))$  имеет пустое пересечение с  $G_q$  и с  $X_q \setminus G_q$ . Нетрудно заметить, что эти соотношения совместно выполняются не могут и, следовательно,  $\Gamma_q = \emptyset$  для любого  $q \in Y$ , т.е.  $X_q = G_q$ . Пусть теперь  $K \in C(X)$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует  $\delta(\varepsilon, K) > 0$  такое, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  ( $h(x_1) = h(x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in K$ ) влечет  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $K_0 \in C(X)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ ,  $\{x_n^i\} \subseteq K_0$  ( $i = 1, 2$ ) и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что  $\rho(x_n^1, x_n^2) < \delta_n$  и

$$(2.4.95) \quad \rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \geq \varepsilon_0$$

В силу компактности  $K_0$  последовательности  $\{x_n^i\}$  ( $i = 1, 2$ ) можно считать сходящимися. Положим  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2$  ( $\bar{x} \in K_0$ ). Так как полутраектория  $\Sigma_{\bar{x}}^+$  асимптотически устойчива, то для  $\frac{\varepsilon_0}{3} > 0$  и  $\bar{x} > 0$  существует  $\delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \bar{x})$  такое, что  $\rho(x, \bar{x}) < \delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \bar{x})$  ( $h(x) = h(\bar{x})$ ) влечет  $\rho(xt, \bar{x}t) < \frac{\varepsilon_0}{3}$  при всех  $t \geq 0$ . Так как  $x_n^i \rightarrow \bar{x}$  ( $i = 1, 2$ ) при  $n \rightarrow +\infty$ , то существует  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  такое, что  $\rho(x_n^i, \bar{x}) < \frac{\varepsilon_0}{3}$  при всех  $n \geq \bar{n}$ . Из последнего неравенства получаем

$$(2.4.96) \quad \rho(x_n^1 t, x_n^2 t) \leq \frac{2\varepsilon_0}{3}$$

при всех  $t \geq 0$  и  $n \geq \bar{n}$ . Однако, неравенство (2.4.96) противоречит (2.4.95). Таким образом мы показали, что из 2. следует 3.

Покажем теперь, что из условия 3. следует 4. Доказательство проведем методом от противного. Если допустить, что из 3. не следует 4., то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $K_0 \in C(X)$ , последовательности  $t_n \rightarrow +\infty$  и  $\{x_n^i\} \subseteq K_0$  ( $i = 1, 2$ ;  $h(x_n^1) = h(x_n^2)$ ) такие, что выполнено неравенство (2.4.95). В силу компактности  $K_0$  последовательности  $\{x_n^i\}$  ( $i = 1, 2$ ) можно считать сходящимися. Положим  $x^i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  и  $\delta(\frac{\varepsilon}{3}, K_0) > 0$  выбрано по  $\frac{\varepsilon_0}{3}$  и по компактности  $K_0 \in C(X)$  из условия 3.(а). Так как  $h(x^1) = h(x^2)$  и  $x^1, x^2 \in K_0$ , то для числа  $\frac{\varepsilon}{3}$  найдется  $L(\frac{\varepsilon}{3}, x^1, x^2) > 0$  такое, что

$\rho(x^1t, x^2t) < \frac{\varepsilon}{3}$  для всех  $t \geq L(\frac{\varepsilon}{3}, x^1, x^2)$ , и, следовательно,

$$(2.4.97) \quad \begin{aligned} \rho(x_n^1t_n, x_n^2t_n) &\leq \rho(x_n^1t_n, x^1t_n) \\ &+ \rho(x^1t_n, x^2t_n) + \rho(x^2t_n, x_n^2t_n) < \varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно больших  $n$ . Неравенство (2.4.97) противоречит (2.4.95). Полученное противоречие показывает, что наше допущение не имеет места, т.е. выполняется неравенство (2.4.88). Наконец, заметим, что из 4. следует 1. Действительно, если допустить, что это не так, то найдется  $y_0 \in J_Y$ , такое, что  $L_X \cap X_{y_0}$  содержит более одной точки. Пусть  $x_1, x_2 \in L_X \cap X_{y_0}$  ( $x_1 \neq x_2$ ) и  $M$  - компактное инвариантное множество, содержащее точки  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда согласно лемме 29  $M_{y_0} = M \cap X_{y_0}$  содержит не более одной точки, а, с другой стороны,  $x_1 \neq x_2$  и  $x_1, x_2 \in M_{y_0}$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**СЛЕДСТВИЕ 11.** Пусть  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативны, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна;
- (2) каждая полутраектория  $\Sigma_x^+(x \in X)$  асимптотически устойчива;
- (3) (а) для любого  $\varepsilon > 0$  и  $K \in C(X)$  существует  $\delta(\varepsilon, K) > 0$  такое, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  ( $h(x_1) = h(x_2), x_1, x_2 \in K$ );  
(б)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1t, x_2t) = 0$  для любых  $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$ ;
- (4) для любого  $K \in C(X)$  имеет место равенство (2.4.88).

**Теорема 2.4.32.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система,  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  локально вполне непрерывна (т.е. для любого  $x \in X$  существуют  $\delta = \delta_x > 0$  и  $l = l_x > 0$  такие, что  $\pi^l B(x, \delta_x)$  относительно компактно). Для того, чтобы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы каждая полутраектория  $\Sigma_x^+$  системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  была относительно компактной и чтобы была конвергентной система  $\langle (h^{-1}(J_Y), \mathbb{T}_1, \pi), (J_Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ , где  $J_Y$  - центр Левинсона  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ .

*Доказательство.* Необходимость условий теоремы непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Достаточность. Прежде всего покажем, что  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна. Для этого в условиях теоремы достаточно показать, что  $\Omega_X = \overline{\bigcup \{\omega_x | x \in X\}}$  компактно. Заметим, что  $h(\omega_x) \subseteq \omega_{h(x)} \subseteq J_Y$  и, следовательно,  $\omega_x \subseteq h^{-1}(J_Y)$ . Так как  $\omega_x$  компактно и инвариантно, то  $\omega_x \subseteq \tilde{J}$ , где  $\tilde{J}$  центр Левинсона динамической системы  $(h^{-1}(J_Y), \mathbb{T}_1, \pi)$ . Таким образом,  $\Omega_X \subseteq \tilde{J}$ , и, следовательно,  $\Omega_X$  компактно. Согласно теореме 1.4.7 для локально вполне непрерывных динамических систем поточечная и компактная диссипативности эквивалентны. Таким образом,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна. Пусть  $J_X$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , тогда  $h(J_X) \subseteq J_Y$  и, следовательно,  $J_X \subseteq h^{-1}(J_Y)$ . Так как  $\tilde{J}$  - максимальное компактное инвариантное множество в  $(h^{-1}(J_Y), \mathbb{T}_1, \pi)$ , то  $J_X \subseteq \tilde{J}$ , и

поэтому  $J_X \cap X_y \subseteq \tilde{J} \cap X_y$  при всех  $y \in J_Y$ . Из последнего включения следует, что множество  $J_X \cap X_y$  содержит не более одной точки, каково бы ни было  $y \in J_Y$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.4.33.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система,  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и существует  $y_0 \in Y$  такое, что  $Y = H^+(y_0)$ . Для того чтобы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была конвергентной, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

- (1)  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  удовлетворяет условию (A);
- (2)  $L_X \cap X_y$  содержит не более одной точки, каково бы ни было  $y \in J_Y = \omega_{y_0}$ .

*Доказательство.* Необходимость условий 1 и 2 очевидна.

Достаточность. Пусть  $x_0 \in X_{y_0}$ , тогда  $h(H^+(x_0)) = H^+(y_0)$  и  $h(\omega_{x_0}) = \omega_{y_0}$ . Далее заметим, что  $h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y \subseteq J_Y = \omega_{y_0}$  и так как  $\omega_{x_0} \subseteq \Omega_X$ , то  $h(\Omega_X) = \omega_{y_0}$ . Так как  $\Omega_X \subseteq L_X$ ,  $L_X \cap X_y$  содержит не более одной точки при всех  $y \in J_Y = \omega_{y_0}$ . Таким образом,  $\Omega_X = \omega_{x_0}$  компактно, а, значит,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна. Так как  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна и удовлетворяет условию (A), то согласно теореме 1.5.12  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна. Пусть  $J_X$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , тогда  $J_X \subseteq L_X$ , и, следовательно,  $J_X \cap X_y$  содержит не более одной точки, каково бы ни было  $y \in J_Y$ . Теорема доказана.

Точка  $y_0 \in Y$  называется [133] асимптотически стационарной (асимптотически  $\tau$ -периодической, асимптотически почти периодической, асимптотически рекуррентной), если существует стационарная ( $\tau$ -периодическая, почти периодическая, рекуррентная) точка  $p \in Y$  такая, что

$$(2.4.98) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(y_0 t, p t) = 0.$$

**Замечание 2.4.9.** 1. Пусть  $Y = H^+(y_0)$  компактно. Тогда динамическая система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $J_Y = \omega_{y_0}$ ;

2. Пусть  $y_0$  асимптотически стационарна (асимптотически  $\tau$ -периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и  $Y = H^+(y_0)$ . Тогда  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $J_Y = \omega_{y_0}$ .

Точка  $x \in X$  называется [133] сравнимой по возвращаемости в пределе с  $y \in Y$ , если  $\mathcal{L}_y \subseteq \mathcal{L}_x$ , где  $\mathcal{L}_y = \{\{t_n\} | t_n \rightarrow +\infty \text{ и } \{y t_n\} \text{ сходится}\}$ .

Известно [133],[91], что точка  $x \in X$ , сравнимая по возвращаемости в пределе с  $y \in Y$ , имеет тот же характер возвращаемости в пределе, что и  $y \in Y$ . В частности, если точка  $y \in Y$  асимптотически стационарна (асимптотически  $\tau$ -периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и  $x \in X$  сравнима по возвращаемости в пределе с  $y \in Y$ , то и точка  $x$  асимптотически стационарна (асимптотически

$\tau$ -периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна).

**Теорема 2.4.34.** Пусть  $y_0$  асимптотически стационарна (асимптотически  $\tau$ -периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и  $Y = H^+(y_0)$ . Тогда чтобы система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1)  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  удовлетворяет условию (A);
- (2) каждая точка  $x \in X$  сравнима по возвращаемости в пределе с  $y = h(x)$ , и, в частности,  $x$  асимптотически стационарна (асимптотически  $\tau$ -периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна);
- (3) для любых  $\varepsilon > 0$  и  $K \in C(X)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, K)$  такое, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  ( $h(x_1) = h(x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in K$ ) влечет  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  для любого  $t \geq 0$ ;
- (4) равенство  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$  имеет место для любых  $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$ .

*Доказательство.* Необходимость условий 1., 3. и 4. вытекает из замечания 2.4.9. Нам остается доказать, что в условиях теоремы имеет место условие 2. Пусть  $x \in X$  и  $y = h(x)$ , тогда согласно конвергентности системы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  множество  $H^+(x)$  компактно. Заметим, что  $\omega_x \cap X_q \subseteq J_X \cap X_q$  для любого  $q \in \omega_y$ , и так как  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна, то  $\omega_x \cap X_q$  содержит ровно одну точку. Согласно теореме 1 [91] точка  $x$  сравнима по возвращаемости в пределе с  $y$ . Если  $y \in H^+(y_0)$ , то очевидно, что  $y$  асимптотически стационарна (асимптотически  $\omega$ -периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и, следовательно,  $x$  тоже.

Покажем, что 1., 2., 3. и 4. обуславливают конвергентность системы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ . Сначала из условия 2. получаем, что  $\omega_x \neq \emptyset$ , компактно, минимально и  $h(\omega_x) = \omega_{y_0}$  для любого  $x \in X$ . Отметим, что  $\omega_x \cap X_q$  содержит ровно одну точку для любого  $q \in \omega_{y_0}$ . В противном случае существуют  $q_0 \in \omega_{y_0}, p_1, p_2 \in \omega_x \cap X_q$  ( $p_1 \neq p_2$ ) и  $t_n^i \rightarrow +\infty$  ( $i = 1, 2$ ) такие, что  $x t_n^i \rightarrow p_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $n \rightarrow +\infty$ . Заметим, что  $y t_n^i \rightarrow q_0$  ( $i = 1, 2$ ) при  $n \rightarrow +\infty$ , где  $y = h(x)$ . Положим  $\tilde{t}_{2n-1} = t_n^1$ ,  $\tilde{t}_{2n} = t_n^2$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , тогда  $\{\tilde{t}_n\} \in \mathcal{L}_y$  и следовательно  $\{\tilde{t}_n\} \in \mathcal{L}_x$ , т.е.  $\{x \tilde{t}_n\}$  сходится, откуда следует, что  $p_1 = p_2$ . Последнее равенство противоречит выбору  $p_1$  и  $p_2$ . Полученное противоречие доказывает необходимое утверждение. Докажем сейчас, что  $\omega_{x_1} \cap X_q = \omega_{x_2} \cap X_q$  для всех  $x_1, x_2 \in X$  и  $q \in \omega_{y_0}$ . Пусть  $q \in \omega_{y_0}$ ,  $\{p_i\} = \omega_{x_i} \cap X_q$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\{t_n\} \in \mathcal{L}_q$  такие, что  $q t_n \rightarrow q$ . Из условия 4. и минимальности  $\omega_{x_i}$  ( $i = 1, 2$ ) имеем  $\rho(p_1 t_n, p_2 t_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  и, следовательно,  $p_1 = p_2$ . Таким образом  $\omega_{x_1} = \omega_{x_2}$  для всех  $x_1, x_2 \in X$  и, следовательно, система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна, и так как она удовлетворяет условию

(A), то согласно теореме 2.4.33  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна. Для завершения доказательства теоремы достаточно применить теорему 2.4.31 и замечание 2.4.8.

**СЛЕДСТВИЕ 12.** В условиях теоремы 2.4.32 если пространство  $X$  локально компактно, то условие 1. теоремы 2.4.34 вытекает из условий 2., 3. и 4.

**Теорема 2.4.35.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система,  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и ее центр Левинсона  $J_Y$  является минимальным множеством (т.е. любая полутраектория  $\Sigma_y^+$  ( $y \in J_Y$ ) является плотной в  $J_Y$ ). Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) неавтономная система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна;
- (2)  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  удовлетворяет условию (A) и для любого  $K \in C(X)$  имеет место равенство (2.4.88).

*Доказательство.* Согласно следствию 11 из 1. следует 2. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что из 2 следует 1. Пусть  $K \in C(X)$ . Так как  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно, то согласно лемме 3 множество  $\omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} \bigcup_{\tau \geq t} \pi^\tau K$  непусто, компактно, инвариантно и, следовательно,  $h(\omega(K)) \subseteq \omega(h(K)) \subseteq J_Y$ , так как  $J_Y$  максимальное компактное инвариантное множество в  $Y$ . В силу минимальности  $J_Y$  имеет место равенство

$$(2.4.99) \quad h(\omega(K)) = J_Y.$$

Заметим, что  $\omega(K_1) = \omega(K_2)$  для любого  $K_1$  и  $K_2$  из  $C(X)$ . Действительно, так как  $M = \omega(K_1) \cup \omega(K_2)$  компактно и инвариантно, а  $J_Y$  минимально, то  $h(M) = J_Y$ . С другой стороны, согласно лемме 29  $M_y = M \cap X_y$  содержит ровно одну точку, каково бы ни было  $y \in J_Y$ . Далее, так как  $\omega(K_i) \cap X_y \subseteq M \cap X_y$  ( $i = 1, 2$ ), то  $\omega(K_1) \cap X_y = \omega(K_2) \cap X_y = M \cap X_y$  при всех  $y \in J_Y$  и, следовательно,  $\omega(K_1) = \omega(K_2)$ . Поскольку  $\omega(K_1) = \omega(K_2)$  для любых  $K_1$  и  $K_2$  из  $C(X)$ , то  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна и, согласно теореме 2.4.31  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.

**СЛЕДСТВИЕ 13.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система,  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна,  $J_Y$  минимально и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  удовлетворяет условию (A), тогда условия 1.-4. в следствии 11 эквивалентны.

**Теорема 2.4.36.** Пусть  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $h(L_X) = J_Y$ . Для того чтобы неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была конвергентной, необходимо, а если  $J_Y = Y$ , то и достаточно, выполнение следующих условий:

- (1)  $\Sigma_x^+$  относительно компактно, каково бы ни было  $x \in X$ , и  $L_X$  относительно компактно;

- (2)  $L_X \cap X_y$  содержит ровно одну точку каково бы ни было  $y \in Y$ ;  
 (3) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(x, x_y) < \delta$  ( $\{x_y\} = L_X \cap X_y$  и  $h(x) = y \in J_Y$ ) влечет  $\rho(xt, x_{yt}) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$  и  $x \in X$ .

*Доказательство.* Необходимость. Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна, тогда  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна и  $J_X = L_X$ . Очевидно, что условия 1 и 2 выполнены. Покажем, что имеет место и 3. Допустим, что это не так, тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $\{x_n\}$  из  $X$  и  $\{y_n\}$  из  $J_Y$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что  $\rho(x_n, x_{y_n}) < \delta_n$  ( $y_n = h(x_n)$ ) и

$$(2.4.100) \quad \rho(x_n t_n, x_{y_n} t_n) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $J_Y$  и  $J_X$  компактны, то последовательности  $\{y_n\}$  и  $\{x_{y_n}\}$  можно считать сходящимися. Положим  $y_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ , тогда  $x_{y_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . В силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  последовательность  $\{x_n t_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$ . Далее, так как  $y_n t_n \in J_Y$ , то последовательность  $\{y_n t_n\}$  также можно считать сходящейся, и положим  $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n t_n$ . Заметим, что

$$h(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n t_n = \bar{y}, \quad \bar{x} \in J_X,$$

и, следовательно,  $\bar{x} \in J_X \cap X_{\bar{y}} = \{x_{\bar{y}}\}$ , т.е.  $\bar{x} = x_{\bar{y}}$ . С другой стороны, переходя к пределу в (2.4.100) при  $n \rightarrow +\infty$ , имеем  $\rho(\bar{x}, x_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0$ . Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

*Достаточность.* Пусть выполнены условия 1., 2. и 3. теоремы. Для конвергентности  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  достаточно показать, что в условиях теоремы динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна. Согласно условию теоремы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна и  $\Omega_X = \overline{\{\omega_x | x \in X\}} \subseteq L_X$ . Заметим, что  $L_X$  замкнуто. Покажем, что  $L_X$  орбитально устойчиво. Допустим, что это не так, тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $x_n \rightarrow x_0 \in L_X$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.4.101) \quad \rho(x_n t_n, L_X) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $y_n \rightarrow y_0 = h(x_0)$ , где  $y_n = h(x_n)$ , то в условиях теоремы  $x_{y_n} \rightarrow x_{y_0} = x_0$ , и, следовательно,  $\rho(x_n, x_{y_n}) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_{y_n}) \rightarrow 0$ . Из последнего соотношения и условия 3. теоремы следует, что  $\rho(x_n t_n, x_{y_n} t_n) \rightarrow 0$ . Последнее противоречит неравенству (2.4.101). Итак,  $L_X$  компактно, инвариантно и орбитально устойчиво. Так как  $\Omega_X \subseteq L_X$ , то  $J^+(\Omega_X) \subseteq L_X$ . Покажем, что  $J^+(\Omega_X) = J_X$ . Действительно, пусть  $\bar{x} \in L_X$  и  $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow L_X$  целая траектория  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , проходящая через точку  $\bar{x}$  при  $t = 0$ . Обозначим через  $\alpha_{\varphi_{\bar{x}}} = \bigcap_{t \leq 0} \bigcup_{\tau \leq t} \varphi(\tau)$ , тогда  $\Omega_X \cap \alpha_{\varphi_{\bar{x}}} \neq \emptyset$ . Пусть  $p \in \alpha_{\varphi_{\bar{x}}} \cap \Omega_X$ , тогда существует  $t_n \rightarrow -\infty$  такая, что  $\varphi(t_n) \rightarrow p$  и, следовательно,  $\pi^{-t_n} \varphi(t_n) = \varphi(0) = \bar{x}$ , т.е.  $\bar{x} \in J_p^+ \subseteq J^+(\Omega_X)$ . Таким образом,  $L_X \subseteq J^+(\Omega_X)$ , т.е.  $L_X = J^+(\Omega_X)$  компактно и орбитально



устойчиво и, согласно теореме 1.5.10,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна. Теорема доказана.

**Теорема 2.4.37.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система и  $Y$  - компактное минимальное множество. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна;
- (2) любая полутраектория  $\Sigma_x^+$  ( $x \in X$ ) относительно компактна и асимптотически устойчива;
- (3) (а) любая полутраектория  $\Sigma_x^+$  ( $x \in X$ ) относительно компактна;
- (б)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$  при всех  $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$ ;
- (в) для любых  $\varepsilon > 0$  и  $K \in C(X)$  существует  $\delta(\varepsilon, K) > 0$  такое, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  ( $h(x_1) = h(x_2); x_1, x_2 \in K$ ) влечет  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- (4) любая полутраектория  $\Sigma_x^+$  ( $x \in X$ ) относительно компактна и имеет место равенство (2.4.88) для любого компакта  $K \in C(X)$ .

*Доказательство.* Импликации 1.  $\Rightarrow$  2.  $\Rightarrow$  3.  $\Rightarrow$  4. доказываются незначительной модификацией рассуждений из доказательства теоремы 2.4.31. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что из 4. следует 1.. Пусть  $x_0 \in X$ . Так как  $\Sigma_{x_0}^+$  относительно компактно, то  $\omega_{x_0} \neq \emptyset$ , компактно и все движения в  $\omega_{x_0}$  продолжаемы влево. Положим  $M = \omega_{x_0}$ . Так как  $h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y \subseteq Y$  и  $Y$  минимально, то  $h(M) = Y$  и, следовательно,  $M_y = M \cap X_y \neq \emptyset$ , каково бы ни было  $y \in Y$ . Согласно лемме 22 множество  $M_y$  состоит ровно из одной точки, каково бы ни было  $y \in Y$ . Покажем теперь, что для любого  $x \in X$  имеет место равенство  $\omega_x = M$ . Действительно, пусть  $K = \omega_x \cup M$ , тогда согласно лемме 29  $K_y = K \cap X_y$  состоит ровно из одной точки при всех  $y \in Y$ . Так как  $h(\omega_x) = h(\omega_{x_0}) = h(K) = Y$ , то  $\omega_x \cap X_y = \omega_{x_0} \cap X_y = K \cap X_y$  при всех  $y \in Y$  и, следовательно,  $\omega_x = \omega_{x_0} = M$  при всех  $x \in X$ . Таким образом,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна. Пусть теперь  $K \in C(X)$ , тогда  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно. Действительно, если  $\{x_n\} \subseteq K$  и  $t_n \rightarrow +\infty$ , то согласно условию 4. имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n t_n, M_{h(x_n) t_n}) = 0,$$

и, следовательно, последовательность  $\{x_n t_n\}$  относительно компактна. Согласно теореме 1.5.12 динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна. Пусть  $J_X$  - центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . Тогда согласно лемме 29 множество  $J_X \cap X_y$  содержит ровно одну точку, каково бы ни было  $y \in Y$ . Теорема полностью доказана.

**Теорема 2.4.38.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система,  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $M \subseteq X$  -

непустое компактное положительно инвариантное множество, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1)  $h(M) = Y$ ;
- (2)  $M \cap X_y$  состоит ровно из одной точки, каково бы ни было  $y \in J_Y$ ;
- (3)  $M$  равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(x, p) < \delta$  ( $x \in X_y, p \in M_y = M \cap X_y$ ) влечет  $\rho(xt, pt) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, M_{h(x)t}) = 0$  при всех  $x \in X$ .

Тогда неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.

*Доказательство.* Заметим, что в условиях теоремы динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна и  $\Omega_X \subseteq M$ . Покажем, что  $M$  орбитально устойчиво. Допустим, что это не так, тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0, \delta_n \downarrow 0, x_n \in B(M, \delta_n)$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.4.102) \quad \rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактности  $M$  последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. Пусть  $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, x_{y_n} \in M_{y_n}, \rho(x_n, M) = \rho(x_n, x_{y_n})$  и  $y = h(x_0)$ , тогда  $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{y_n}$  и  $x_0 \in M_{y_0}$ . Положим  $q_n = h(x_n)$  и заметим, что

$$(2.4.103) \quad \rho(x_n, x_{q_n}) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(x_{y_n}, x_{q_n}) \rightarrow 0.$$

при  $n \rightarrow +\infty$ , так как  $q_n \rightarrow y_0$  и  $x_{q_n} \rightarrow x_0$ . Из (2.4.103) и равномерной асимптотической устойчивости по Ляпунову в целом множества  $M$  следует, что

$$(2.4.104) \quad \rho(x_n t_n, x_{q_n t_n}) = \rho(x_n t_n, x_{q_n t_n}) \rightarrow 0.$$

Неравенство (2.4.104) противоречит (2.4.102). Таким образом,  $M$  орбитально устойчиво и согласно теореме 1.5.10 динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна и  $J_X \subseteq M$ . Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что  $h(J_X) = J_Y$  и для любого  $y \in J_Y$  имеет место включение  $J_X \cap X_y \subseteq M \cap X_y$  и, следовательно,  $J_X \cap X_y$  содержит ровно одну точку, каково бы ни было  $y \in J_Y$ . Теорема доказана.

**Замечание 2.4.10.** Если существует  $y_0 \in Y$  такое, что  $Y = H^+(y_0)$ , то теорема 2.4.38 очевидно обратима. Для этого в качестве  $M$ , фигурирующего в теореме 2.4.38, можно взять  $H^+(x_0)$ , где  $x_0 \in X_{y_0}$ .

## 2.5. Некоторые признаки конвергентности неавтономных динамических систем

Отметим, что в теоремах 2.3.29 и 2.3.30 указаны условия, при которых сохраняется свойство компактной диссипативности при гомоморфизмах.

Ниже приводятся некоторые утверждения, которые дают условия диссипативности системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , если таковой является система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  и существует гомоморфизм  $h$  первой на вторую.

Пусть  $h$  гомоморфизм  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ . Множество  $M \subseteq X$  называют равномерно устойчивым в положительном направлении относительно гомоморфизма  $h$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$  такое, что при всех  $x_1, x_2 \in M$ , для которых  $h(x_1) = h(x_2)$   $\rho(x_1, x_2) < \delta$  влечет  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ .

Динамическую систему  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  называют равномерно устойчивой (в положительном направлении) относительно гомоморфизма  $h$  на компактах из  $X$ , если любой компакт  $M \in C(X)$  является равномерно устойчивым в положительном направлении относительно гомоморфизма.

**Лемма 30.** Пусть гомоморфизм  $h$  удовлетворяет следующим условиям:

- (1) существует непрерывное инвариантное сечение  $\varphi : Y \rightarrow X$  гомоморфизма  $h$ ;
- (2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$  при всех  $x_1, x_2 \in X$  ( $h(x_1) = h(x_2)$ );
- (3)  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из  $X$  относительно  $h$ .

Тогда:

- (1) если  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  поточечно диссипативна, то  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  также поточечно диссипативна, причем  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  гомеоморфны;
- (2) если  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна, то  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  также компактно диссипативна, причем  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  гомеоморфны.

*Доказательство.* Пусть  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  поточечно диссипативна. Тогда  $\Omega_Y$  - непустое компактное инвариантное множество и, следовательно,  $M := \varphi(\Omega_Y) \subseteq \Omega_X$  также непусто, компактно и инвариантно. Для  $x \in X$  и  $y = h(x)$  имеем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x t, \varphi(y) t) = 0$ . Следовательно,  $\Sigma_x^+$  относительно компактно. Кроме того  $\omega_x \subseteq \omega_{\varphi(y)} \subseteq \varphi(\Omega_Y) = M$ . Отсюда  $\Omega_X \subseteq M$ . Таким образом,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна и  $\varphi(\Omega_Y) = \Omega_X$ . Так как  $\varphi : \Omega_Y \rightarrow \Omega_X$  разделяет точки и  $\Omega_Y$  компактно, то  $\Omega_Y$  и  $\Omega_X$  гомеоморфны.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна. Тогда согласно доказанному выше  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна. Положим

$$M := \varphi(J_Y) = \varphi(D^+(\Omega_Y)) \subseteq D^+(\Omega_X).$$

Покажем, что  $M$  орбитально устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют  $\varepsilon_0, x_n \rightarrow x_0 \in M$  и  $t_n \rightarrow +\infty$ , такие что

$$(2.5.105) \quad \rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0.$$

Заметим, что  $h(x_n) = y_n \rightarrow y_0 = h(x_0) \in h(M) = h\varphi(J_Y) = J_Y$  и в силу компактной диссипативности  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  последовательность  $\{y_n t_n\}$

можно считать сходящейся. Положим  $y := \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n t_n$ . Ясно, что  $y \in J_Y$  и  $\varphi(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(h(x_n)) t_n$ . Так как  $\varphi : J_Y \rightarrow \varphi(J_Y) = M$  разделяет точки и  $h \circ \varphi = id_Y$ , то  $\varphi : J_Y \rightarrow M = \varphi(J_Y)$  есть гомеоморфизм, причем  $\varphi \circ h(x) = x$  при всех  $x \in M$  и, следовательно,  $\varphi(h(x_n)) \rightarrow \varphi(h(x_0)) = x_0 \in M$ . Из последнего соотношения следует, что

$$(2.5.106) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n, \varphi \circ h(x_n)) = 0.$$

Пусть  $K = M \cup \overline{\{x_n\}} \cup \overline{\{\varphi \circ h(x_n)\}}$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $\delta(\varepsilon, K) > 0$  - числа из условия равномерной устойчивости в положительном направлении на компактах из  $X$  динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  относительно гомоморфизма  $h$ . Из (2.5.106) следует, что при достаточно больших  $n$  имеет место неравенство  $\rho(x_n, \varphi \circ h(x_n)) < \delta$  и, следовательно,  $\rho(x_n t, \varphi \circ h(x_n) t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . В частности,

$$(2.5.107) \quad \rho(x_n t_n, \varphi \circ h(x_n) t_n) < \varepsilon$$

при достаточно больших  $n$ . Из (2.5.107) в силу произвольности  $\varepsilon$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi \circ h(x_n) t_n = \varphi(y) \in M$ . Последнее противоречит (2.5.105). Полученное противоречие показывает, что  $M$  орбитально устойчиво. Итак,  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  поточечно диссипативна,  $\Omega_X \subseteq M$ ,  $M$  непусто, компактно, инвариантно и орбитально устойчиво. Согласно теореме 1.5.10  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна и  $J_X \subseteq M = \varphi(J_Y) \subseteq D^+(\Omega_X)$ . Согласно теореме 1.5.8 и следствию 5  $J_X = \varphi(J_Y) = D^+(\Omega_X)$ . Таким образом,  $\varphi$  есть гомеоморфизм  $J_Y$  на  $J_X$ . Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 14.** *В условиях леммы 30, если  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна, то  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из леммы 30 и следствия 11.

Пусть  $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$  - групповая динамическая система,  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  - полугрупповая динамическая система и  $h : X \rightarrow Y$  - гомоморфизм  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ . Рассмотрим неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  и обозначим через  $\Gamma_b(Y, X)$  множество всех непрерывных ограниченных сечений гомоморфизма  $h$ . Равенством

$$(2.5.108) \quad d(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{y \in Y} \rho(\varphi_1(y), \varphi_2(y))$$

определяется метрика на  $\Gamma_b(Y, X)$ .

Положим  $X \otimes X := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X, h(x_1) = h(x_2)\}$  и пусть  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$  - отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1)  $a(\rho(x_1, x_2)) \leq V(x_1, x_2) \leq b(\rho(x_1, x_2))$  при всех  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$ , где  $a, b$  некоторые функции из  $\mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{A} := \{a \mid a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, a$  непрерывно, строго возрастает и  $a(0) = 0\}$ ) и  $Im(a) = Im(b)$ ;
- (2)  $V(x_1, x_2) = V(x_2, x_1)$  при всех  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$ ;

- (3)  $V(x_1, x_2) \leq V(x_1, x_3) + V(x_3, x_2)$  при всех  $x_1, x_2, x_3 \in X$  таких, что  $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3)$ .

Из условий 1.–3. следует, что  $V$  на каждом слое  $X_y = h^{-1}(y)$  задает метрику, топологически эквивалентную  $\rho$ .

**Лемма 31.** Пусть  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет условиям 1.–3.. Тогда равенством

$$(2.5.109) \quad p(\varphi_1, \varphi_2) := \sup\{V(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) \mid y \in Y\}$$

определяется на  $\Gamma_b(Y, X)$  полная метрика, топологически эквивалентная (2.5.108).

*Доказательство.* Из условия 1. следует, что функция  $V$  обращается в нуль только по диагонали  $X \otimes X$ , т.е.  $V(x_1, x_2) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ . Отсюда, с учетом равенства (2.5.109), следует, что  $d(\varphi, \psi) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\varphi = \psi$ .

Что касается симметричности  $d$  ( $d(\varphi, \psi) = d(\psi, \varphi)$ ), то это следует из свойства 2. функции  $V$ . Наконец, из 3. следует, что  $d$  удовлетворяет неравенству треугольника.

Топологическая эквивалентность метрик (2.5.108) и (2.5.109) следует из условия 1.

Итак, для завершения доказательства леммы достаточно установить полноту пространства  $(\Gamma_b(Y, X), d)$ . Пусть  $\{\varphi_n\}$  – фундаментальная в  $(\Gamma_b(Y, X), d)$  последовательность, т.е.  $d(\varphi_n, \varphi_m) \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow +\infty$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\mathcal{N}_1(\varepsilon) > 0$  такое, что  $V(\varphi_n(y), \varphi_m(y)) < a(\varepsilon)$  при всех  $y \in Y$  и  $n, m > \mathcal{N}_1(\varepsilon)$ . Тогда

$$a(\rho(\varphi_n(y), \varphi_m(y))) \leq V(\varphi_n(y), \varphi_m(y)) < a(\varepsilon)$$

и, следовательно,  $\rho(\varphi_n(y), \varphi_m(y)) < \varepsilon$  при всех  $n, m \in \mathcal{N}_1(\varepsilon)$  и  $y \in Y$ . Из последнего соотношения и полноты пространства  $(X, \rho)$  следует, что при каждом  $y \in Y$  существует  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(y)$  в  $(X, \rho)$ . Положим  $\varphi(y) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(y)$ . Последнее равенство имеет место равномерно по  $y \in Y$  и, следовательно,  $\varphi \in \Gamma_b(Y, X)$ . Покажем, что последовательность  $\{\varphi_n\}$  сходится к  $\varphi$  в метрике  $d$ . Действительно, так как  $\varphi_n(y) \rightarrow \varphi(y)$  равномерно по  $y \in Y$  в метрике  $\rho$ , то для  $\varepsilon > 0$  найдется  $\mathcal{N}_2(\varepsilon) > 0$  такое, что имеет место неравенство  $\rho(\varphi_n(y), \varphi_m(y)) < b^{-1}(\varepsilon)$  при всех  $n \geq \mathcal{N}_2(\varepsilon)$  и  $y \in Y$ . Из последнего неравенства следует, что

$$V(\varphi_n(y), \varphi(y)) \leq b(\rho(\varphi_n(y), \varphi(y))) < b(b^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon$$

при всех  $n \geq \mathcal{N}_2(\varepsilon)$  и  $y \in Y$ , т.е.  $d(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Лемма доказана.

Обозначим через  $S^t : \Gamma_b(Y, X) \rightarrow \Gamma_b(Y, X)$  отображение, определенное равенством  $(S^t \varphi)(y) = \pi^t \varphi(\sigma^{-1} y)$  при всех  $t \in \mathbb{S}_+$ ,  $\varphi \in \Gamma_b(Y, X)$  и  $y \in Y$ . Легко проверить, что  $\{S^t\}_{t \geq 0}$  образует коммутативную полугруппу.

**Лемма 32.** *Если существует функция  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая условиям 1.–3. и*

$$4. V(x_1 t, x_2 t) \leq \mathcal{N} e^{-\nu t} V(x_1, x_2) \quad (\forall (x_1, x_2) \in X \otimes X, t \geq 0), \text{ где } \mathcal{N}, \nu > 0,$$

*то полугруппа  $\{S^t\}_{t \geq 0}$  имеет единственную общую неподвижную точку  $\varphi \in \Gamma_b(Y, X)$ , которая является инвариантным сечением  $h$ .*

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned} p(S^t \varphi_1, S^t \varphi_2) &= \sup\{V(\pi^t \varphi_1(\sigma^{-t} y), \pi^t \varphi_2(\sigma^{-t} y)) \mid y \in Y\} \\ &\leq \mathcal{N} e^{-\nu t} \sup\{V(\varphi_1(\sigma^{-t} y), \varphi_2(\sigma^{-t} y)) \mid y \in Y\} \leq \mathcal{N} e^{-\nu t} p(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

и, следовательно,  $S^t$  при достаточно больших  $t$  являются сжатиями. Отсюда в силу коммутативности  $\{S^t\}$  следует существование общей неподвижной точки  $\varphi$  полугруппы  $\{S^t\}_{t \geq 0}$ , которая является инвариантным сечением  $h$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.5.39.** *Пусть  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система, для которой выполнены следующие условия:*

- (1)  $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$  компактно диссипативна;
- (2)  $\Gamma_b(Y, X) \neq \emptyset$ ;
- (3) существует  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая условиям 1.–4. леммы 32.

*Тогда  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  компактно диссипативна и  $J_X$  и  $J_Y$  гомеоморфны.*

*Доказательство.* В условиях теоремы согласно лемме 32 полугруппа  $\{S^t\}_{t \geq 0}$  имеет единственную общую неподвижную точку  $\varphi$ , которая является инвариантным сечением гомоморфизма  $h$ .

Кроме того

$$\begin{aligned} a(\rho(x_1 t, x_2 t)) &\leq V(x_1 t, x_2 t) \\ &\leq \mathcal{N} e^{-\nu t} V(x_1, x_2) \leq \mathcal{N} e^{-\nu t} b(\rho(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Отсюда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(\rho(x_1 t, x_2 t)) = 0$  для любых  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$  и, следовательно,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ . Система  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  равномерно устойчива относительно  $h$ . Действительно, пусть  $\varepsilon > 0$  и  $\delta(\varepsilon) = b^{-1}(\mathcal{N} a(\varepsilon))$ . Тогда  $\rho(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)$  ( $h(x_1) = h(x_2)$ ) влечет  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 30.

**СЛЕДСТВИЕ 15.** *В условиях теоремы 2.5.39 неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  конвергентна.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 2.5.39 и следствия 14.

Будем говорить, что функция  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$  непрерывна, если  $x_n^i \rightarrow x^i$  ( $i = 1, 2$  и  $h(x_n^1) = h(x_n^2)$ ) влечет  $V(x_n^1, x_n^2) \rightarrow V(x^1, x^2)$ .

**Теорема 2.5.40.** Пусть  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативны. Для того чтобы динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая условиям:

- (1)  $V$  положительно определена, т.е.  $V(x_1, x_2) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ ;
- (2)  $V(x_1 t, x_2 t) \leq V(x_1, x_2)$  при всех  $t \geq 0$  и  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$ ;
- (3)  $V(x_1 t, x_2 t) = V(x_1, x_2)$  при всех  $t \geq 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ .

*Доказательство.* Пусть выполнены условия теоремы. Покажем что для любого  $\varepsilon > 0$  и компакта  $K \subseteq X$  существует  $\delta(\varepsilon, K) > 0$  такое, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  ( $x_1, x_2 \in K$  и  $h(x_1) = h(x_2)$ ) влечет  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ , компакт  $K_0 \subseteq X$ , последовательности  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $\{x_n^i\} \subseteq K_0$  ( $i = 1, 2$  и  $h(x_n^1) = h(x_n^2)$ ) и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.5.110) \quad \rho(x_n^1, x_n^2) < \delta_n \text{ и } \rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  последовательности  $\{x_n^i t_n\}$  ( $i = 1, 2$ ) можно считать сходящимися. Положим  $\bar{x}^i := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i t_n$  ( $i = 1, 2$ ). Понятно, что  $h(\bar{x}_1) = h(\bar{x}_2)$ . Поскольку,  $\{x_n^i\} \subseteq K$ , то их также можно считать сходящимися. Согласно (2.5.110)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 = \bar{x}$  и

$$\begin{aligned} 0 \leq V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_n^1, x_n^2) = V(\bar{x}, \bar{x}) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . Последнее противоречит (2.5.110).

Покажем теперь, что для любых  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$  ( $h(x_1) = h(x_2)$ ) имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0.$$

Если допустить, что это не так, то найдутся  $y_0 \in Y$ ,  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X_{y_0}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.5.111) \quad \rho(\bar{x}_1 t_n, \bar{x}_2 t_n) \geq \varepsilon_0.$$

Пусть  $(X \times X, \mathbb{T}_1, \pi \times \pi) = (X, \mathbb{T}_1, \pi) \times (X, \mathbb{T}_1, \pi)$  - прямое произведение  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . В силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  точка  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X$  устойчива  $L^+$  в  $(X \times X, \mathbb{T}_1, \pi \times \pi)$ , и из условия 2 теоремы вытекает существование конечного предела

$$(2.5.112) \quad V_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\bar{x}_1 t, \bar{x}_2 t).$$

Пусть  $(p, q) \in \omega(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , тогда из (2.5.112) следует, что  $V(p, q) = V_0$ . В силу инвариантности  $\omega(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  имеем  $V(pt, qt) = V(p, q)$  при всех  $t \in \mathbb{T}$ ,

и согласно условию 3 теоремы  $p = q$ , т.е.

$$(2.5.113) \quad \omega_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \subseteq \Delta_X = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X\}.$$

Последовательности  $\{\bar{x}_i t_n\}$  ( $i = 1, 2$ ) можно считать сходящимися. Положим  $\bar{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{x}_1 t_n$  и  $\bar{q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{x}_2 t_n$ , тогда  $(\bar{p}, \bar{q}) \in \omega_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$  и из (2.5.111) следует, что  $\bar{p} \neq \bar{q}$ . Последнее противоречит включению (2.5.113). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. Согласно теореме 2.4.31 неавтономная система (2.1.54) конвергентна.

Обратно. Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна. Определим функцию  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$  равенством

$$(2.5.114) \quad V(x_1, x_2) = \sup\{\rho(x_1 t, x_2 t) | t \geq 0\}.$$

Эта функция удовлетворяет условиям 1. и 2. нашей теоремы очевидным образом.

Покажем, что  $V$  удовлетворяет условию 3. теоремы. Пусть  $V(x_1 t, x_2 t) = V(x_1, x_2)$  при всех  $t \geq 0$ . Если допустить, что  $x_1 \neq x_2$ , то  $\delta := V(x_1, x_2) > 0$ . Согласно теореме 2.4.31  $\rho(x_1 t, x_2 t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому найдется  $t_0 = t_0(\delta) > 0$  такое, что  $\rho(x_1 t, x_2 t) < \frac{\delta}{2}$  при всех  $t \geq t_0$ . Следовательно,

$$V(x_1 t_0, x_2 t_0) = \sup\{\rho(x_1 t, x_2 t) | t \geq t_0\} \leq \frac{\delta}{2} < V(x_1, x_2).$$

Последнее противоречит нашему допущению. Докажем, что для любого компакта  $K \subseteq X$

$$(2.5.115) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup\{\rho(x_1 t, x_2 t) | x_1, x_2 \in K, h(x_1) = h(x_2)\} = 0.$$

Действительно, если допустить, что это не так, то найдется  $\varepsilon_0 > 0$ , компакт  $K \subseteq X$ ,  $\delta_n \downarrow 0$  и последовательности  $\{x_n^i\} \subseteq K$  ( $i = 1, 2$  и  $h(x_n^1) = h(x_n^2)$ )  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что выполнено условие (2.4.95). Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что последовательности  $\{x_n^i\}$  и  $\{x_n^i t_n\}$  ( $i = 1, 2$ ) сходятся. Пусть  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i = x^i$  ( $i = 1, 2$ ). Положим  $\bar{x}^i := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i t_n$  ( $i = 1, 2$ ). Заметим, что  $h(\bar{x}_1) = h(\bar{x}_2) = y$ ,  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \omega(K) \subseteq J_X$  и, следовательно,  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . Последнее противоречит (2.4.95). Таким образом, (2.5.115) доказано. Из (2.5.114) и (2.5.115) следует, что

$$(2.5.116) \quad V(x_1, x_2) = \rho(x_1 \tau, x_2 \tau)$$

при некотором  $\tau(x_1, x_2) \in [0, l(K)]$ .

Пусть  $(x_n^1, x_n^2) \rightarrow (x^1, x^2) \in X \otimes X$ . Последовательность  $\{V(x_n^1, x_n^2)\} = \{\rho(x_n^1 \tau_n, x_n^2 \tau_n)\}$  ограничена, где  $\tau_n = \tau(x_n^1, x_n^2)$ . Покажем, что она имеет единственную предельную точку.

Пусть  $\tilde{V}$  - одна из предельных точек последовательности  $\{V(x_n^1, x_n^2)\}$ . Существует подпоследовательность  $\{V(x_{k_n}^1, x_{k_n}^2)\}$  такая, что  $V(x_{k_n}^1, x_{k_n}^2) \rightarrow \tilde{V}$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Так как  $\{\tau_{k_n}\}$  ограничена, то ее можно считать сходящейся. Тогда  $\tilde{V} = \rho(x^1 \tau', x^2 \tau')$ , где  $\tau' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{k_n}$ . Покажем, что  $\rho(x^1 \tau, x^2 \tau) =$



$\rho(x_1\tau', x_2\tau')$  ( $\tau = \tau(x^1, x^2) \geq 0$  выбрано из условия (2.5.116)). Если допустить, что  $\rho(x^1\tau, x^2\tau) \neq \rho(x_1\tau', x_2\tau')$ , то  $\rho(x^1\tau, x^2\tau) > \rho(x_1\tau', x_2\tau')$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  таково, что  $\rho(x^1\tau, x^2\tau) + 2\varepsilon < \rho(x^1\tau, x^2\tau)$ . Тогда для достаточно больших  $k \in \mathbb{N}$  имеем  $|\rho(x_{k_n}^1\tau, x_{k_n}^2\tau) - \rho(x^1\tau, x^2\tau)| < \varepsilon$  и

$$|\rho(x_{k_n}^1\tau, x_{k_n}^2\tau) - \rho(x^1\tau', x^2\tau')| < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$(2.5.117) \quad \rho(x_{k_n}^1\tau, x_{k_n}^2\tau) > \rho(x_{k_n}^1\tau, x_{k_n}^2\tau) = V(x_{k_n}^1, x_{k_n}^2).$$

Неравенство (2.5.117) противоречит выбору числа  $\tau_{k_n}$ . Таким образом,  $V(x^1, x^2) = \rho(x^1\tau', x^2\tau')$  и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_n^1, x_n^2) = V(x^1, x^2)$ , т.е.  $V$  непрерывна. Теорема доказана.

Теорема 2.5.40 является обобщением на абстрактные неавтономные динамические системы теорем 7.2 и 7.3 из [74].

**Теорема 2.5.41.** Пусть динамические системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативны. Для того чтобы неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V$  положительно определена;
- (2)  $V(x_1t, x_2t) < V(x_1, x_2)$  при всех  $t > 0$  и  $(x_1, x_2) \in X \otimes X \setminus \Delta_X$ , где  $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ .

*Доказательство.* Достаточность условий теоремы вытекает из предыдущей теоремы. Достаточно лишь заметить, что из второго условия теоремы 2.5.41 вытекают второе и третье условия теоремы 2.5.111.

Необходимость. Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна и функция  $\mathcal{V} : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$  определена условием (2.5.114). Тогда она непрерывна и удовлетворяет условиям 1.–3. теоремы 2.5.40. Положим

$$(2.5.118) \quad V(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \mathcal{V}(x_1t, x_2t) e^{-t} dt.$$

Из определения функции  $V$  следует ее непрерывность и положительная определенность. Функция  $V$  удовлетворяет условию 2. теоремы 2.5.41. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \otimes X$  и  $t_0 > 0$  такие, что  $V(\bar{x}_1t_0, \bar{x}_2t_0) = V(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  и  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ . Тогда из (2.5.118) и последнего равенства следует, что

$$(2.5.119) \quad \mathcal{V}(\bar{x}_1(t_0 + t), \bar{x}_2(t_0 + t)) = \mathcal{V}(\bar{x}_1t, \bar{x}_2t)$$

при всех  $t \geq 0$ . В силу (2.5.119) функция  $\varphi(t) = \mathcal{V}(\bar{x}_1t, \bar{x}_2t)$  является  $t_0$ -периодической. Очевидно,  $\varphi$  непрерывна и является невозрастающей. Поэтому  $\varphi$  постоянна, и, следовательно,  $\mathcal{V}(\bar{x}_1t, \bar{x}_2t) = \mathcal{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  при всех  $t \geq 0$ . Так как функция  $\mathcal{V}$  удовлетворяет условиям 1–3 теоремы 2.5.40, то равенство  $\mathcal{V}(\bar{x}_1t, \bar{x}_2t) = \mathcal{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  при всех  $t \geq 0$  влечет  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ .

Это противоречит выбору  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Теорема 2.5.42.** Пусть  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативны и существует непрерывная функция  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V$  положительно определена;
- (2)  $V(x_1 t, x_2 t) \leq \omega(V(x_1, x_2), t)$  при всех  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$  и  $t \geq 0$ , где  $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  неубывающая по первой переменной функция и  $\omega(x, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  при каждом  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Тогда  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.

*Доказательство.* Согласно следствию 11 для конвергентности  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  достаточно показать, что для любого компакта  $K \in C(X)$  имеет место равенство 2.4.88. Прежде всего покажем, что для любого  $K \in C(X)$  имеет место равенство

$$(2.5.120) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{(x_1, x_2) \in K \otimes K} V(x_1 t, x_2 t) = 0.$$

Действительно, так как  $K$  компактно, то существует  $\alpha > 0$  такое, что  $V(x_1, x_2) \leq \alpha$  при всех  $(x_1, x_2) \in K \otimes K$  и  $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \alpha$  при некотором  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in K \otimes K$ , и, следовательно,

$$(2.5.121) \quad V(x_1 t, x_2 t) \leq \omega(V(x_1, x_2), t) \leq \omega(\alpha, t).$$

Так как  $\omega(\alpha, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то из (2.5.121) следует (2.5.120). Покажем теперь, что из (2.5.120) следует равенство (2.4.88). Если допустить, что это не так, то найдутся  $K \in C(X)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\{x_n^i\} \subseteq K$  ( $i = 1, 2$ ) и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.5.122) \quad \rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  последовательности  $\{x_n^i t_n\}$  ( $i = 1, 2$ ) можно считать сходящимися. Положим  $\bar{x}_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^i t_n$ , тогда из неравенства (2.5.122) следует, что  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ . С другой стороны, согласно неравенству (2.5.121)

$$0 \leq V(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \leq V(\alpha, t_n) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow +\infty$  и, следовательно,

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Замечание 2.5.11.** а. Условие 2. теоремы 2.5.42 выполняется, если функция  $V : X \otimes X \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1)  $V(x_1 t, x_2 t) \leq \mathcal{N} e^{-\nu t} V(x_1, x_2)$  при всех  $t \geq 0$  и  $(x_1, x_2) \in X \otimes X$  ( $\omega(x, t) = \mathcal{N} x e^{-\nu t}$ );

$$(2) \quad V(x_1 t, x_2 t) \leq \frac{2V(x_1, x_2)}{2+V(x_1, x_2)t} \text{ при всех } t \geq 0 \text{ и } (x_1, x_2) \in X \otimes X \\ (\omega(x, t) = \frac{2x}{2+xt});$$

*b. Все результаты, приведенные в этом параграфе, справедливы и в том случае, когда пространства  $X$  и  $Y$  не являются метрическими, а являются псевдометрическими.*

В заключение отметим, что конвергентные динамические системы в определенном смысле являются простейшими диссипативными динамическими системами. Если  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  - неавтономная система с конвергенцией и  $J_X$  ( $J_Y$ ) - центр Левинсона динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  ( $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ ), то  $J_X$  и  $J_Y$  гомеоморфны. Хотя центр Левинсона конвергентной неавтономной системы поддается достаточно полному описанию, тем не менее, он может быть достаточно сложным. Приведем пример, подтверждающий сказанное.

**Пример 10.** Пусть  $Y := \mathbb{R}$  и  $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$  - каскад, порожденный положительными степенями нечетной функции  $g$ , определенной на  $\mathbb{R}_+$  по следующему правилу:

$$(2.5.123) \quad g(y) = \begin{cases} -2y & , \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2(y-1) & , \quad \frac{1}{2} < y \leq 1 \\ \frac{1}{2}(y-1) & , \quad 1 < y < +\infty. \end{cases}$$

Легко убедиться, что  $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$  диссипативна и  $J_Y \subseteq [-1, 1]$ . Положим  $X := \mathbb{R}^2$  и через  $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$  обозначим каскад, порожденный положительными степенями отображения  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , определенного равенством

$$(2.5.124) \quad P \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, y) \\ g(y) \end{pmatrix},$$

где  $f(u, y) = \frac{1}{10}u + \frac{1}{2}y$ . Наконец, пусть  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$ . Из (2.5.124) следует, что  $h$  есть гомоморфизм  $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$ , и, следовательно,  $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h \rangle$  есть неавтономная динамическая система. Заметим, что

$$(2.5.125) \quad |(u_1, y) - (u_2, y)| = |u_1 - u_2| \\ = 10|P(u_1, y) - P(u_2, y)|.$$

Из (2.5.125) следует, что

$$(2.5.126) \quad |P^n(u_1, y) - P^n(u_2, y)| \\ \leq \mathcal{N}e^{-\nu n}|(u_1, y) - (u_2, y)|$$

при всех  $n \in \mathbb{Z}_+$ , где  $\mathcal{N} = 1$  и  $\nu = \ln 10$ . Покажем, что неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h \rangle$  конвергентна. Непосредственно проверяется, что динамическая система  $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$  диссипативна, поэтому для конвергентности  $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h \rangle$  достаточно показать, что  $J_X \cap X_y$  содержит ровно одну точку, каково бы ни было

$y \in J_Y$ . Если допустить, что это не так, то существуют  $y_0 \in J_Y$  и  $x_1, x_2 \in J_X \cap X_{y_0}$  и  $x_1 \neq x_2$ . Пусть  $\varphi_i$  движение динамической системы  $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$ , определенное на  $\mathbb{Z}$  и проходящее через точку  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ). Из (2.5.126) следует, что

$$(2.5.127) \quad |\varphi_1(-n) - \varphi_2(-n)| \geq \mathcal{N}^{-1} e^{\nu n} |u_1 - u_2|$$

при всех  $n \in \mathbb{Z}_+$ , где  $(u_i, y_0) = x_i$  ( $i = 1, 2$ ). С другой стороны,

$$(2.5.128) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi_1(n) - \varphi_2(n)| < +\infty.$$

Неравенства (2.5.127) и (2.5.128) не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. Таким образом,  $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h \rangle$  конвергентна и, следовательно,  $J_X$  и  $J_Y$  гомеоморфны.

Отметим, что построенный выше пример является незначительной модификацией одного примера из [126, стр. 39–42]. При этом они имеют одинаковые аттракторы, и соответствующие системы на аттракторах действуют одинаково. Следовательно, центры Левинсона  $J_X$  и  $J_Y$  являются перемешивающими (странными) аттракторами.

Таким образом, центр Левинсона  $J_X$  конвергентной динамической системы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  полностью определяется структурой  $J_Y$ , а последний может быть устроен достаточно сложно.

## 2.6. Неавтономные диссипативные системы в конечномерном пространстве

В этом параграфе мы будем предполагать, что  $Y$  компактно,  $(X, h, Y)$  конечномерное векторное расслоение и  $|\cdot|$  некоторая риманова метрика на  $(X, h, Y)$ .

**Лемма 33.** *При сделанных выше предположениях все три типа диссипативности в неавтономной динамической системе  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$  эквивалентны.*

*Доказательство.* В силу компактности  $Y$ , конечномерности и локальной тривиальности расслоения  $(X, h, Y)$  пространство  $X$  локально компактно. Для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на теорему 1.4.7.

Имеет место следующая

**Теорема 2.6.43.** *Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$  неавтономная динамическая система. Следующие условия эквивалентны*

1. *существует положительное число  $R$  такое, что*

$$(2.6.129) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |\pi(t, x)| < R \quad (\forall x \in X).$$

2. *существует число  $r > 0$  такое, что для любого  $x \in X$  найдется  $\tau = \tau(x) > 0$  для которого  $|\pi(\tau, x)| < r$ .*

3. существует непустой компакт  $K_1 \subset X$  такой, что  $\omega_x \cap K_1 \neq \emptyset$  при всех  $x \in X$ .
4. существует непустой компакт  $K_1 \subset X$  такой, что  $\emptyset \neq \omega_x \subseteq K_2$  для любого  $x \in X$ .
5. существует число  $R_0 > 0$  и для любого  $R$  найдется  $l(R) > 0$  такое, что

$$(2.6.130) \quad |\pi(t, x)| \leq R_0$$

при всех  $t \leq l(R)$  и  $|x| \leq R$ .

*Доказательство.* Очевидно из 1. следует 2. Покажем, что из 2. следует 3. Выберем  $K_1 := \{x \in X : |x| \leq r\}$ . В силу компактности  $Y$  и конечномерности векторного расслоения  $(X, h, Y)$  множество  $K_1$  компактно. Пусть  $x \in X$  и  $t_k \rightarrow +\infty$ , тогда согласно 2. существует  $\tau_k > 0$  такое, что  $\pi(t_k + \tau_k, x) \in K_1$  и, следовательно,  $\{\pi(t_k + \tau_k, x)\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi(t_k + \tau_k, x)$  и заметим, что  $\bar{x} \in \omega_x \cap K_1$ .

Теперь покажем, что из 3. следует 4. Пусть  $K_1$  непустой компакт из условия 3. Тогда в силу локальной компактности  $X$  (см. доказательство леммы 33) существует  $\delta > 0$  такое, что  $\overline{B(K_1, \delta)} := \{x \in X : \rho(x, K_1) \leq \delta\}$  ( $\rho$  метрика на  $X$  согласованная с римановой метрикой на  $(X, h, Y)$ ) компактно. Пусть  $x \in X$  и  $\mathcal{F}_x := \{t \in \mathbb{T} : \pi(t, x) \notin \overline{B(K_1, \delta)}\}$ . Если  $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$  и  $x \in \overline{B(K_1, \delta)}$ , то положим

$$\alpha_x := \sup\{t : \forall \tau \in [0, t], \pi(\tau, x) \in \overline{B(K_1, \delta)}\}$$

и

$$\beta_x := \sup\{t : \forall \tau \in ]\alpha_x, t], \pi(\tau, x) \in \overline{B(K_1, \delta)}\}.$$

Покажем, что существует  $l_0 > 0$ , что  $\beta_x - \alpha_x \leq l_0$  для всякого  $x \in \overline{B(K_1, \delta)}$  такого, что  $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $\{x_k\} \subseteq \overline{B(K_1, \delta)}$  и  $l_k \rightarrow +\infty$  такие, что  $\beta_{x_k} - \alpha_{x_k} = l_k$ . Положим  $\bar{x}_k := \pi(\alpha_{x_k}, x_k)$ . Заметим, что  $\{\bar{x}_k\} \subseteq \overline{B(K_1, \delta)}$  и, следовательно, ее можно считать сходящейся. Положим  $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k$ . Из определения  $\bar{x}_k$  следует, что

$$(2.6.131) \quad \rho(\pi(t, \bar{x}_k), K_1) > \delta$$

при всех  $t \in ]0, l_k[$ . Переходя в (2.6.131) к пределу при  $k \rightarrow +\infty$ , мы получим  $\rho(\pi(t, \bar{x}), K_1) \geq \delta$  при всех  $t > 0$ . Последнее противоречит условию 3. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Заметим, что множество  $K_2 = \pi([0, l_0], \overline{B(K_1, \delta)})$  непусто и компактно. Пусть  $x \in X$ , тогда либо  $\mathcal{F}_x = \emptyset$  и, следовательно,  $\emptyset \neq \omega_x \subseteq \overline{B(K_1, \delta)} \subseteq K_2$ . Либо  $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$  и тогда  $\beta_x - \alpha_x \leq l_0$ , а значит траектории выходящие из  $K_1$  в дальнейшем не покидают  $K_2$ . Для завершения доказательства достаточно заметить, что для точки  $x$  согласно 3. найдется  $\tau$  такое, что  $\pi(\tau, x) \in K_1$ .

Покажем, что из 4. следует 5. Мы уже отмечали, что в условиях теоремы 2.6.43 пространство  $X$  локально-компактно, а для таких пространств условие 4. означает, что динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  поточечно диссипативна (така как в локально-компактном пространстве имеем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\pi(t, x), \omega_x) = 0$ , если  $\omega_x$  есть непустой компакт). В силу теоремы 1.4.7 динамическая система  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна и, следовательно, в имеется компактное инвариантное множество  $J$  (центр Левинсона), которое, согласно теореме 1.3.6, равномерно асимптотически устойчиво в целом. Положим  $k := \sup\{|x| : x \in J_y, y \in Y\}$ , где  $J_y := J \cap h^{-1}(y)$ . В силу компактности  $J$  число  $k$  конечно. Пусть  $R_0 > k$ . Покажем, что выбранное  $R_0$  удовлетворяет неравенству (2.6.130). Если допустить, что это не так, то существуют  $\bar{R} > 0$ ,  $|x_n| \leq \bar{R}$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что  $|\pi(t_n, x_n)| > R_0$ . Поскольку  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  компактно диссипативна и множество  $K := \{x \in X : |x| \leq \bar{R}\}$  компактно, то  $\Sigma^+(K)$  относительно компактно и, следовательно,  $\{\pi(t_n, x_n)\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(t_n, x_n)$ . Так как  $\bar{x} \in \Omega(K) \subseteq J$ , то  $|\bar{x}| \leq k$ . С другой стороны  $|\pi(t_n, x_n)| \geq R_0 > k$  и переходя к пределу в последнем неравенстве, получим  $|\bar{x}| \geq R_0 > k$ . Это показывает, что  $R_0 > k$  удовлетворяет неравенству (2.6.130).

Наконец из 5. следует 1. Теорема полностью доказана.

## 2.7. Линейные системы

Пусть  $(X, h, Y)$  – локально тривиальное векторное расслоение со слоем  $E$  и  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – линейная неавтономная динамическая система, то есть при каждом  $y \in Y$  и  $t \in \mathbb{T}_1$  отображение  $\pi^t : X_y \rightarrow X_{\sigma^t y}$  линейно. Из результатов предыдущих параграфов вытекают следующие утверждения.

**Теорема 2.7.44.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  поточечно диссипативна;
- (2)  $X^s = X$ .

**Теорема 2.7.45.** *Пусть  $Y$  компактно, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна;
- (2)  $X^s = X$  и нулевое сечение  $\theta$  расслоения  $(X, h, Y)$  равномерно устойчиво, то есть для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $|x| < \delta$  влечет  $|xt| < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- (3) в случае, когда векторное расслоение является нормированным, существует положительное число  $N$  такое, что

$$(2.7.132) \quad |x| \leq N|x|$$

при всех  $x \in X$ ,  $t \geq 0$ , и  $X^s = X$ .

**Теорема 2.7.46.** Пусть  $Y$  компактно, тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  локально диссипативна;
- (2)  $X^s = X$  и нулевое сечение  $\Theta$  расслоения  $(X, h, Y)$  равномерно притягивающее, то есть существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$(2.7.133) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |\pi(t, x)| = 0;$$

- (3) в случае, когда векторное расслоение является нормированным, существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что

$$(2.7.134) \quad |\pi(t, x)| \leq N e^{-\nu t} |x|$$

при всех  $x \in X$ ,  $t \geq 0$ .

**Замечание 2.7.12.** а. Для автономных и периодических линейных систем легко устанавливается при помощи теоремы Банаха–Штейнгауза эквивалентность поточечной и компактной диссипативности.

б. В примере 8 линейная автономная динамическая система в гильбертовом пространстве  $X = L_2[0, 1]$ , задаваемая дифференциальным уравнением  $x' = Ax$  с непрерывным оператором  $A$ , является компактно диссипативной, но не является локально диссипативной.

**Теорема 2.7.47.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$  – групповая (то есть  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{Z}$ ) линейная неавтономная динамическая система,  $Y$  компактно,  $(X, h, Y)$  – нормированное векторное расслоение и существуют такие положительные числа  $M$  и  $a$ , что  $|\pi^t x| \leq M e^{a|t|} |x|$  ( $x \in X$ ,  $t \in \mathbb{T}$ ). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$  локально диссипативна, то есть существуют  $N, \nu > 0$  такие, что  $|x_t| \leq N e^{-\nu t} |x|$  при всех  $t \geq 0$  и  $x \in X$ ;
- (2) существует функция  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая свойствами:
  - 2.a.  $V$  – некоторая норма на  $(X, h, Y)$ ;
  - 2.b. существуют положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что  $\alpha|x| \leq V(x) \leq \beta|x|$  при всех  $x \in X$ ;
  - 2.c.  $\dot{V}_\pi(x) = -|x|$  ( $x \in X$ ), где  $\dot{V}_\pi(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} [V(xt) - V(x)]$  при  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  и  $\dot{V}_\pi(x) = V(x1) - V(x)$  при  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$  локально диссипативна. Определим функцию  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  при  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  по формуле

$$(2.7.135) \quad V(x) = \int_0^{+\infty} |x_t| dt \quad (x \in X).$$

Непосредственно из равенства (2.7.135) следует, что  $V$  – некоторая норма на  $(X, h, Y)$ . Установим некоторые свойства  $V$ .

$$a. \quad \frac{1}{Ma} |x| \leq V(x) \leq \frac{N}{\nu} |x| \quad (x \in X).$$

Действительно,

$$V(x) = \int_0^{+\infty} |xt| dt \leq N \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} |x| dt = \frac{N}{\nu} |x|.$$

С другой стороны,  $|x| = |(xt)(-t)| \leq M e^{at} |xt|$  ( $x \in X, t \geq 0$ ) и, следовательно,

$$V(x) = \int_0^{+\infty} |xt| dt \geq \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} e^{-at} |x| dt = \frac{1}{Ma} |x|.$$

$$b. \quad \dot{V}_\pi(x) = -|x| \quad (x \in X).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} V(xt) - V(x) &= \int_0^{+\infty} |(xt)s| ds - \int_0^{+\infty} |xs| ds = \int_t^{+\infty} |xs| ds \\ &- \int_0^{+\infty} |xs| ds = - \int_0^t |xs| ds \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} [V(xt) - V(x)] = \lim_{t \downarrow 0} -t^{-1} \int_0^t |xs| ds = -|x| \quad (x \in X).$$

Если  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , то положим  $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |xn|$  ( $x \in X$ ). Очевидно,  $V$  определяет некоторую норму на  $(X, h, Y)$ . Нетрудно заметить, что определенная таким образом функция обладает нужными свойствами. Таким образом установлено, что 1. влечет 2..

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Пусть  $x \in X$  и  $|x| \neq 0$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(t) = V(xt)$ . Так как  $\alpha|x| \leq V(x) \leq \beta|x|$  и  $\dot{V}_\pi(x) = -|x|$  ( $x \in X$ ), то мы имеем

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{V}_\pi(xt) = -|xt| \leq -\frac{1}{\beta} V(xt) = -\frac{1}{\beta} \varphi(t)$$

и, следовательно,

$$(2.7.136) \quad \varphi(t) \leq \varphi(0) e^{-\frac{1}{\beta} t} \quad (t \geq 0).$$

С другой стороны

$$(2.7.137) \quad \frac{1}{\beta} V(xt) \leq |xt| \leq \frac{1}{\alpha V(xt)} \quad (x \in X, t \geq 0).$$

Из неравенств (2.7.136) и (2.7.137) следует, что

$$|xt| \leq \frac{\beta}{\alpha} e^{-\frac{1}{\beta} t} |x| \quad (x \in X, t \geq 0).$$

Теорема доказана.

Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$  – линейная неавтономная динамическая система. Неавтономную динамическую систему  $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \varrho \rangle$  назовем линейной неоднородной системой, порожденной линейной (однородной) динамической системой  $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ , если выполнены следующие условия:



1. существует гомоморфизм  $q$  динамической системы  $(Z, \mathbb{T}, \lambda)$  на  $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ ;
2. при каждом  $y \in (q \circ \rho)(W) \subseteq Y$  пространство  $W_y = (q \circ \rho)^{-1}(y)$  является аффинным, а векторное пространство  $X_y = h^{-1}(y)$  - присоединенное к  $W_y$  ([127, с.175]). Отображение  $\mu^t : W_y \rightarrow W_{\sigma^t y}$  является аффинным, а  $\pi^t : X_y \rightarrow X_{\sigma^t y}$  является ещ линейной присоединенной функцией ([127, с.179]), то есть  $X_y = \{w_1 - w_2 \mid w_1, w_2 \in W_y\}$  и  $\mu^t w_1 - \mu^t w_2 = \pi^t(w_1 - w_2)$  при всех  $w_1, w_2 \in W_y$  и  $t \in T$ .

**Замечание 2.7.13.** *Определение линейной неоднородной системы, порожденной данной линейной системой, имеется в работе [17], но приведенное выше определение является более общим и в ряде вопросов более гибким.*

**Лемма 34.** *Пусть  $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \rho \rangle$  - линейная неоднородная неавтономная динамическая система и  $(Z, \mathbb{T}, \lambda)$  компактно диссипативна. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \rho \rangle$  компактно диссипативна.
- (2)  $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \rho \rangle$  конвергентна.

*Доказательство.* Пусть  $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \rho \rangle$  компактно диссипативна и  $J_W$  - центр Левинсона  $(W, \mathbb{T}, \mu)$ . Покажем, что  $J_W \cap W_z$  содержит не более одной точки для произвольного  $z \in J_Z$ . Допустим, что это не так, тогда найдутся  $z_0 \in J_Z$  и  $w_1, w_2 \in J_W \cap W_{z_0}$  такие, что  $w_1 \neq w_2$ . Легко заметить, что тогда  $w = w_2 + \lambda(w_1 - w_2) = (1 - \lambda)w_2 + \lambda w_1 \in J_W \cap W_{z_0}$  при всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , что противоречит компактности  $J_W$ . Таким образом, 1. влечет 2.. Обратная импликация очевидна. Лемма доказана.

**Теорема 2.7.48.** *Пусть  $\Gamma(Z, W) \neq \emptyset$  и  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  - линейная однородная динамическая система,  $\langle (W, \mathbb{S}_+, \mu), (Z, \mathbb{S}, \lambda), \rho \rangle$  - линейная неоднородная динамическая система, порожденная  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ , и  $q$  - гомоморфизм  $(Z, \mathbb{S}, \lambda)$  на  $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ . Если  $Y$  и  $Z$  компактны и  $(X, h, Y)$  - нормированное векторное расслоение, то динамическая система  $\langle (W, \mathbb{S}_+, \mu), (Z, \mathbb{S}, \lambda), \rho \rangle$  локально диссипативна тогда и только тогда, когда локально диссипативна система  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\langle (W, \mathbb{S}_+, \mu), (Z, \mathbb{S}, \lambda), \rho \rangle$  локально диссипативна и  $J_W$  - центр Левинсона  $(W, \mathbb{S}_+, \mu)$ . Согласно лемме 34 для любого  $z \in J_Z$   $J_W \cap W_z$  содержит ровно одну точку, которую обозначим через  $w_z$ . Так как  $(W, \mathbb{S}_+, \mu)$  локально диссипативна, то существует  $\gamma > 0$  такое, что

$$(2.7.138) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mu^t B(J_W, \gamma), J_W) = 0.$$

Покажем, что из равенства (2.7.138) следует равенство

$$(2.7.139) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\mu^t w, \mu^t w_z) = 0$$

при всех  $z \in J_Z$  и  $w \in B(w_z, \gamma)$ , причем равенство (2.7.139) имеет место равномерно по  $z$  и  $w$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $z_n \in J_Z$  и  $x_n \in B(w_{z_n}, \gamma)$  ( $h(x_n) = z_n$ ) такие, что

$$(2.7.140) \quad \rho(\mu^{t_n} w_n, \mu^{t_n} w_{z_n}) \geq \varepsilon_0.$$

Из равенства (2.7.139) и компактности  $Z$  следует, что последовательности  $\{\mu^{t_n} w_n\}$ ,  $\{z_n t_n\}$  и  $\{\mu^{t_n} w_{z_n}\}$  можно считать сходящимися. Положим  $\bar{z} = \lim_{t \rightarrow +\infty} z_n t_n$  и  $\bar{w} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu^{t_n} w_n$ , тогда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu^{t_n} w_{z_n} = w_{\bar{z}}$ . Переходя к пределу в (2.7.140) при  $n \rightarrow +\infty$ , получим  $\rho(\bar{w}, w_{\bar{z}}) \geq \varepsilon_0$ , что противоречит соотношению  $\bar{w} \in W_{\bar{z}} \cap J_W$ . Полученное противоречие доказывает равенство (2.7.140).

Заметим, что из равенства (2.7.139) вытекает равенство

$$(2.7.141) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |xt| = 0,$$

если заметить, что  $xt = \mu^t w_1 - \mu^t w_2 + \mu^t w_z - \mu^t w_z$ , где  $z = h(x)$ ,  $|x| \leq \gamma$  и  $x = w_1 - w_2$ . Из равенства (2.7.140) и теоремы 2.7.46 вытекает локальная диссипативность динамической системы  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ .

Обратно. Пусть  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  локально диссипативна, тогда согласно теореме 2.7.46 существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что выполнено неравенство (2.7.134). Обозначим через  $\Gamma(Z, W)$  пространство всех непрерывных сечений гомоморфизма  $\varrho : Z \rightarrow W$ , наделенное метрикой

$$d(\varphi, \psi) = \max_{z \in Z} \rho(\varphi(z), \psi(z)) = \max_{z \in Z} |\varphi(z) - \psi(z)|,$$

которая превращает его в полное метрическое пространство. При каждом  $t \in \mathbb{T}$  определим отображение  $S^t : \Gamma(Z, W) \rightarrow \Gamma(Z, W)$  по следующему правилу  $(S^t \varphi)(z) = \mu^t \varphi(\lambda^{-t} z)$  ( $z \in Z$ ,  $\varphi \in \Gamma(Z, W)$ ). Легко проверить, что семейство отображений  $\{S^t : t \in \mathbb{T}\}$  есть коммутативная группа относительно композиции. Заметим, что

$$(2.7.142) \quad \begin{aligned} d(S^t \varphi_1, S^t \varphi_2) &= \max_{z \in Z} |\mu^t \varphi_1(\lambda^{-t} z) - \mu^t \varphi_2(\lambda^{-t} z)| = \\ &= \max_{z \in Z} |\mu^t \varphi_1(z) - \mu^t \varphi_2(z)| = \max_{z \in Z} |\pi^t(\varphi_1(z) - \varphi_2(z))| \leq \\ &= N e^{-\nu t} \max_{z \in Z} |\varphi_1(z) - \varphi_2(z)|. \end{aligned}$$

Из неравенства (2.7.142) следует, что

$$d(S^t \varphi_1, S^t \varphi_2) \leq N e^{-\nu t} \max_{z \in Z} |\varphi_1(z) - \varphi_2(z)|$$

при всех  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(Z, W)$  и  $t \geq 0$  и, следовательно, при достаточно больших  $t$  отображения  $S^t$  являются сжатиями. Из сказанного следует, что коммутативная группа  $\{S^t : t \in \mathbb{S}_+\}$  отображений имеет единственную общую неподвижную точку  $\varphi \in \Gamma(Z, W)$ , то есть  $(S^t \varphi)(z) = \varphi(z)$  при

всех  $z \in Z$  и  $t \in \mathbb{S}_+$  и, следовательно,  $\mu^t \varphi(z) = \varphi(\lambda^t z)$  ( $z \in Z, t \in \mathbb{T}$ ). Пусть  $w \in W$  и  $z = \rho(w)$ . Тогда

$$(2.7.143) \quad |\mu^t w - \mu^t \varphi(z)| = |\pi^t(w - \varphi(z))| \leq N e^{-\nu t} |w - \varphi(z)|.$$

Из (2.7.143) следует, что компактное инвариантное множество  $J = \varphi(Z) \subset W$  равномерно асимптотически устойчиво в целом и, кроме того,  $J_Z = J \cap W_Z = \{\varphi(z)\}$  при всех  $z \in Z$ . Согласно теореме 2.4.38 динамическая система  $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \varrho \rangle$  конвергентна и, следовательно, компактно диссипативна и  $J = \varphi(Z)$  является центром Левинсона  $(W, \mathbb{T}, \mu)$ . Для локальной диссипативности  $(W, \mathbb{T}, \mu)$  достаточно показать, множество  $J = \varphi(Z)$  является равномерно притягивающим. Покажем, что для любого  $\gamma > 0$  имеет место равенство

$$(2.7.144) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(\mu^t B(J, \gamma), J) = 0.$$

Если допустить, что это неверно, то существуют  $\varepsilon_0, \gamma_0, w_0 \in B(J, \gamma_0)$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(2.7.145) \quad \rho(\mu^{t_n} w_n, J) \geq \varepsilon_0.$$

Из неравенства (2.7.143) и компактности  $Z$  следует, что последовательность  $\{\mu^{t_n} w_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\bar{w} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu^{t_n} w_n$ , тогда  $\bar{w} \in J$ . Переходя к пределу в (2.7.145) при  $n \rightarrow +\infty$ , получим  $\bar{w} \notin J$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

## Аналитические диссипативные системы

### 3.1. Косое произведение динамических систем и коциклы

Пусть  $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$  ( $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$ ) подполугруппы группы  $\mathbb{S}$ . Напомним, что тройка  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$ , где  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  – динамическая система на  $Y$ ,  $W$  – полное метрическое пространство и  $\varphi$  – непрерывное отображение  $\mathbb{T}_1 \times W \times Y$  в  $W$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- a.  $\varphi(0, u, y) = u$  ( $u \in W, y \in Y$ );
- b.  $\varphi(t + \tau, u, y) = \varphi(\tau, \varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$  ( $t, \tau \in \mathbb{T}_1, u \in W, y \in Y$ )

называется [196] – [197] коциклом над  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $W$ .

Положим  $X := W \times Y$  и определим отображение  $\pi : X \times \mathbb{T}_1 \rightarrow X$  правилом:  $\pi((u, y), t) := (\varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$  (то есть  $\pi = (\varphi, \sigma)$ ). Тогда легко проверить, что  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  – динамическая система на  $X$ , называемая косым произведением [1], [198], а  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$  – гомоморфизм  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  и, следовательно,  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  есть неавтономная динамическая система.

Таким образом, если задан коцикл  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над динамической системой  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $W$ , то по нему естественным образом строится неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ( $X := W \times Y$ ), которую назовем неавтономной динамической системой, ассоциированной коциклом  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ .

Пусть  $Y$  – компактное метрическое пространство и  $W = E^n$ . Рассмотрим коцикл  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над динамической системой  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $E^n$  и порожденную им неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ . Тогда  $(X, h, Y)$ , где  $X := E^n \times Y$ , является конечномерным векторным расслоением (тривиальное расслоение со слоем  $E^n$ ). Функция  $V : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , определенная равенством

$$V((u_1, y), (u_2, y)) := |u_1 - u_2|,$$

где  $|\cdot|$  – норма в  $E^n$ , задает на  $X$  риманову метрику. Из теоремы 2.6.43 вытекает следующая

**Теорема 3.1.49.** *Пусть  $Y$  компактно и  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  – коцикл над динамической системой  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $E^n$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *Существует положительное число  $R$  такое, что*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, u, y)\| < R$$

при всех  $u \in E^n$  и  $y \in Y$ .

- (2) Существует положительное число  $r_1$  такое, что для любых  $u \in E^n$  и  $y \in Y$  найдется  $\tau = \tau(u, y) > 0$ , для которого  $\|\varphi(\tau, u, y)\| < r_1$ .
- (3) Существует положительное число  $r_2$  такое, что

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, u, y)\| < r_2$$

при всех  $u \in E^n$  и  $y \in Y$ .

- (4) Существует положительное число  $R_0$  и для любого  $R > 0$  найдется  $l(R) > 0$  такое, что  $\|\varphi(t, u, y)\| \leq R_0$  при всех  $t \geq l(R)$ ,  $u \in E^n$ ,  $\|u\| \leq R$ , и  $y \in Y$ .

С учетом леммы 33 мы получаем, что каждое из условий 1.-4., фигурирующие в теореме 3.1.49, эквивалентно диссипативности неавтономной динамической системы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ , ассоциированной коциклом  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $E^n$ .

Приведем примеры косых произведений, играющих важную роль в теории дифференциальных уравнений.

**Пример 11.** Пусть  $E^n$  –  $n$ -мерное вещественное или комплексное евклидово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(3.1.146) \quad u' = f(t, u),$$

где  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ . Наряду с уравнением (3.1.146) рассмотрим и его  $H$ -класс [15],[28],[56], [132],[134], т.е. семейство уравнений

$$(3.1.147) \quad v' = g(t, v),$$

где  $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$  и  $f_\tau(t, u) = f(t + \tau, u)$ . В дальнейшем будем предполагать, что функция  $f$  регулярна, то есть для каждого уравнения (3.1.147) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на  $\mathbb{R}_+$ . Обозначим через  $\varphi(\cdot, v, g)$  решение уравнения (3.1.147), проходящее через точку  $v \in E^n$  при  $t = 0$ . Тогда  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \rightarrow E^n$  и при этом выполнены следующие условия (см., например, [15],[196],[197]):

- 1)  $\varphi(0, v, g) = v$  для любых  $v \in E^n$  и  $g \in H(f)$ ;
- 2)  $\varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau) = \varphi(t + \tau, v, g)$  для любых  $v \in E^n$ ,  $g \in H(f)$  и  $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ ;
- 3)  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \rightarrow E^n$  непрерывно.

Обозначим через  $Y = H(f)$  и  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  – динамическую систему сдвигов (полугрупповую) на  $Y$ , индуцированную динамической системой сдвигов  $(C(\mathbb{R} \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ . Тройка  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{R}_+, \sigma) \rangle$  является коциклом над  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  со слоем  $E^n$ . Следовательно, уравнение (3.1.146) естественно порождает коцикл  $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{R}_+, \sigma) \rangle$  и неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ , где  $X := E^n \times Y$ ,  $\pi = (\varphi, \sigma)$  и  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$ .

Напомним, что уравнение (3.1.146) называют диссипативным [28], [75],[209],[210], если каковы бы ни были  $t_0 \in \mathbb{R}$  и  $x_0 \in E^n$  существует единственное решение  $x(t; x_0, t_0)$  уравнения (3.1.146), проходящее через точку  $(x_0, t_0)$ , и существует число  $R > 0$  такое, что

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|x(t; x_0, t_0)\| < R$$

при всех  $x_0 \in E^n$  и  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Иными словами, для каждого решения  $x(t; x_0, t_0)$  существует такой момент времени  $t_1 = t_0 + l(t_0, x_0)$ , что

$$\|x(t; x_0, t_0)\| < R$$

при всех  $t \geq t_1$ . Если при этом число  $l(t_0, x_0)$  можно выбрать не зависящим от  $t_0$ , то говорят [28], что уравнение (3.1.146) равномерно диссипативно.

Ниже мы установим связь между диссипативностью уравнения (3.1.146) и диссипативностью неавтономной динамической системы, порождаемой уравнением (3.1.146).

**Лемма 35.** Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  регулярна и  $H(f)$  компактно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Уравнение (3.1.146) равномерно диссипативно, то есть существуют такие  $R > 0$  и  $l(x_0) > 0$ , что

$$(3.1.148) \quad \|x(t; x_0, t_0)\| < R \quad (t \geq t_0 + l(x_0), x_0 \in E^n).$$

- (2) Существует положительное число  $r$  такое, что

$$(3.1.149) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0, g)\| < r \quad (x_0 \in E^n, g \in H(f)).$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in E^n$  и  $g \in H(f)$ . Если  $g = f_\tau$  при некотором  $\tau \in \mathbb{R}$ , то

$$(3.1.150) \quad \varphi(t, x_0, f_\tau) = x(t + \tau, x_0, \tau)$$

и неравенство (3.1.149) следует из (3.1.148). Для этого достаточно взять  $r > R$ .

Рассмотрим случай, когда  $g = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{\tau_k}$  и  $\tau_k \rightarrow +\infty$  (или  $-\infty$ ). Согласно теореме 3.2 из [87] последовательность  $\{\varphi(t, x_0, f_{\tau_k})\}$  сходится к некоторому решению уравнения (3.1.147) и это решение проходит через точку  $(x_0, 0) \in E^n \times \mathbb{R}$ . Заметим, что решение, проходящее через точку  $(x_0, 0)$  единственно, так как  $f$  регулярна. Итак,

$$\varphi(t, x_0, g) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0, f_{\tau_k})$$

равномерно по  $t$  на компактах из  $\mathbb{R}$ . Из (3.1.148) и (3.1.150) следует, что  $\|\varphi(t, x_0, g)\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0, f_{\tau_k})\| \leq R$  ( $t \geq l(x_0)$ ) и, следовательно, имеет место (3.1.149).

Обратно, пусть выполнено неравенство (3.1.149). Тогда неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.146), диссипативна

и согласно теореме 3.1.49 (условие 4.) существует  $R_0 > 0$  такое, что для любого  $x_0 \in E^n$  найдется  $l(x_0) = l(\|x_0\|) > 0$ , для которого

$$(3.1.151) \quad \|\varphi(t, x_0, g) \leq R_0$$

при всех  $t \geq l(x_0)$  и  $g \in H(f)$ . Заметим, что

$$(3.1.152) \quad x(t; x_0, t_0) = \varphi(t - t_0, x_0, f_{t_0}),$$

и с учетом (3.1.151) получаем (3.1.148), для этого достаточно взять  $R > R_0$ . Лемма доказана.

Итак, для уравнения (3.1.146) ( $f$  регулярно и  $H(f)$  компактно) мы установили, что оно равномерно диссипативно тогда и только тогда, когда является диссипативной порожденная ею неавтономная динамическая система.

Следует заметить, что понятия диссипативности и равномерной диссипативности для уравнения (3.1.146) с периодической правой частью совпадают, однако уже для почти периодических уравнений они различны. Сказанное подтверждается следующим примером.

**Пример 12.** Рассмотрим линейное скалярное уравнение

$$(3.1.153) \quad x' = a(t)x,$$

где  $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  – почти периодическая функция такая, что все решения уравнения (3.1.153) стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , но нулевое решение уравнения (3.1.153) не является равномерно устойчивым. Уравнения вида (3.1.153) с указанными свойствами существуют (см. [148]). Очевидно, наряду с уравнением (3.1.153) этим свойством обладает и любой сдвиг уравнения (3.1.153), то есть уравнение вида

$$x' = a_\tau(t)x,$$

где  $a_\tau(t) = a(t + \tau)$  ( $t, \tau \in \mathbb{R}$ ). Поэтому из соотношения (3.1.152) следует, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t; x_0, t_0)| = 0$  ( $x(t; x_0, t_0)$  – решение уравнения (3.1.153), проходящее через точку  $(x_0, t_0)$ ), то есть уравнение (3.1.153) диссипативно.

Покажем, что уравнение (3.1.153) не является равномерно диссипативным. Действительно, если допустить противное, то согласно лемме 35 будет диссипативной неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.153). Согласно теореме 2.7.46 нулевое решение уравнения (3.1.153) равномерно асимптотически устойчиво, что противоречит выбору функции  $a$ . Нужный пример построен.

С учетом сказанного, всюду в этой работе под диссипативностью уравнения (3.1.146) мы будем понимать диссипативность неавтономной динамической системы, порожденной уравнением (3.1.146).

Важным классом диссипативных уравнений вида (3.1.146) являются уравнения с конвергенцией [28], [74].

Говорят, что уравнение (3.1.146) обладает свойством конвергенции, если оно имеет единственное, ограниченное на  $\mathbb{R}$  равномерно асимптотически устойчивое в целом решение. При этом это единственное ограниченное решение называется предельным режимом уравнения (3.1.146).

Из результатов работ [136],[196],[197] следует, что, если уравнение (3.1.146) обладает свойством конвергенции, то и каждое уравнение семейства (3.1.147) обладает этим свойством и, следовательно, неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.146), конвергентна. В тоже время легко построить примеры неконвергентных уравнений вида (3.1.146), порождающих неавтономные динамические системы, которые обладают свойством конвергенции в смысле определения, принятого в параграфе 2.4 настоящей работы. Дело здесь в том, что уравнение (3.1.146) может иметь предельный режим, который не является решением этого уравнения. Однако, если правая часть уравнения (3.1.146) устойчива по Пуассону в положительном направлении, то отмеченное обстоятельство не имеет места, то есть в этом случае уравнение (3.1.146) обладает свойством конвергенции тогда и только тогда, когда соответствующая уравнению (3.1.146) неавтономная динамическая система конвергентна.

Под конвергентностью уравнения (3.1.146) мы в дальнейшем будем понимать конвергентность неавтономной динамической системы, порожденной уравнением (3.1.146).

**Пример 13.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(3.1.154) \quad \begin{cases} u' = F(y, u) \\ y' = G(y), \end{cases}$$

где  $Y \subseteq E^m$ ,  $G \in C(Y, E^n)$  и  $F \in C(Y \times E^n, E^n)$ . Будем предполагать, что для системы (3.1.154) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на  $\mathbb{R}_+$ . Обозначим через  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  динамическую систему на  $Y$ , порожденную вторым системы (3.1.154) и  $\varphi(t, u, y)$  – решение уравнения

$$(3.1.155) \quad u' = F(\sigma(t, y), u)$$

проходящее через точку  $u \in E^n$  при  $t = 0$ . Тогда отображение  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times Y \rightarrow E^n$  удовлетворяет условиям 1) и 2) из примера 3.1.147 и, следовательно, система (3.1.154) естественным образом порождает неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$  (где  $X := E^n \times Y$ ,  $\pi = (\varphi, \sigma)$  и  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$ ).

Приведем некоторые обобщения системы (3.1.154). А именно, пусть  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  – динамическая система на метрическом пространстве  $Y$ . Рассмотрим систему

$$(3.1.156) \quad \begin{cases} u' = F(\sigma(y, t), u) \\ y \in Y, \end{cases}$$



где  $F \in C(Y \times E^n, E^n)$ . Так же как и выше будем предполагать, что для уравнения (3.1.155) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на  $\mathbb{R}_+$ . Система  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ , где  $X := E^n \times Y$ ,  $\pi = (\varphi, \sigma)$ ,  $\varphi(\cdot, x, y)$  – решение уравнения (3.1.155) и  $h = pr_2 : X \rightarrow Y$ , является неавтономной динамической системой, индуцированной уравнением (3.1.156).

### 3.2. $\mathbb{C}$ -аналитические системы

Будем говорить, что неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$   $\mathbb{C}$ -аналитична, если выполнены следующие условия:

- а.  $X := \mathbb{C}^n \times Y$  и  $\pi((z, y), t) := (\varphi(t, z, y), \sigma(t, y))$  при всех  $t \in \mathbb{T}$  и  $(z, y) \in \mathbb{C}^n \times Y$  т.е. неавтономная система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  порожденная коциклом  $\langle \mathbb{C}^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$  над  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  со слоем  $\mathbb{C}^n$ ;
- б. при каждом  $y \in Y$  и  $t \in \mathbb{T}_1$  отображение  $U(t, y) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ( $U(t, y) := \varphi(t, \cdot, y)$ ) голоморфно.

Из приведенных выше результатов следует, что в случае компактности  $Y$  все три типа диссипативности для  $\mathbb{C}$ -аналитических систем эквивалентны. Кроме того,  $\mathbb{C}$ -аналитическая система диссипативна тогда и только тогда, когда существует положительное число  $r$  (не зависящие ни от  $z$  ни от  $y$ ) такое, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, z, y)\| \leq r$ .

Установим одно важное свойство  $\mathbb{C}$ -аналитических диссипативных систем.

**Теорема 3.2.50.** *Если  $Y$  компактно, то  $\mathbb{C}$ -аналитическая диссипативная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из  $\mathbb{C}^n$ , т.е. для любых  $\varepsilon > 0$  и  $r > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$  такое, что  $\|z_1 - z_2\| < \delta$  ( $\|z_1\|, \|z_2\| \leq r$ ) влечет  $\|U(t, y)(z_1) - U(t, y)(z_2)\| \leq \varepsilon$  при всех  $y \in Y$  и  $t \in \mathbb{T}_+$ .*

*Доказательство.* Покажем, что каково бы ни было  $a > 0$  существует компакт  $K_a \subset \mathbb{C}^n$  такой, что  $U(t, y)(B[0, a]) \subseteq K_a$  при всех  $t \geq 0$  и  $y \in Y$ . Действительно, согласно теореме 3.1.49 существует  $b > 0$  такое, что для любого  $a > 0$  найдется число  $l_a \geq 0$ , обладающее следующим свойством:  $U(t, y)B[0, a] \subseteq B[0, b]$  при всех  $t \geq l_a$  и  $y \in Y$ . Множество  $K_a = \varphi([0, l_a], B[0, a], Y) \cup B[0, b]$  является искомым.

Пусть  $r > 0$ . По доказанному выше семейство голоморфных отображений  $\{U(t, y)\}$  пространства  $\mathbb{C}^n$  в себя равномерно (по  $t \geq 0$  и  $y \in Y$ ) ограничено на шаре  $B[0, r]$  и из обобщенной теоремы Витали [19] следует, что это семейство функций внутри шара  $B[0, r]$  равномерно непрерывно, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon, r) > 0$  такое, что  $\|U(t, y)(z_1) - U(t, y)(z_2)\| < \varepsilon$  при всех  $(t, y) \in \mathbb{T}_+ \times Y$ , как только  $\|z_1 - z_2\| < \delta$  ( $\|z_1\|, \|z_2\| < r$ ). Теорема доказана.

**Теорема 3.2.51.** *Всякая С - аналитическая неавтономная диссипативная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  с компактной минимальной базой  $Y$  обладает следующим свойством:*

- (1) *при любом  $y \in Y$  множество  $J_y := J \cap X_y$  ( $X_y := h^{-1}(y)$ ) состоит из единственной точки  $x_y$ , где  $J$  центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .*
- (2) *для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon)$  такое, что из неравенства  $\rho(x, x_y) < \delta$  ( $x \in X_y$ ) следует  $\rho(xt, x_{yt}) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ .*
- (3)  *$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, x_{h(x)t}) = 0$  при всех  $x \in X$ , причем это равенство имеет место равномерно по  $x$  на компактах из  $X$ .*

*Доказательство.* Так как  $Y$  компактно, то, в силу сделанного ранее замечания, неавтономная система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна и по теореме 3.2.50 она равномерно положительно устойчива на компактах из  $X$ . Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.2.28 и применяя ее в данном случае, получаем утверждения 2. и 3.. Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости утверждения 1..

Пусть  $y \in Y$ . Согласно теореме 2.2.28 множество  $J_y$  связно, поскольку таковыми являются  $X_y := \mathbb{C}^n \times \{y\}$  ( $y \in Y$ ). При доказательстве теоремы 2.2.28 мы установили, что полугруппа  $\mathcal{P}_y$  содержит некоторый идемпотент  $u$  такой, что  $J_y = u(X_y)$ . Кроме того, существует последовательность  $t_k \rightarrow +\infty$  такая, что  $u = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi^{t_k}$ . Пусть  $x \in X_y$ , т.е.  $x := (z, y)$  ( $z \in \mathbb{C}^n$ ). Тогда  $u(x) = u(z, y) = (\xi_y(z), y)$ , где  $\xi_y(z) := \lim_{k \rightarrow +\infty} U(t_k, y)(z)$ . Последнее равенство имеет место равномерно на компактах из  $\mathbb{C}^n$ . Отображения  $U(t_k, y) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) голоморфны, поэтому таковым является и их предел  $\xi_y$ . Так как  $u(X_y) = J_y$  и  $X_y := \mathbb{C}^n \times \{y\}$ , то  $\xi_y(\mathbb{C}^n)$  компактно, и согласно теореме Лиувилля [124] отображение  $\xi_y$  постоянно. Отсюда следует, что множество  $J_y$  состоит ровно из одной точки  $x_y$ . Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 16.** *Если  $Y$  компактно и минимально, то С-аналитическая диссипативная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.*

**СЛЕДСТВИЕ 17.** *В условиях теоремы 3.2.51  $Y$  рекуррентна (почти периодична, система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  индуцирует на центре Левинсона  $J$  системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  динамическую систему  $(J, \mathbb{T}_2, \hat{\pi})$  изоморфную  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ . В частности, если точка  $y$  пространства периодична), то рекуррентной (соответственно почти периодической, периодической) является также и точка  $x_y$  ( $J_y = \{x_y\}$ ).*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.2.51 (см. также

следствие 16). С учетом того, что отображение  $p : Y \rightarrow J$ , определенное равенством  $p(y) := x_y$  ( $J_y = \{x_y\}$ ) является гомоморфизмом  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  на  $(J, \mathbb{T}_2, \hat{\pi})$ .

Доказанные в этом параграфе утверждения позволяют изучать диссипативные дифференциальные уравнения, правые части которых рекуррентны по времени и голоморфны по пространственной переменной. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, приведем следующий

**Пример 14.** Обозначим через  $\mathcal{A}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$  множество всех непрерывных по  $t \in \mathbb{R}$  и голоморфных по  $z \in \mathbb{C}^n$  функции  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ . Рассмотрим уравнение (3.1.146) с правой частью  $f$  из  $\mathcal{A}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ . Наряду с уравнением (3.1.146) рассмотрим его  $H$ -класс, т.е. семейство уравнений

$$(3.2.157) \quad \dot{z} = g(t, z) \quad (g \in H(f)),$$

где  $H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ ,  $f_\tau(t, z) = f(t + \tau, z)$  и чертой обозначено замыкание в пространстве  $\mathcal{A}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ . Обозначим через  $\varphi(\cdot, z, g)$  решение уравнения (3.2.157), проходящее через точку  $z$  при  $t = 0$  и определенное на  $\mathbb{R}_+$ .

Отметим следующие свойства функции  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^n \times H(f) \rightarrow \mathbb{C}^n$

- $\varphi(0, z, g) = z$  ( $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $g \in H(f)$ );
- $\varphi(\tau, \varphi(t, z, g), g_t) = \varphi(t + \tau, z, g)$  ( $\tau \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$  и  $g \in H(f)$ );
- отображение  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^n \times H(f) \rightarrow \mathbb{C}^n$  непрерывно, а при фиксированных  $t \in \mathbb{R}_+$  и  $g \in H(f)$  отображение  $U(t, g) := \varphi(t, \cdot, g) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  голоморфно [46].

Обозначим через  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$  ( $Y := H(f)$ ) динамическую систему сдвигов на  $H(f)$  и определим на  $X := \mathbb{C}^n \times Y$  полугрупповую динамическую систему  $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$  по следующему правилу:  $\pi^\tau(z, g) := (\varphi(\tau, z, g), g_\tau)$ . Положим  $h := pr_2 : X \rightarrow Y$  ( $h$  является гомоморфизмом  $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$  на  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ ). Таким образом, уравнение (3.2.157) порождает неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ . Из свойства с. функции  $\varphi$  следует, что построенная выше неавтономная система является  $\mathbb{C}$ -аналитической и, применяя к ней теорему 3.2.51, получим следующий результат.

**Теорема 3.2.52.** Пусть  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  аналитична по  $z \in \mathbb{C}^n$  и непрерывна по  $t \in \mathbb{R}$ . Если  $f$  рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $z$  на компактах из  $\mathbb{C}^n$  (в частности, почти периодична или периодична), то из диссипативности уравнения (3.2.157) следует его конвергентность, т.е. уравнение (3.2.157) имеет единственное ограниченное на  $\mathbb{R}$  решение  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , являющееся равномерно асимптотически устойчивым в целом. Кроме того, решение  $p$  рекуррентно (почти периодично или периодично), если таковой является функция  $f$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно следует из теоремы 3.2.51 и следствий 16 и 17. При этом следует иметь ввиду, что рекуррентность функции  $f$  эквивалентна компактности и минимальности множества  $H(f)$  относительно динамической системы сдвигов на  $H(f)$ .

**СЛЕДСТВИЕ 18.** *Отметим, что имеет место и "локальный" вариант теоремы 3.2.51 (а, следовательно, и теоремы 3.2.52), т.е. она остается справедливой, если всюду  $\mathbb{C}^n$  заменить на некоторую область  $W \subseteq \mathbb{C}^n$  (область  $W$  может быть как ограниченной, так и неограниченной и, в частности, может совпадать с  $\mathbb{C}^n$ ). Из сказанного и теоремы 3.2.52 (см. также следствие 17) следует, что, если на  $W$  функция  $f$  голоморфна, то автономное уравнение  $\dot{z} = f(z)$  не может иметь предельных циклов в области  $W \subseteq \mathbb{C}$ .*

Неавтономную систему  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  назовем  $\mathbb{C}$ -аналитической на множестве  $M \subseteq X$ , если  $M$  инвариантно и система  $\langle (M, \mathbb{T}_1, \pi), (\tilde{Y}, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$   $\mathbb{C}$ -аналитична, где  $\tilde{Y} := h(M)$ , а  $(M, \mathbb{T}_1, \pi)$  - сужение  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  на  $M$  (аналогично определяется  $(\tilde{Y}, \mathbb{T}_2, \pi)$ ).

**Теорема 3.2.53.** *Пусть выполнены следующие условия:*

- (1) *система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и ее центр Левинсона  $J_Y$  является минимальным множеством;*
- (2) *система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  компактно диссипативна и  $J_X$  - ее центр Левинсона;*
- (3) *система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$   $\mathbb{C}$ -аналитична на  $J_X$ . Тогда каково бы ни было  $y \in J_Y$  множество  $J_X \cap X_y$  состоит ровно из одной точки и, следовательно, система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.*

*Доказательство.* Так как  $J_X$  непусто, компактно и  $J_Y$  минимально, то  $h(J_X) = J_Y$ . Из  $\mathbb{C}$ -аналитичности  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  на  $J_Y$  следует, согласно теореме 3.2.51, что  $J_X \cap X_y$  состоит ровно из одной точки, каково бы ни было  $y \in J_Y$ . Таким образом неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.

**СЛЕДСТВИЕ 19.** *Пусть для некоторого  $y_0 \in Y$   $H^+(y_0) = Y$  компактно и  $\omega_{y_0}$  минимально. Если выполнены условия 2. и 3. теоремы 3.2.53, то система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.2.52. Действительно, в условиях следствия 19 система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  компактно диссипативна и  $J_Y = \omega_{y_0}$ .

**СЛЕДСТВИЕ 20.** *Пусть точка  $y_0$  асимптотически рекуррентна (т.е. существует рекуррентная точка  $q_0 \in Y$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(y_0 t, q_0 t) = 0$ ). Если  $Y := H^+(y_0)$  компактно и выполнены условия теоремы 3.2.53,*

то система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна и любая точка  $x \in X$  асимптотически рекуррентна.

*Доказательство.* Первое утверждение следствия вытекает из теоремы 3.2.53 и следствия 19. Пусть теперь  $x \in X_y$  и  $y \in Y = H^+(y_0)$ . В силу асимптотической рекуррентности  $y_0$  точка  $y$  также асимптотически рекуррентна, т.е. существует рекуррентная точка  $q \in \omega_{y_0}$  такая, что  $\rho(yt, qt) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Так как  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  конвергентна, то  $J_X \cap X_q$  состоит из единственной точки  $p$ . Поскольку в наших условиях  $\rho(xt, pt) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то точка  $x$  асимптотически рекуррентна.

Рассмотрим уравнение

$$(3.2.158) \quad \dot{z} = f(t, z) + r(t, z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Непосредственно из теоремы 3.2.53 и следствия 20 вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.2.54.** Пусть  $f, r \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$  и выполнены следующие условия:

- (1) уравнение (3.2.158) диссипативно;
- (2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|r(t, z)\| = 0$  равномерно по  $z$  на компактах из  $\mathbb{C}^n$ ;
- (3)  $f$  голоморфна по  $z \in \mathbb{C}^n$  и рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $z$  на компактах из  $\mathbb{C}^n$ .

Тогда уравнение

$$(3.2.159) \quad \dot{z} = f(t, z)$$

имеет единственное ограниченно на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованное решение  $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t) - p(t)\| = 0$ , каково бы ни было решение  $\varphi$  уравнения (3.2.158).

В заключении этого параграфа приведем следующий

**Пример 15.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(3.2.160) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + z_2^2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}).$$

Определяемая ею динамическая система  $\mathbb{C}$ -аналитична и диссипативна. Кроме того, из [4, с.167-174] следует, что систему (3.2.160) никаким биголоморфным преобразованием нельзя линеаризовать.

Таким образом, существуют нелинейные  $\mathbb{C}$ -аналитические диссипативные системы, которые нельзя линеаризовать биголоморфным преобразованием.

**Замечание 3.2.14.** Приведенные выше результаты не имеют места для вещественно-аналитических систем. Сказанное подтверждается следующим примером.

**Пример 16.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(3.2.161) \quad \begin{cases} \dot{x} = (1 - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} = (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

Непосредственным интегрированием можно убедиться, что (3.2.161) диссипативна и ее центр Левинсона  $J = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  содержит континуум точек. Таким образом, аналог теоремы 3.2.51 для вещественно-аналитических систем не имеет места.

### 3.3. Динамические системы в пространствах сечений

Пусть  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  - неавтономная динамическая система. Через  $\Gamma = \Gamma(Y, X)$  обозначим множество всех непрерывных сечений гомоморфизма  $h$ , т.е.  $\Gamma(Y, X) = \{\gamma \in C(Y, X) : h \circ \gamma = Id_Y\}$ . Ниже предполагается, что  $\Gamma(Y, X) \neq \emptyset$ . Это требование выполняется в наиболее важных для приложений случаях.

Снабдим пространство  $\Gamma = \Gamma(Y, X)$  топологией равномерной сходимости на компактах из  $Y$ . Пусть  $K \subseteq Y$  - непустой компакт из  $Y$ . Равенство

$$(3.3.162) \quad p_K(\gamma_1, \gamma_2) := \max_{y \in K} \rho(\gamma_1(y), \gamma_2(y))$$

определяет некоторую псевдометрику  $p_K$  на  $\Gamma$ , а семейство псевдометрик  $\{p_K : K \in C(Y)\}$ , где  $C(Y)$  - семейство всех непустых компактных подмножеств  $Y$ , определяет на  $\Gamma$  равномерную структуру (топологию равномерной сходимости на компактах из  $Y$ ).

Рассмотрим один частный случай, когда  $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ , где  $\{Q_k\}$  - возрастающая последовательность вложенных друг в друга компактов. В этом случае достаточно взять счетное семейство псевдометрик  $\mathcal{P}' = \{p_k : k = 1, 2, \dots\}$ , где

$$(3.3.163) \quad p_k(\gamma_1, \gamma_2) := \max_{y \in Q_k} \rho(\gamma_1(y), \gamma_2(y)).$$

Легко проверить, что это семейство псевдометрик разделяет точки и, кроме того,  $p_1(\gamma_1, \gamma_2) \leq p_2(\gamma_1, \gamma_2) \leq \dots \leq p_k(\gamma_1, \gamma_2) \leq \dots$ . Следовательно, топология, определяемая этим семейством псевдометрик метризуема. Например, топология, определяемая метрикой

$$d(\gamma_1, \gamma_2) := \sum \frac{1}{2^k} \frac{p_k(\gamma_1, \gamma_2)}{1 + p_k(\gamma_1, \gamma_2)},$$

согласована с топологией на  $\Gamma$ , определяемой семейством псевдометрик  $\mathcal{P}'$ .

**Замечание 3.3.15.** *а. Легко проверить, что  $\Gamma$  полно тогда и только тогда, когда  $X$  является полным.*

*б. Если  $(X, h, Y)$  является векторным расслоением, то пространство  $\Gamma = \Gamma(Y, X)$  естественным образом снабжается структурой топологического векторного пространства.*

с. Если  $Y$  компактно, а  $(X, h, Y)$  является банаховым расслоением, то равенство

$$\|\gamma\| := \max_{y \in Y} |\gamma(y)|$$

определяет норму на  $\Gamma$  (здесь  $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  – некоторая норма на  $(X, h, Y)$ , согласованная с метрикой) и топология, определяемая этой нормой, согласована с исходной топологией на  $\Gamma$ .

Обозначим через  $\mu : \mathbb{S}_+ \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  отображение определяемое по следующему правилу:  $\mu(t, \gamma)(y) := \pi^t \gamma(\sigma^{-t} y)$  при всех  $y \in Y$ . Легко проверить, что  $\mu(t, \gamma) \in \Gamma$ .

Имеет место следующая

**Теорема 3.3.55.** *Тройка  $(\Gamma, \mathbb{S}_+, \mu)$  является динамической системой (полугрупповой) на  $\Gamma$ , т.е.*

- (1)  $\mu(0, \gamma) = \gamma$  при всех  $\gamma \in \Gamma$ .
- (2)  $\mu(\tau, \mu(t, \gamma)) = \mu(t + \tau, \gamma)$  при всех  $\gamma \in \Gamma$  и  $t, \tau \in \mathbb{S}_+$ .
- (3)  $\mu : \mathbb{S}_+ \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  непрерывно.

*Доказательство.* Первые два утверждения теоремы очевидны. Нетривиальная часть теоремы 3.3.55 состоит в доказательстве непрерывности  $\mu$ . Пусть  $t_\nu \rightarrow t_0$  и  $\gamma_\nu \rightarrow \gamma_0$  ( $\{t_\nu\}$  и  $\{\gamma_\nu\}$  направленности в  $\mathbb{S}_+$  и  $\Gamma$  соответственно). Покажем, что  $\mu(t_\nu, \gamma_\nu) \rightarrow \mu(t_0, \gamma_0)$  в пространстве  $\Gamma$ , т.е. для любого компакта  $K \subseteq Y$  имеет место равенство

$$\lim_{\nu} \max_{y \in K} \rho(\pi^{t_\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y)) = 0.$$

Допустим противное. Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  и компакт  $K_0 \subseteq Y$  такие, что

$$\max_{y \in K_0} \rho(\pi^{t_\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y)) \geq \varepsilon_0.$$

Так как  $K_0$  компактно, существует направленность  $\{y_\nu\} \subseteq K_0$  такая что

$$\rho(\pi^{t_\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_\nu)) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактности  $K_0$  направленность  $\{y_\nu\}$  можно считать сходящейся. Положим  $y_0 := \lim_{\nu} y_\nu$ . Заметим, что  $\sigma^{-t_\nu} y_\nu \rightarrow \sigma^{-t_0} y_0$  и, следовательно,

$$(3.3.164) \quad \lim_{\nu} \gamma_0(\sigma^{-t_\nu} y_\nu) = \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0).$$

Из (3.3.164), в свою очередь, следует, что

$$(3.3.165) \quad \lim_{\nu} \pi^{t_\nu} \gamma_0(\sigma^{-t_\nu} y_\nu) = \pi_0^{t_0} \gamma_0(\sigma_0^{-t_0} y_0).$$

С другой стороны, имеем

$$(3.3.166) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &\leq \rho(\pi^{t_\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_\nu)) \leq \\ &\leq \rho(\pi^{t_\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)) + \\ &\quad + \rho(\pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_\nu)). \end{aligned}$$

Очевидно, второе слагаемое в правой части неравенства (3.3.166) стремится к нулю, когда  $y_\nu \rightarrow y_0$ . Покажем, что первое слагаемое также стремится к нулю, когда  $y_\nu \rightarrow y_0$  и  $t_\nu \rightarrow t_0$ . Прежде всего, установим, что  $\lim_{\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu) = \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)$ . Так как

$$(3.3.167) \quad \begin{aligned} & \rho(\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)) \leq \rho(\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \gamma_0(\sigma^{-t_\nu} y_\nu)) \\ & + \rho(\gamma_0(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)) \leq \max_{y \in K'} \rho(\gamma_\nu(y), \gamma_0(y)) + \\ & \rho(\gamma_0(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)), \end{aligned}$$

где  $K' = \sigma(K_0, \mathbb{T}_0)$  и  $\mathbb{T} = \{-t_\nu\}$ , то, переходя в (3.3.167) к пределу и учитывая (3.3.165) и тот факт, что  $\gamma_\nu \rightarrow \gamma_0$  в топологии  $\Gamma$ , получаем нужное равенство.

Таким образом,  $\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu) \rightarrow \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)$  и  $t_\nu \rightarrow t_0$ , откуда следует, что

$$(3.3.168) \quad \rho(\pi^{t_\nu} \gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu} y_\nu), \pi^{t_0} \gamma_0(\sigma^{-t_0} y_0)) \rightarrow 0.$$

Переходя в (3.3.166) к пределу при  $t_\nu \rightarrow t_0$  и  $y_\nu \rightarrow y_0$  и учитывая (3.3.168), получаем  $\varepsilon_0 \leq 0$ . Последнее противоречит выбору  $\varepsilon_0$ . Следовательно, отображение  $\mu : \Gamma \times \mathbb{S}_+ \rightarrow \Gamma$  непрерывно. Теорема доказана.

**Замечание 3.3.16.** *а. Если  $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  – групповая неавтономная динамическая система, то на  $\Gamma$  определена групповая динамическая система  $(\Gamma, \mathbb{S}, \mu)$ .*

*б. Непрерывное сечение  $\gamma \in \Gamma$  является инвариантным тогда и только тогда, когда  $\gamma \in \Gamma$  есть точка покоя системы  $(\Gamma, \mathbb{S}_+, \mu)$ .*

Рассмотрим один частный случай приведенной выше конструкции. Пусть  $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{S}, \sigma) \rangle$  – коцикл над  $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$  со слоем  $W$  и  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  – порожденная им неавтономная динамическая система. Из равенства  $h \circ \gamma = Id_Y$  и  $h = pr_2$  следует:  $\gamma = (\psi, Id_Y)$ , где  $\gamma \in \Gamma(Y, X)$  и  $\psi : Y \rightarrow W$ . Таким образом, каждому сечению  $\gamma$  соответствует некоторое отображение  $\psi : Y \rightarrow W$  и наоборот. Учитывая это и взаимно однозначное соответствие между  $\Gamma(Y, W \times Y)$  и  $C(Y, W)$ , где  $C(Y, W)$  – пространство всех непрерывных функций  $\psi : Y \rightarrow W$ , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из  $Y$ , в дальнейшем эти два множества будем отождествлять. Динамическая система  $(\Gamma, \mathbb{S}_+, \mu)$  естественным образом индуцирует динамическую систему  $(C(Y, W), \mathbb{S}_+, Q)$  на  $C(Y, W)$ . А именно

$$(3.3.169) \quad \begin{aligned} & (\mu^t \gamma)(y) = \pi^t \gamma(\sigma^{-t} y) = \pi^t(\psi, Id_Y)(\sigma^{-t} y) = \\ & \pi^t(\psi(\sigma^{-t} y), \sigma^{-t} y) = (U(t, \sigma^{-t} y) \psi(\sigma^{-t} y), y) \\ & = ((Q^t \psi)(y), y). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mu^t(\psi, Id_Y) = (Q^t \psi, Id_Y)$ . Отсюда, отображение

$Q : C(Y, W) \times \mathbb{S}_+ \rightarrow C(Y, W)$ , определенное равенством  $Q(\psi, t) = Q^t \psi$ , где  $(Q^t \psi)(y) = U(t, \sigma^{-t} y) \psi(\sigma^{-t} y)$  ( $y \in Y$ ), обладает следующими свойствами:



- a.  $Q^0 = Id_{C(Y,W)}$ ;
- b.  $Q^t Q^\tau = Q^{t+\tau}$  ( $t, \tau \in \mathbb{S}_+$ )
- c.  $Q$  непрерывно,

т.е.  $(C(Y, W), \mathbb{S}_+, Q)$  есть полугрупповая динамическая система на  $C(Y, W)$ . Учитывая сказанное, в дальнейшем будем отождествлять динамические системы  $(\Gamma, S_+, \mu)$  и  $(C(Y, W), \mathbb{S}_+, Q)$ .

### 3.4. Квазипериодические решения диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами

В этом параграфе изучаются диссипативные дифференциальные уравнения вида (3.1.146) с квазипериодическими коэффициентами. Доказывается, что для таких уравнений, правые части которых аналитичны, всегда существует хотя бы одно квазипериодическое решение с тем же базисом частот, что и правая часть.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(3.4.170) \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, \varphi) \\ \dot{\varphi} = i\omega\varphi \end{cases}$$

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$  ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  линейно независимы относительно целых чисел),  $i^2 = -1$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{C}^m$ ,  $\omega\varphi = \text{col}(\omega_1\varphi_1, \dots, \omega_m\varphi_m)$ ,  $x \in \mathbb{C}^m$  и  $F \in C(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ . Обозначим через  $\mathcal{T}^m$   $m$ -мерный тор, т.е.  $\mathcal{T}^m := \{\varphi \in \mathbb{C}^m : |\varphi_k| = 1, k = \overline{1, m}\}$ . В дальнейшем нас будет интересовать система (3.4.170), когда параметр  $\varphi$  пробегает точки тора  $\mathcal{T}^m$  и некоторой его малой окрестности

$$(3.4.171) \quad D_\delta := \{\varphi \in \mathbb{C}^m : |\varphi_k| < 1 + \delta, k \in \overline{1, m}\},$$

где  $\delta > 0$  - некоторое достаточно малое число.

Система (3.4.170) эквивалентна уравнению

$$(3.4.172) \quad \dot{x} = F(x, \varphi_0 e^{i\omega\varphi}),$$

где  $\varphi_0 \in \mathbb{C}^m$  или его подмножеству (например,  $D_\delta$ ).

Будем в дальнейшем говорить, что система (3.4.170) (или уравнение (3.4.172)) аналитична на торе  $\mathcal{T}^m$ , если существует положительное число  $\delta$  такое, что функция  $F : \mathbb{C}^n \times D_\delta \rightarrow \mathbb{C}^m$  аналитична.

Обозначим через  $(\mathbb{C}^m, \mathbb{R}, \sigma)$  динамическую систему на  $\mathbb{C}^m$ , определенную вторым уравнением системы (3.4.170). Таким образом,

$$(3.4.173) \quad \sigma(\varphi, t) := \text{col}(\varphi_1 e^{i\omega_1 t}, \varphi_2 e^{i\omega_2 t}, \dots, \varphi_m e^{i\omega_m t}).$$

Легко заметить, что при любом  $\delta > 0$  множества  $D_\delta$  и  $\overline{D}_\delta$  инвариантны относительно  $(\mathbb{C}^m, \mathbb{R}, \sigma)$ .

Систему (3.4.170) (и уравнение (3.4.172)) назовем диссипативной на торе  $\mathcal{T}^m$ , если существует положительное число  $\delta > 0$  (достаточно малое) такое, что динамическая система  $(\mathbb{C}^m, \mathbb{R}, \sigma)$ , порожденная (3.4.170) диссипативна.

Уточним это определение. Предположим, что для системы (3.4.170) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости вправо. Тогда, как известно, система (3.4.170) определяет полугрупповую систему  $(\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi)$  на  $\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta$ . При этом

$$\pi((x, \varphi_0), t) := (\psi(t, x, \varphi_0), \varphi_0 e^{i\omega t}),$$

где  $\psi(\cdot, x, \varphi_0)$  - решение уравнения (3.4.172), проходящее через точку  $x \in \mathbb{C}^n$  при  $t = 0$ . Заметим, что тройка  $\langle (\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$  ( $h := pr_2 : \mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta \rightarrow \overline{D}_\delta$ ) есть неавтономная динамическая система. Таким образом, диссипативность системы дифференциальных уравнений (3.4.170) на торе  $\mathcal{T}^m$  означает, что порожденная ею неавтономная динамическая система  $\langle (\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$  (при достаточно малом  $\delta$ ) диссипативна, т.е. существует положительное число  $r$ , для которого

$$(3.4.174) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t, x, \varphi)\| < r$$

при всех  $x \in \mathbb{C}^n$  и  $\varphi \in \overline{D}_\delta$ , причем  $r$  не зависит ни от  $x \in \mathbb{C}^n$  ни от  $\varphi \in \overline{D}_\delta$ .

**Теорема 3.4.56.** *Если на торе уравнение (3.4.172) аналитично и диссипативно на торе  $\mathcal{T}^m$ , то оно имеет хотя бы одно квазипериодическое решение с тем же базисом частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ , что и правая часть  $F$ .*

*Доказательство.* Пусть (3.4.172) диссипативно на торе  $\mathcal{T}^m$  и функция  $F$  аналитична на нем. Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что  $F : \mathbb{C}^n \times D_\delta \rightarrow \mathbb{C}^n$  аналитична, и неавтономная система

$$\langle (\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$$

диссипативна. Обозначим через  $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  множество всех аналитических функций  $\gamma : D_\delta \rightarrow \mathbb{C}^n$ , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из  $D_\delta$ . Очевидно,  $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  есть замкнутое подмножество пространства  $C(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  всех непрерывных функций  $\gamma : D_\delta \rightarrow \mathbb{C}^n$ , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из  $D_\delta$ . Так как  $D_\delta$  является инвариантным подмножеством относительно динамической системы  $(\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma)$ , то неавтономная система

$$\langle (\mathbb{C}^m \times D_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (D_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$$

определена и согласно замечанию 3.3.16  $C(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  - есть пространство всех непрерывных сечений для этой системы. По теореме 3.3.55 тройка  $(C(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$ , где  $(Q^t \gamma)(\varphi) = \psi(t, \gamma(\sigma^{-t} \varphi), \sigma^{-t} \varphi)$ , есть динамическая система на  $C(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ . Покажем, что  $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  является инвариантным подмножеством динамической системы  $(C(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$ . Действительно, если  $\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ , то из общих свойств решений уравнений с аналитической правой частью следует [46], что  $Q^t \gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  при всех  $t \geq 0$ . Таким образом на  $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  определена полугрупповая динамическая

система  $(\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$ . Отметим одно свойство этой системы, вытекающее из диссипативности (3.4.172) на торе  $T^m$ . Положим

$$\mathcal{A}_r := \{\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n) : \gamma(D_\delta) \subseteq B(0, r)\},$$

где  $B(0, r)$  открытый шар в  $\mathbb{C}^n$  радиуса  $r$  с центром в нуле. В силу теоремы Витали [19] при каждом  $r > 0$  множество  $\mathcal{A}_r$  относительно компактно в  $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ . Очевидно, множества  $\mathcal{A}_r$  выпуклы. Согласно теореме 3.1.49 существует такое  $b > 0$ , что для любого  $r > 0$  найдется  $l_r \geq 0$ , для которого

$$(3.4.175) \quad Q^t \mathcal{A}_r \subseteq \mathcal{A}_b$$

при всех  $t \geq l_r$ . Пусть  $r > b$  (например,  $r = b + 1$ ) и  $U = \text{Int} \mathcal{A}_r$  (внутренность  $\mathcal{A}_r$ ). Справедливо включение  $Q^t \bar{U} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_b \subset U$ . Согласно теореме 1 [179] существует точка покоя  $\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  динамической системы  $(\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$ , т.е.

$$(3.4.176) \quad \psi(t, \gamma(\sigma^{-t}\varphi), \sigma^{-t}\varphi) = \gamma(\varphi) \quad (\varphi \in D_\delta, \quad t \geq 0).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(t, \gamma(\varphi), \varphi) = \gamma(\sigma^t \varphi) \quad (\varphi \in D_\delta, \quad t \geq 0),$$

т.е.

$$\psi(t, \gamma(\varphi_0), \varphi_0) = \gamma(\sigma^t \varphi_0) = \gamma(\varphi_0 e^{i\omega t})$$

является квазипериодическим решением уравнения (3.4.172) с базисом частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ . Теорема доказана.

**Замечание 3.4.17.** *а. Доказательство теоремы 3.4.5б носит общий характер. Оно непосредственно переносится на уравнения более общего вида. Например, вместо (3.4.170) можно было бы рассмотреть систему уравнений*

$$(3.4.177) \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, \varphi) \\ \dot{\varphi} = G(\varphi) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi \in \mathbb{C}^m).$$

При этом надо предполагать, что тор  $T^m$  является квазипериодическим минимальным множеством второго уравнения системы (3.4.177). Кроме того, существует окрестность  $D_\delta$  тора  $T^m$ , являющаяся инвариантным множеством динамической системы, порожденной вторым уравнением системы (3.4.177). Остальные условия, фигурирующие в теореме 3.4.5б, очевидным образом модифицируются для этого случая.

*б. Теорема 3.4.5б (см. также теорему 3.2.52) подтверждает гипотезу, высказанную И.У.Бронштейном (см. [15, с.278]) о том, что диссипативная почти периодическая система, удовлетворяющая условию равномерной положительной устойчивости, допускает хотя бы одно почти периодическое решение. Следует добавить, что для  $\mathbb{C}$ -аналитических систем условие равномерной положительной устойчивости является лишним.*

с. Автору не известно, насколько существенным в теореме 3.4.56 является условие аналитичности его правой части  $F$ . Мы склонны считать, что теорема 3.4.56 имеет место и в том случае, когда  $F$  достаточно гладкая функция. В связи с этим укажем на два примера, построенных в [30, 158]. В этих работах строится пример скалярного уравнения (3.1.146) с квазипериодическими коэффициентами, которое обладает свойством диссипативности, но не имеет ни одного почти периодического решения. Следует отметить, что, как в работе [30], так и в [158], все построения базируются на известных результатах Данжуа о потоках на двумерном торе. Как показывает анализ этих примеров, если правая часть уравнения (3.1.146) достаточно гладкая, то отмеченное обстоятельство уже не имеет места.

**Теорема 3.4.57.** *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.4.56 и кроме того  $\overline{F(x, \varphi)} = F(\bar{x}, \bar{\varphi})$  (чертой обо значено комплексное сопряжение). Тогда существует  $\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$  такое, что*

- (1)  $\overline{\gamma(x)} = \gamma(\bar{x})$  при всех  $x \in D_\delta$ ;
- (2)  $\gamma(\varphi_0 e^{i\omega t}) = \psi(t, \gamma(\varphi_0), \varphi_0)$  при всех  $\varphi_0 \in D_\delta$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 3.4.56.

### 3.5. Почти периодические решения слабо нелинейных диссипативных систем

1. В этом пункте изучим ограниченные и равномерно согласованные решения линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Обозначим через  $C_b(\mathbb{R}, E^n)$  множество всех ограниченных на  $\mathbb{R}$  функций  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow E^n$  с нормой  $\sup$ . Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$(3.5.178) \quad \dot{x} = A(t)x,$$

где  $A \in C_b(\mathbb{R}, [E^n])$ . Наряду с уравнением (3.5.178) рассмотрим неоднородное уравнение

$$(3.5.179) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t).$$

Напомним, что уравнение (3.5.178) называют слабо регулярным, если для любого  $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$  уравнение (3.5.179) имеет по крайней мере одно решение  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ .

**Теорема 3.5.58.** *Пусть  $A \in C_b(\mathbb{R}, [E^n])$ . Если  $H(A)$  компактно, то следующие условия эквивалентны:*

- (1) уравнение (3.5.178) слабо регулярно;
- (2) уравнение (3.5.179) имеет по крайней мере одно ограниченное на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованное решение при любой ограниченной на  $\mathbb{R}$  функции  $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ .

*Доказательство.* Из 2. очевидно следует 1., поэтому для доказательства теоремы 3.5.58 достаточно показать, что из 1. следует 2.. Доказательство проведем в два этапа.

а. Пусть матрица-функция  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$  устойчива по Пуассону хотя бы в одном направлении, т.е. существует  $|t_k| \rightarrow +\infty$  такая, что  $A_{t_k} \rightarrow A$  в  $C(\mathbb{R}, [E^n])$ . В этом случае из теоремы 3.5.58 и леммы 4.2.1 из [92] следует, что уравнение (3.5.178) удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии (э.д.) на  $\mathbb{R}$  и по теореме 22.23 [15] уравнение (3.5.179) имеет единственное ограниченное на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованное решение.

б. Матрица-функция  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$  не является устойчивой по Пуассону ни в каком направлении. Пусть  $\varphi$  – ограниченное на  $\mathbb{R}$  решение уравнения (3.5.179) и  $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_{(A,f)}$ . Существует  $(B, g) \in H(A, f)$  такое, что  $A_{t_k} \rightarrow B$  и  $f_{t_k} \rightarrow g$ . Заметим, что в этом случае для последовательности  $\{t_k\}$  возможны только следующие два случая:

- (1)  $\{t_k\}$  сходится к  $t_0 \in \mathbb{R}$  и, следовательно,  $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_\varphi$ ;
- (2)  $\{t_k\}$  такова, что  $|t_k| \rightarrow +\infty$ .

Тогда  $B := \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{t_k}$  является  $\omega$ - или  $\alpha$ -предельной для  $A$  и в этом случае также  $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_\varphi$ . Действительно, последовательность  $\{\varphi_k\}$  компактна в  $C(\mathbb{R}, E^n)$  в силу ограниченности  $\varphi$ . Кроме того, всякая предельная функция для последовательности  $\{\varphi_k\}$  является ограниченным на  $\mathbb{R}$  решением уравнения

$$(3.5.180) \quad \dot{x} = B(t)x + g(t) .$$

По лемме 4.2.1 из [92] уравнение

$$(3.5.181) \quad \dot{y} = B(t)y$$

удовлетворяет условию э.д. на  $\mathbb{R}$  и, следовательно, уравнение (3.5.180) более одного ограниченного на  $\mathbb{R}$  решения иметь не может. Отсюда следует, что  $\{\varphi_{t_k}\}$  сходится в  $C(\mathbb{R}, E^n)$ , т.е.  $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_\varphi$ .

Наконец, покажем, что в случае, когда  $\{t_k\}$  неограничена, то она не содержит ни одной ограниченной подпоследовательности. Действительно, если допустить противное, то существует  $\{t'_k\} \subseteq \{t_k\}$  такая, что  $t'_k \rightarrow t' \in \mathbb{R}$  и тогда

$$B := \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{t_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{t'_k} = A_{t'} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Из последнего равенства следует, что  $A$  устойчива по Пуассону хотя бы в одном направлении, что противоречит условию. Теорема доказана.

Обозначим через  $E_0 := \{u \in E^n : \sup\{\|\varphi(t, u, A)\| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$  и  $\mathbb{P}_0$  - проектор, отображающий  $E^n$  на  $E_0$ . Имеет место

**Лемма 36.** Пусть  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ . Если функция  $A$  ограничена на  $\mathbb{R}$  и уравнение (3.5.178) слабо регулярно, то для любого  $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$  существует единственное решение  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$  уравнения (3.5.179) удовлетворяющее следующим условиям:

- (1)  $\mathbb{P}_0\varphi(0) = 0$ ;  
 (2) существует положительная константа  $K$  (константа слабой регулярности (3.5.178)), не зависящая от  $f$ , такая что  $\|\varphi\| \leq K\|f\|$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и лемма 6.3 [87, с.515].

**СЛЕДСТВИЕ 21.** Пусть  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ . Если  $H(A)$  компактно, то следующие условия эквивалентны :

- (1) уравнение (3.5.178) слабо регулярно;  
 (2) при любой  $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$  существует единственное ограниченное на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованное решение  $\varphi$  уравнения (3.5.179) удовлетворяющее следующим условиям:

$$a. \mathbb{P}_0\varphi(0) = 0 \quad \text{и} \quad b. \|\varphi\| \leq K\|f\|,$$

где  $K$  – константа слабой регулярности (3.5.178).

**Теорема 3.5.59.** Пусть функция  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$  ограничена на  $\mathbb{R}$ , уравнение (3.5.178) слабо регулярно и  $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  удовлетворяет следующему условию:  $\|F(t, u)\| \leq c(\|u\|)$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$  и  $u \in E^n$ ), где  $c: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  – неубывающая функция. Если  $\{r > 0 : Kc(r) \leq r\} \neq \emptyset$ , где  $K$  – константа слабой регулярности (3.5.178), то уравнение

$$(3.5.182) \quad \dot{u} = A(t)u + F(t, u)$$

имеет хотя бы одно ограниченное на  $\mathbb{R}$  решение.

*Доказательство.* Какова бы ни была  $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ , уравнение (3.5.179) имеет единственное решение  $\psi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$  такое, что

$$(3.5.183) \quad \mathbb{P}_0\psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \|\psi\| \leq K\|f\| \quad ,$$

где  $K$  – константа слабой регулярности (3.5.178). Пусть  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(3.5.184) \quad \dot{u} = A(t)u + F(t, \varphi(t)) \quad .$$

Так как  $f(t) := F(t, \varphi(t))$  ограничена на  $\mathbb{R}$  ( $\|f(t)\| = \|F(t, \varphi(t))\| \leq c(\|\varphi(t)\|) \leq c(\|\varphi\|)$ ), то уравнение (3.5.184) имеет единственное ограниченное на  $\mathbb{R}$  решение  $\psi_\varphi$ , удовлетворяющее условиям (3.5.183) и, следовательно,

$$(3.5.185) \quad \|\psi_\varphi\| \leq K\|f\| = K \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, \varphi(t))\| \leq Kc(\|\varphi\|) \quad .$$

Определим оператор  $\Phi: C_b(\mathbb{R}, E^n) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, E^n)$  по следующему правилу  $(\Phi\varphi)(t) = \psi_\varphi(t)$  ( $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n), t \in \mathbb{R}$ ). Покажем, что, если  $r_0 > 0$  удовлетворяет условию  $Kc(r_0) \leq r_0$ , то шар  $B[0, r_0] := \{\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n) : \|\varphi\| \leq r_0\}$  переходит в себя при отображении  $\Phi$ . Действительно, если  $\varphi \in B[0, r_0]$ , то  $\|\Phi\varphi\| \leq Kc(\|\varphi\|) \leq Kc(r_0) \leq r_0$ . Рассмотрим теперь

$C_b(\mathbb{R}, E^n)$  - как подмножество вложенное в  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Прежде всего заметим, что любой шар  $B[0, r] \subset C_b(\mathbb{R}, E^n)$  является выпуклым, ограниченным и замкнутым подмножеством  $C(\mathbb{R}, E^n)$ .

Отображение  $\Phi : B[0, r_0] \rightarrow B[0, r]$  непрерывно в топологии  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Действительно, пусть  $\{\varphi_k\} \subseteq B[0, r]$  и  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Рассмотрим последовательность  $(\Phi\varphi_k)(t) := \psi_{\varphi_k}(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Заметим, что  $f_k(t) := F(t, \varphi_k(t)) \rightarrow f(t) := F(t, \varphi(t))$  в топологии  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $\varepsilon_0 > 0$  и  $L_0 > 0$  такие, что

$$\max_{|t| \leq L_0} \|F(t, \varphi_k(t)) - F(t, \varphi(t))\| \geq \varepsilon_0 .$$

Следовательно, существует  $\{t_k\} \subseteq [-L_0, L_0]$  такая, что

$$(3.5.186) \quad \|F(t_k, \varphi_k(t_k)) - F(t_k, \varphi(t_k))\| \geq \varepsilon_0 .$$

Так как последовательность  $\{t_k\}$  ограничена, то ее можно считать сходящейся. Заметим, что  $\varphi_k(t_k) \rightarrow \varphi(t_0)$ , где  $t_0 := \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(t_k) - \varphi(t_0)\| &\leq \|\varphi_k(t_k) - \varphi(t_k)\| + \|\varphi(t_k) - \varphi(t_0)\| \leq \\ &\leq \max_{|t| \leq L_0} \|\varphi_k(t) - \varphi(t)\| + \|\varphi(t_k) - \varphi(t_0)\| . \end{aligned}$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, когда  $k \rightarrow +\infty$ , получим требуемое утверждение. Из неравенства (3.5.186) (учитывая, что последовательность  $\{\varphi_k(t_k)\}$  сходится к  $\varphi(t_0)$  при  $k \rightarrow +\infty$ ) мы получим  $\varepsilon_0 \leq 0$ , что противоречит выбору  $\varepsilon_0$ . Таким образом  $f_k \rightarrow f$  в  $C(\mathbb{R}, E^n)$  и, кроме того,  $\|f_k\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, \varphi_k(t))\| \leq c(\|\varphi_k\|) \leq c(r_0)$ , т.е.  $\|f_k(t)\| \leq c(r_0)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) и, следовательно,  $\|f(t)\| \leq c(r_0)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). С другой стороны,  $\Phi\varphi_k$  является ограниченным на  $\mathbb{R}$  решением уравнения

$$\dot{u} = A(t)u + f_k(t) .$$

Кроме того, функции  $\{\Phi\varphi_k\}$  и их производные равномерно ограничены на  $\mathbb{R}$  и, следовательно, последовательность  $\{\Phi\varphi_k\}$  компактна в  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Так как  $f_k \rightarrow f$  в  $C(\mathbb{R}, E^n)$ , то каждая предельная функция последовательности  $\{\Phi\varphi_k\}$  является ограниченным на  $\mathbb{R}$  решением (3.5.179), удовлетворяющим условиям (3.5.183). Но в силу следствия 21 уравнение (3.5.179) имеет не более одного ограниченного на  $\mathbb{R}$  решения, удовлетворяющего условиям (3.5.183). Из сказанного следует, что последовательность  $\{\Phi\varphi_k\}$  сходится в  $C(\mathbb{R}, E^n)$  и непрерывность  $\Phi : B[0, r_0] \rightarrow B[0, r_0]$  установлена.

Теперь покажем, что отображение  $\Phi : B[0, r_0] \rightarrow B[0, r_0]$  вполне непрерывно в топологии  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Для этого заметим, что

$$(\Phi\varphi)'(t) = A(t)(\Phi\varphi)(t) + F(t, \varphi(t))$$

и, следовательно,

$$\|(\Phi\varphi)'(t)\| \leq a\|(\Phi\varphi)(t)\| + \|F(t, \varphi(t))\| \leq ar_0 + c(r_0) \quad (t \in \mathbb{R}) ,$$

где  $a = \sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}\}$ . Откуда следует, что  $\Phi(B_{r_0})$  относительно компактно в топологии  $C(\mathbb{R}, E^n)$ . Согласно теореме Тихонова-Шаудера отображение  $\Phi$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $\varphi \in B[0, r_0]$ . Очевидно  $\varphi \in B[0, r_0]$  является ограниченным на  $\mathbb{R}$  решением уравнения (3.5.182). Теорема доказана.

**Замечание 3.5.18.** Утверждение, близкое к теореме 3.5.59, получено в работе [66], но при более сильных ограничениях на нелинейное возмущение  $F$ .

**Теорема 3.5.60.** Пусть  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ ,  $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  и выполнены следующие условия:

- $a = \sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$ ;
- уравнение (3.5.178) слабо регулярно;
- $\|F(t, u)\| \leq c(\|u\|)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in E^n$ ) и  $\{r > 0 : Kc(r) \leq r\} \neq \emptyset$ , где  $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неубывающая функция, а  $K$  — константа слабой регулярности (3.5.178);
- сужение  $F_0$  функции  $F$  на  $\mathbb{R} \times B[0, r_0]$  удовлетворяет условию Липшица и  $Lip(F_0) < K^{-1}$ , где  $r_0$  — некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству  $Kc(r_0) \leq r_0$ .

Тогда уравнение (3.5.182) имеет хотя бы одно ограниченное на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованное решение.

*Доказательство.* Обозначим через  $B_{r_0}(\mathfrak{M}) := \{\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n) : \|\varphi(t)\| \leq r_0 \ (t \in \mathbb{R})\}$  и  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_\varphi$ , где  $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{(A,F)}$ .  $B_{r_0}(\mathfrak{M})$  — является замкнутым подмножеством  $C_b(\mathbb{R}, E^n)$  [132, с.60]. Оператор  $\Phi : C_b(\mathbb{R}, E^n) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, E^n)$ , определенный так же, как и при доказательстве теоремы 3.5.59, переводит  $B_{r_0}(\mathfrak{M})$  в себя. Действительно, если  $\varphi \in B_{r_0}(\mathfrak{M})$ , то функция  $f(t) := F(t, \varphi(t))$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) также принадлежит  $B_{r_0}(\mathfrak{M})$ . Согласно следствию 21  $\Phi\varphi$  есть единственное ограниченное на  $\mathbb{R}$ , равномерно согласованное решение уравнения (3.5.179), удовлетворяющее условиям (3.5.183). Кроме того, как и в теореме 3.3.55,  $\Phi(B[0, r_0]) \subseteq B[0, r_0]$  и, следовательно,  $\Phi(B_{r_0}(\mathfrak{M})) \subseteq B_{r_0}(\mathfrak{M})$ . Пусть  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  из  $B_{r_0}(\mathfrak{M})$ . Заметим, что

$$(\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2)'(t) = A(t)[(\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2)(t)] + F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \|\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2\| &\leq K \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))\| \\ &\leq K Lip(F_0) \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что отображение

$$\Phi : B_{r_0}(\mathfrak{M}) \rightarrow B_{r_0}(\mathfrak{M})$$

является сжатием, поэтому оно имеет единственную неподвижную точку, которая и является равномерно согласованным решением уравнения (3.5.182). Теорема доказана.



СЛЕДСТВИЕ 22. Если в условиях теоремы 3.5.60 функции

$$A \in C(\mathbb{R}, [E^n]) \text{ и } F_0 = F|_{\mathbb{R} \times B[0, r_0]}$$

совместно  $\tau$  - периодичны (почти периодичны, рекуррентны, устойчивы по Пуассону, асимптотически  $\tau$  - периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны), то (3.5.182) допускает по крайней мере одно  $\tau$  - периодическое (почти периодическое, рекуррентное, устойчивое по Пуассону, асимптотически  $\tau$  - периодическое, асимптотически почти периодическое, асимптотически рекуррентное) решение.

СЛЕДСТВИЕ 23. Вопрос о существовании равномерно согласованных решений слабо нелинейных систем ранее изучался в работах [15], [132]. Основное отличие теоремы 3.5.60 от соответствующих результатов из [15], [132] состоит в том, что уравнение (3.5.178) может и не удовлетворять условию э.д. на  $\mathbb{R}$ . Кроме того, нелинейное возмущение не обязательно мало по  $u \in E^n$ .

2. В этом пункте изучим равномерно согласованные решения слабо нелинейных диссипативных систем.

**Теорема 3.5.61.** Пусть  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ ,  $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ , и выполнены следующие условия:

- (1)  $a = \sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$ ;
- (2) существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что

$$\|U(t, A)U^{-1}(\tau, A)\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (t \geq \tau, t, \tau \in \mathbb{R});$$

- (3)  $\|F(t, u)\| \leq M + \varepsilon\|u\| \quad (u \in E^n, t \in \mathbb{R})$  и  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 < \nu^2(Na)^{-1}$ .

Тогда уравнение (3.5.182) диссипативно, т.е. существует  $R_0 > 0$  такое, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \|\varphi(t, \nu, B, G)\| < R_0 \quad (\nu \in E^n, (B, G) \in H(A, F)),$$

где  $\varphi(\cdot, \nu, B, G)$  - решение уравнения

$$(3.5.187) \quad \dot{\nu} = B(t)\nu + G(t, \nu),$$

удовлетворяющее условию  $\varphi(0, \nu, B, G) = \nu$ .

*Доказательство.* При каждом  $B \in H(A)$  определим на  $E^n$  норму  $\|\cdot\|_B$  равенством

$$\|u\|_B := \int_0^{+\infty} \|U(t, B)u\| dt.$$

Также, как и в доказательстве теоремы 2.7.47, проверяется, что

$$\frac{1}{a}\|u\| \leq \|u\|_B \leq \frac{N}{\nu}\|u\| \quad (u \in E^n).$$

Положим

$$u(t) := \|\varphi(t, u, B, G)\|_{B_t} = \int_0^{+\infty} \|U(s, B_t)\varphi(t, u, B, G)\| ds .$$

Так как

$$\varphi(t, u, B, G) = U(t, B)\left(u + \int_0^t U^{-1}(\tau, B)G(\tau, \varphi(\tau, u, B, G))d\tau\right),$$

то  $u(t) =$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \|U(s, B_t)U(t, B)\left[u + \int_0^t U^{-1}(\tau, B)G(\tau, \varphi(\tau, u, B, G))d\tau\right]\| ds \\ &= \int_0^{+\infty} \|U(s+t, B)\left(u + \int_0^t U^{-1}(\tau, B)G(\tau, \varphi(\tau, u, B, G))d\tau\right)\| ds \\ (3.5.188) \quad & \leq \int_0^{+\infty} \|U(s+t, B)u\| ds \\ & + \int_0^{+\infty} \left\| \int_0^t U(s+t, B)U^{-1}(\tau, B)G(\tau, \varphi(\tau, u, B, G))d\tau \right\| ds \\ & \leq \frac{N}{\nu} e^{-\nu t} \|u\| + \int_0^{+\infty} \int_0^t N e^{-\nu(s+t-\tau)} (M + \varepsilon \|\varphi(\tau, u, B, G)\|) d\tau ds \\ &= \frac{N}{\nu} e^{-\nu t} \|u\| + \frac{N}{\nu} e^{-\nu t} \left( \frac{M}{\nu} (e^{\nu t} - 1) + \varepsilon \int_0^t \|\varphi(\tau, u, B, G)\| e^{\nu\tau} d\tau \right) \\ & \leq \frac{N}{\nu} e^{-\nu t} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2} (1 - e^{-\nu t}) \\ & \quad + \frac{N\varepsilon}{\nu} e^{-\nu t} \int_0^t a \|\varphi(\tau, u, B, G)\|_{B_\tau} e^{\nu\tau} d\tau \\ &= \frac{N}{\nu} e^{-\nu t} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2} (1 - e^{-\nu t}) + \frac{aN\varepsilon}{\nu} e^{-\nu t} \int_0^t u(\tau) e^{\nu\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Положим  $\varphi(t) := u(t)e^{\nu t}$ . Из неравенства (3.5.188) следует, что

$$(3.5.189) \quad \varphi(t) \leq \frac{N}{\nu} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2} (e^{\nu t} - 1) + \frac{a\varepsilon N}{\nu} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

и по теореме 9.3 из [25]  $\varphi(t) \leq \psi(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), где  $\psi$  - решение интегрального уравнения

$$y(t) = \frac{N}{\nu} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2} (e^{\nu t} - 1) + \frac{a\varepsilon N}{\nu} \int_0^t y(\tau) d\tau .$$

Решая последнее уравнение, находим, что

$$\psi(t) = \left( \frac{N}{\nu} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N} \right) e^{\frac{a\varepsilon N}{\nu} t} + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N} e^{\nu t}$$

и, следовательно,

$$(3.5.190) \quad \begin{aligned} u(t)e^{\nu t} &\leq \left( \frac{N}{\nu} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N} \right) e^{\frac{a\varepsilon N}{\nu} t} \\ &\quad + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N} e^{\nu t} . \end{aligned}$$

Из неравенств (3.5.188) и (3.5.190) получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, u, B, G)\| &\leq a \|\varphi(t, u, B, G)\|_{B_t} \leq \\ &\leq a \left( \frac{N}{\nu} \|u\| + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N} \right) e^{-\frac{\nu^2 - a\varepsilon N}{\nu} t} + \frac{aNM}{\nu^2 - a\varepsilon N} . \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \|\varphi(t, u, B, G)\| \leq \frac{aMN}{\nu^2 - a\varepsilon N}$$

( $u \in E^n$ ,  $(B, G) \in H(A, F)$ ), ибо  $\nu - \frac{a\varepsilon N}{\nu} > 0$ . Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 24.** Простые примеры показывают, что в условиях теоремы 3.5.62 диссипативность не сводится к конвергенции. Сказанное подтверждается уравнением  $\dot{x} = -x + 2x(1 + x^2)^{-1}$ .

**Теорема 3.5.62.** Пусть  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ ,  $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  и выполнены следующие условия :

- (1)  $a := \sup\{ \|A(t)\| : t \in \mathbb{R} \} < +\infty$
- (2) существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что

$$\|U(t, A)U^{-1}(\tau, A)\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (t \geq \tau, t, \tau \in \mathbb{R}) .$$

- (3)  $\|F(t, u)\| \leq M + \varepsilon \|u\|$  ( $u \in E^n$ ) и  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 = \min(\frac{\nu}{N}, \frac{\nu^2}{Na})$ , где  $M$  некоторое положительное число.
- (4) сужение  $F_0$  функции  $F$  на  $\mathbb{R} \times B[0, r_0]$ , где  $r_0$  положительное число, фигурирующее в теореме 3.5.60 (например,  $r_0 = \frac{NM}{\nu - \varepsilon_0 N}$ ), удовлетворяет условию Липшица с константой  $Lip(F_0) < N\nu^{-1}$ .

Тогда уравнение (3.5.180) диссипативно и в шаре  $B[0, r_0]$  содержится ровно одно ограниченное на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованное решение этого уравнения.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно следует из теорем 3.5.60 и 3.5.61

**Замечание 3.5.19.** Теоремы 3.5.60 – 3.5.62 имеют место и для уравнений вида (3.5.182) заданных в произвольных банаховых пространствах.

**СЛЕДСТВИЕ 25.** Если в условиях теоремы 3.5.62 функции  $A$  и  $F_0$  почти периодичны, то уравнение (3.5.182) диссипативно и его центр Левинсона содержит по крайней мере одно почти периодическое решение.

**СЛЕДСТВИЕ 26.** В условиях теоремы 3.5.62 и следствия 25 диссипативность не сводится к конвергенции.

Приведем пример подтверждающий сказанное.

**Пример 17.** Рассмотрим скалярное автономное уравнение

$$(3.5.191) \quad \dot{x} = -kx + \alpha F(x),$$

где

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{при } |x| \leq 10 \\ 50 + 10[1 - \exp(10 - |x|)] & \text{при } |x| > 10 \end{cases}$$

при  $0 < k \leq 5\alpha$ . При этом можно положить  $r_0 = \frac{k}{\alpha}$ . Легко проверить, что для уравнения (3.5.191) все условия теоремы 3.5.62 выполнены при выбранных  $\alpha, k$ , и  $F$ . Кроме того, его центр Левинсона содержит по крайней мере две различные точки покоя (на самом деле, их 3) и, следовательно, уравнение (3.5.191) не конвергентно.



**Структура центра Левинсона неавтономных  
динамических систем с условием  
гиперболичности на замыкании множества  
рекуррентных движений**

**4.1. Топологические свойства центра Левинсона**

В этом параграфе приводятся условия связности центра Левинсона компактно диссипативной динамической системы.

**Лемма 37.** Пусть для  $M_1, M_2 \in C(X)$   $W^s(M_1) \neq \emptyset$  и  $W^s(M_2) \neq \emptyset$ . Тогда:

- (1) Если  $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) \neq \emptyset$ , то  $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ .
- (2) Если  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , то  $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) = \emptyset$ .
- (3) Если множества  $M_1$  и  $M_2$  являются притягивающими и

$$W^s(M_1) \cap W^s(M_2) = \emptyset,$$

то  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

- (4) Если множества  $M_1$  и  $M_2$  являются притягивающими и  $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ , то  $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Напомним, что замкнутое (открытое) полуинвариантное множество  $M \subseteq X$  динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  называют неразложимым, если оно представимо в виде дизъюнктивного объединения двух своих замкнутых (открытых) полуинвариантных подмножеств.

**Лемма 38.** Пусть  $M$  - непустое компактное полуинвариантное неразложимое подмножество  $X$  и  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ , тогда  $M$  связно.

*Доказательство.* Допустим, что  $M$  несвязно. Тогда существуют непустые замкнутые подмножества  $M_1$  и  $M_2 \subseteq X$  такие, что  $M = M_1 \sqcup M_2$ . Пусть  $x \in M_1$  и  $\mathbb{T}_i = \{t \in \mathbb{T} \mid xt \in M_i\}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда в силу непрерывности отображения  $\pi(\cdot, x) : \mathbb{T} \rightarrow X$  множества  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$  замкнуты,  $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \emptyset$  и  $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ . Из связности  $\mathbb{R}_+$  следует, что  $\mathbb{T}_2 = \emptyset$  и, следовательно,  $M_1$  полуинвариантно. Аналогично показывается, что  $M_2$  также полуинвариантно. Последнее противоречит неразложимости  $M$ . Лемма доказана.

**Лемма 39.** Пусть  $M \in C(X)$  орбитально устойчиво,  $M = M_1 \cup M_2$  и каждое из множеств  $M_1$  и  $M_2$  непусто и полуинвариантно, тогда:

- 1) Множества  $M_1$  и  $M_2$  орбитально устойчивы.
- 2)  $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$ .
- 3) Если множество  $M$  асимптотически устойчиво, то множества  $M_1$  и  $M_2$  также асимптотически устойчивы.

*Доказательство.* Пусть  $d = \rho(M_1, M_2) > 0$ . Для числа  $d/2$  подберем число  $\delta_2$  такое, что  $\rho(x, M_i) < \delta_2$  ( $i = 1, 2$ ) влечет  $\rho(xt, M_i) < d/2$  при всех  $t \in [0, 1]$ . Пусть число  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < d/2$ ) и  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, M)$  – положительное число из условия орбитальной устойчивости множества  $M$ . Положим  $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$  и покажем, что из  $\rho(x, M_1) < \delta(\varepsilon)$  следует, что  $\rho(xt, M_1) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . Действительно, если  $\rho(x, M_1) < \delta(\varepsilon)$ , то  $\rho(x, M) < \delta(\varepsilon)$  и, следовательно,  $\rho(xt, M) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . Положим

$$\mathbb{T}_i = \{t \in \mathbb{T} \mid \rho(xt, M_i) < \varepsilon\} \quad (i = 1, 2).$$

Заметим, что если  $\mathbb{T}$  связно, то  $\mathbb{T}_2 = \emptyset$  и, следовательно,  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$ .

Рассмотрим случай дискретного  $\mathbb{T}$  и покажем, что и в этом случае также  $\mathbb{T}_2 = \emptyset$ . Допустим, что  $\mathbb{T}_2 \neq \emptyset$  и положим  $t_0 = \inf \mathbb{T}_2$ . Очевидно,  $t_0 > 1$ ,  $t_0 \in \mathbb{T}_2$  и  $t_0 - 1 \in \mathbb{T}_1$ . Заметим, что для точки  $y := x(t_0 - 1)$  имеем  $\rho(y, M_1) < \varepsilon$  и, следовательно,

$$(4.1.192) \quad \rho(y, M_1) < d/2.$$

С другой стороны

$$(4.1.193) \quad \rho(y, M_1) \geq \rho(M_1, M_2) - \rho(y, M_2) > d/2.$$

Неравенства (4.1.192) и (4.1.193) противоречивы. Таким образом наше допущение о том, что  $\mathbb{T}_2 \neq \emptyset$  не верно и, следовательно,  $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$ , то есть множество  $M_1$  орбитально устойчиво. Аналогично доказывается орбитальная устойчивость  $M_2$ , что и завершает доказательство первого утверждения.

Покажем теперь, что  $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$ . Для этого, очевидно, достаточно показать, что  $W^s(M) \subset W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$ . Пусть  $0 < \varepsilon < d/2$  и  $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ , где  $\delta_1(\varepsilon)$  ( $\delta_2(\varepsilon)$ ) выбраны из условия орбитальной устойчивости  $M$  ( $M_1$ ,  $M_2$ ). Тогда для любой точки  $x \in W^s(M)$  найдется  $t_0 \geq 0$  такое, что  $\rho(xt_0, M) < \delta(\varepsilon)$ . Имеет место одно из двух условий: 1.  $\rho(xt_0, M_1) < \delta(\varepsilon)$  или 2.  $\rho(xt_0, M_2) < \delta(\varepsilon)$ . Если имеет место 1., то  $\rho(xt, M_1) < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0$ ,  $\omega_x \subseteq B(M_1, \varepsilon)$  и  $\omega_x \cap M_2 = \emptyset$ , то есть  $\omega_x \subseteq M_1$  и  $x \in W^s(M_1)$ . Если имеет место 2., то  $\rho(xt, M_2) < \varepsilon$  при всех  $t \geq t_0$ ,  $\omega_x \subseteq B(M_2, \varepsilon)$  и  $\omega_x \cap M_1 = \emptyset$ , то есть  $\omega_x \subseteq M_2$  и  $x \in W^s(M_2)$ .

Установим, что имеет место третье утверждение. Для этого достаточно показать, что каждое из множеств  $M_1$  и  $M_2$  является притягивающим. Так как  $M$  асимптотически устойчиво, то существует число  $\gamma > 0$  такое, что  $B(M, \gamma) \subset W^s(M)$ ,  $B(M, \gamma) = B(M_1, \gamma) \sqcup B(M_2, \gamma)$  и  $\gamma < d/2$ , где  $d = \rho(M_1, M_2) > 0$ . Для числа  $\gamma$  выберем  $\delta = \delta(M_1, \gamma) > 0$  ( $\delta = \delta(M_2, \gamma) > 0$ )

из условия орбитальной устойчивости  $M_1$  ( $M_2$ ). Тогда, если  $x \in B(M_1, \delta)$  ( $x \in B(M_2, \delta)$ ), то  $xt \in B(M_1, \gamma)$  ( $xt \in B(M_2, \gamma)$ ) для всех  $t \geq 0$  и, следовательно,  $\omega_x \subseteq B(M_1, \gamma)$  ( $\omega_x \subseteq B(M_2, \gamma)$ ), то есть  $x \in W^s(M_1)$  ( $x \in W^s(M_2)$ ). Таким образом  $B(M_1, \delta) \subseteq W^s(M_1)$  ( $B(M_2, \delta) \subseteq W^s(M_2)$ ). Лемма полностью доказана.

**Теорема 4.1.63.** Пусть  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  – компактно диссипативная динамическая система и  $J$  – ее центр Левинсона. Если пространство  $X$  неразложимо, то  $J$  также неразложимо.

*Доказательство.* Покажем, что если  $X$  неразложимо, то и  $J$  обладает этим свойством. Допустим, что это не так, тогда существуют непустые компактные полуинвариантные подмножества  $J_1, J_2 \subseteq J$  такие, что  $J = J_1 \sqcup J_2$ . Так как  $J$  асимптотически устойчиво, то согласно лемме 39 этим же свойством обладает и каждое из множеств  $J_1$  и  $J_2$ ,  $X = W^s(J) = W^s(J_1) \cup W^s(J_2)$  и кроме того, согласно леммам ?? и 39, каждое из множеств  $W^s(J_1)$  и  $W^s(J_2)$  открыто. Из леммы 37 следует, что  $W^s(J_1) \cap W^s(J_2) = \emptyset$ . Последнее противоречит неразложимости  $J$ .

**Лемма 40.** Пусть  $M$  – непустое компактное полуинвариантное притягивающее подмножество  $X$ . Если  $M$  неразложимо и  $W^s(M)$  замкнуто, то и  $W^s(M)$  неразложимо.

*Доказательство.* Предположим, что условие леммы выполнено, но  $W^s(M)$  разложимо. Тогда  $W^s(M)$  можно представить в виде дизъюнктного объединения двух своих замкнутых полуинвариантных подмножеств  $A_1$  и  $A_2$ . Ясно, что  $M \subseteq A_1 \cup A_2$ . Далее заметим, что для любой точки  $x \in A_1$   $\emptyset \neq \omega_x \subseteq M \cap A_1$  и для любой точки  $y \in A_2$   $\emptyset \neq \omega_y \subseteq M \cap A_2$  и, следовательно,  $M_i = M \cap A_i \neq \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ) и  $M_1 \cup M_2$ . Последнее противоречит неразложимости  $M$ .

**Следствие 27.** Если  $M \in C(X)$  – притягивающее и связное множество, то  $W^s(M)$  связно.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из лемм 38 и 40.

**Следствие 28.** Пусть  $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$  – компактно диссипативная динамическая система и  $J$  – ее центр Левинсона. Множество  $J$  является связным тогда и только тогда, когда множество  $X$  связно.

*Доказательство.* Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4.1.63, леммы 38 и следствия 27.

**Замечание 4.1.20.** Различные варианты этого утверждения содержатся в работах [13],[54],[88],[170] (см. также ссылки в них).

**Следствие 29.** Для компактно диссипативной динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$  из неразложимости ее центра Левинсона следует неразложимость пространства  $X$ .



**Теорема 4.1.64.** Пусть  $(X, T, \pi)$  – компактно диссипативная динамическая система и  $J$  – еџ центр Левинсона. Множество  $J$  является неразложимым тогда и только тогда, когда пространство  $X$  неразложимо.

*Доказательство.* Это утверждение вытекает из теоремы 4.1.63 и следствия 27.

**Лемма 41.** Пусть  $M \in C(X)$  – асимптотически устойчивое множество. Если  $W^s(M)$  неразложимо, то и  $M$  неразложимо.

*Доказательство.* Допустим противное, то есть компактное множество  $M$  асимптотически устойчиво и  $W^s(M)$  неразложимо, но  $M$  разложимо. Тогда существуют непустые компактные полуинвариантные подмножества  $M_1$  и  $M_2$  множества  $M$  такие, что  $M = M_1 \sqcup M_2$ . В силу леммы 37  $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) = \emptyset$ . Так как  $M$  асимптотически устойчиво, то согласно лемме 39 этим же свойством обладает каждое из множеств  $M_1$  и  $M_2$  и  $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$ . Множества  $W^s(M_1)$  и  $W^s(M_2)$  полуинвариантны и согласно лемме 39 каждое из множеств  $W^s(M_1)$  и  $W^s(M_2)$  открыто, что противоречит неразложимости  $W^s(M)$ .

**Следствие 30.** Пусть  $M \in C(X)$  – асимптотически устойчивое множество. Множество  $M$  является связным тогда и только тогда, когда множество  $W^s(M)$  связно.

**Теорема 4.1.65.** Пусть  $X$  локально связно. Если  $M \in C(X)$  – непустое полуинвариантное равномерно притягивающее множество, то  $M$  имеет конечное число компонент связности.

*Доказательство.* Множество  $W^s(M)$  открыто. Так как пространство  $X$  локально связно, то  $W^s(M)$  также локально связно. Покроем  $M$  конечным числом связных открытых множеств  $H_1, H_2, \dots, H_m$ , удовлетворяющих условию  $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m \subset W^s(M)$ . Пусть  $V_1, V_2, \dots, V_k$  – компоненты связности открытого множества  $H$ . Тогда множества  $V_1, V_2, \dots, V_k$  попарно не пересекаются и содержатся в  $W^s(M)$ . Обозначим  $M_i := M \cap V_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Заметим, что  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ , множества  $M_1, M_2, \dots, M_k$  не пересекаются и  $W^s(M_1), W^s(M_2), \dots, W^s(M_k)$  также попарно не пересекаются.

Если  $T = \mathbb{R}_+$ , то каждое множество  $M_i$  замкнуто, полуинвариантно и согласно лемме 39 каждое из множеств  $M_i$  асимптотически устойчиво,  $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2) \cup \dots \cup W^s(M_k)$  и  $V_i \subset W^s(M_i)$ . Каждое из множеств  $M_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) полуинвариантно и открыто. Докажем связность множеств  $M_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Предположим противное, то есть допустим, что  $M_i$  можно представить в виде объединения двух замкнутых непустых непересекающихся полуинвариантных множеств  $M'_i$  и  $M''_i$  в  $V_i$ . Согласно лемме 37  $W^s(M'_i) \cap W^s(M''_i) = \emptyset$ . Заметим, что множества  $M'_i$  и  $M''_i$  асимптотически устойчивы и  $W^s(M_i) = W^s(M'_i) \cup W^s(M''_i)$ . Множества

$M'_i$  и  $M''_i$  открыты и полуинвариантны. Последнее противоречит связности  $V_i$ .

Пусть теперь  $(X, f)$  – каскад. Так как  $M$  – равномерно притягивающее множество, то для достаточно большого номера  $m$  имеем  $f^m(H) \subset H$ . Тогда  $f^m(V_i) \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ . В силу связности множеств  $V_1, V_2, \dots, V_k$  и непрерывности  $f$  множества  $f^m(V_i)$   $i = \overline{1, k}$  связны и, следовательно, для каждого номера  $i$  существует единственный номер  $j$  такой, что  $f^m(V_i) \subset V_j$ . Пусть, как и выше,  $M_i = M \cap V_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Тогда  $f^m(M_i) \subseteq f^m(M) \cap f^m(V_i) \subseteq M \cap V_j = M_j$ . Так как множество  $M$  полуинвариантно, то  $f^m(M) \subseteq M$  и, следовательно,  $f^m(M_i) \subseteq M_j$ . Таким образом, отображение  $f^m$  осуществляет перестановку множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$ . Следовательно, существует такой номер  $n$ , что  $f^n(M_i) \subset M_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ), то есть каждое из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$  является полуинвариантным относительно отображения  $f^n$ . Тогда согласно лемме 39 каждое из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$  является асимптотически устойчивым относительно каскада  $(X, f^n)$  и  $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2) \cup \dots \cup W^s(M_k)$ . Заметим, что  $f^n(V_i) \subseteq V_i$  и  $V_i \subset W^s(M_i)$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Далее, повторяя те же рассуждения, что и в случае  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ , получим связность множества  $M_i$ . Теорема полностью доказана.

**Теорема 4.1.66.** *Пусть  $(X, \mathbb{Z}_+, f)$  – локально диссипативная динамическая система и  $J$  – ее центр Левинсона. Если пространство  $X$  связно и локально связно, то  $J$  связно.*

*Доказательство.* Если пространство  $X$  связно и локально связно, то согласно теоремам 1.6.14 и 4.1.65 центр Левинсона каскада  $(X, \mathbb{Z}_+, f)$  состоит из конечного числа компонент связности  $J_1, J_2, \dots, J_k$ . Как было установлено при доказательстве теоремы 4.1.65, существует натуральное число  $n$  такое, что  $f^n(J_i) \subseteq J_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Положим  $P := f^n$  и рассмотрим каскад  $(X, P)$ , порожденный положительными степенями  $P$ . Заметим, что каскад  $(X, P)$  компактно диссипативен и удовлетворяет условию:  $J = J_1 \sqcup J_2 \sqcup \dots \sqcup J_k$ . Кроме этого  $P(J_i) \subseteq J_i$  ( $i \in \overline{1, k}$ ). Таким образом, центр Левинсона  $\tilde{J}$  каскада  $(X, P)$  является разложимым, что противоречит теореме 4.1.63, так как  $X$  связно, следовательно, неразложимо. Теорема доказана.

Будем говорить, что метрическое пространство  $X$  обладает свойством  $(S)$ , если для любого компакта  $K \subseteq X$  существует связный компакт  $I \subseteq X$  такой, что  $K \subseteq I$ .

**Замечание 4.1.21.** *а) Если пространство  $X$  обладает свойством  $(S)$ , то оно связно.*

*б) Можно построить примеры связных пространств, не обладающих свойством  $(S)$ .*

*в) Всякое линейное метрическое пространство обладает свойством  $(S)$ . Действительно, если  $K \subseteq X$  – компакт, то  $L(K) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x, y \in K, 0 \leq \lambda \leq 1\}$  – связный компакт и  $K \subseteq L(K)$ .*

**Теорема 4.1.67.** *Если  $(X, \mathbb{Z}_+, f)$  - компактно диссипативная динамическая система,  $J$  - ец центр Левинсона и пространство  $X$  обладает свойством  $(S)$ , то множество  $J$  связно.*

*Доказательство.* Пусть  $X$  обладает свойством  $(S)$ . Допустим, что  $J$  не является связным. Тогда существуют открытые подмножества  $U_1$  и  $U_2$ , что  $J \subset U_1 \cup U_2$ ,  $J \cap U_i \neq \emptyset$  ( $i \in \overline{1, 2}$ ) и  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Пусть  $I$  - некоторый связный компакт, содержащий  $J$ . Тогда  $f(t, I)$  является компактным и связным для любого  $t \in \mathbb{Z}_+$ . Так как  $J \subset I$  и  $f(t, J) = J$  ( $t \in \mathbb{Z}_+$ ), то  $J \subset f(t, I)$  и, следовательно,  $f(t, I) \cap U_i \neq \emptyset$  ( $i = \overline{1, 2}$ ,  $t \in \mathbb{Z}_+$ ). Пусть  $t_n \rightarrow +\infty$ . В силу связности  $f(t_n, I)$  всегда существует  $x_n \in f(t_n, I)$  такой, что  $x_n \notin U_1 \cup U_2$ . Так как система  $(X, \mathbb{Z}_+, f)$  компактно диссипативна, то последовательность  $\{x_n\}$  можно считать сходящейся. Пусть  $x_n \rightarrow x$  при  $t_n \rightarrow +\infty$ . Поскольку, с одной стороны,  $x \notin U_1 \cup U_2$  и, с другой стороны,  $x \in J \subseteq U_1 \cup U_2$ , то получено противоречие, которое и доказывает теорему.

**СЛЕДСТВИЕ 31.** *Пусть  $X$  - полное линейное метрическое пространство. Центр Левинсона компактно диссипативного каскада  $(X, \mathbb{Z}_+, f)$  является связным множеством.*

**Замечание 4.1.22.** *а) В случае, когда  $X$  - банахово пространство, следствие 31 содержится в работе [187].*

*б) Существуют примеры компактно диссипативной динамической системы  $(X, \mathbb{Z}_+, f)$  с несвязным пространством  $X$  и связным центром Левинсона.*

## 4.2. Цепно рекуррентные движения

Пусть  $\Sigma \subseteq X$  компактное инвариантное множество,  $\Sigma, \varepsilon > 0$  и  $t > 0$ . Набор точек  $\{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = y; t_0, t_1, \dots, t_k\}$  точек  $x_i \in \Sigma$  и чисел  $t_i \in \mathbb{T}$  такой, что  $t_i \geq t$  и  $\rho(x_i t_i, x_{i+1}) < \varepsilon$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ) называется  $(\varepsilon, t, \pi)$ -цепью, соединяющей  $x$  и  $y$ . Через  $P(\Sigma)$  обозначают множество  $\{(x, y) : x, y \in \Sigma, \forall \varepsilon > 0 \forall t > 0 \exists (\varepsilon, t, \pi)\text{-цепь от } x \text{ к } y\}$ . Отношение  $P(\Sigma)$  замкнуто, инвариантно и транзитивно [17]. Точку  $x \in \Sigma$  называют цепно рекуррентной, если  $(x, x) \in P(\Sigma)$ . Положим  $\mathcal{R}(\Sigma) = \{x \in \Sigma : (x, x) \in P(\Sigma)\}$ . Введем на  $\mathcal{R}(\Sigma)$  отношение  $\sim$  по следующему правилу:  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда  $(x, y) \in P(\Sigma)$  и  $(y, x) \in P(\Sigma)$ . Легко проверить, что введенное отношение  $\sim$  на  $\mathcal{R}(\Sigma)$  является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает его на классы эквивалентности  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$  т.е.  $\mathcal{R}(\Sigma) = \sqcup \{\mathcal{R}_\lambda \in \mathcal{L}\}$ . Согласно предложению 2.6 из [17] составляющие классы, определенного выше разбиения множества  $\mathcal{R}(\Sigma)$  являются замкнутыми и инвариантными множествами.

**Лемма 42.** *Если компактное инвариантное множество  $\Sigma$  из  $X$  содержит лишь конечное число минимальных множеств, то отношение  $\sim$  разбивает множество  $\mathcal{R}(\Sigma)$  на конечное число различных классов эквивалентности.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{R}(\Sigma) = \sqcup \{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ . Так как  $\mathcal{R}_\lambda \subseteq \Sigma$  замкнуты и инвариантны, а  $\Sigma$  компактно, то в  $\mathcal{R}_\lambda$  согласно теореме Биркгофа содержится по крайней мере одно минимальное множество. Следовательно, число различных классов эквивалентности не превосходит числа минимальных множеств. Лемма доказана.

Ниже мы укажем условие, когда число классов эквивалентности  $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$  конечно и в том случае, когда в  $\Sigma$  содержится бесконечное число минимальных множеств.

Следуя [1] в системе  $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k\}$  введем отношение частичного порядка:  $\mathcal{R}_i < \mathcal{R}_j$ , если существуют  $i_1, i_2, \dots, i_r$  такие что  $i_1 = i, i_r = j$  и  $W^s(\mathcal{R}_{i_p}) \cap W^u(\mathcal{R}_{i_{p+1}}) \neq \emptyset$  при всех  $p = 1, 2, \dots, r-1$ .

Упорядоченный набор из  $r$  ( $r \geq 2$ ) различных индексов  $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$  и удовлетворяющих условию  $\mathcal{R}_{i_1} < \mathcal{R}_{i_2} < \dots < \mathcal{R}_{i_r} < \mathcal{R}_{i_1}$  называют  $r$ -циклом в наборе  $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k\}$ . Под 1-циклом понимают такой индекс  $i$ , что  $W^s(\mathcal{R}_i) \cap W^u(\mathcal{R}_i) \setminus \mathcal{R}_i \neq \emptyset$ .

Отметим, что введенное выше понятие частичного порядка является незначительной модификацией соответствующего понятия из [17, с.61].

Следуя [1],[70],[75] набор точек  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$  (или  $K := H(x_1) \cup H(x_2) \cup \dots \cup H(x_n)$ ) назовем обобщенным гомоклиническим контуром, если  $\omega_{x_i} \cap \alpha_{x_{i+1}} \neq \emptyset$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $x_{n+1} = x_1$ .

**Лемма 43.** *Пусть  $\Sigma \subseteq X$  – компактное инвариантное множество и  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – обобщенный гомоклинический контур. Тогда  $(x_i, x_j) \in P(\Sigma)$  при любых  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .*

*Доказательство.* Пусть  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Будем считать для определенности, что  $i \leq j$  и  $0 \leq p = j - i \leq n$ . Покажем, что  $(x_i, x_j) \in P(\Sigma)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $t > 0$ . Так как  $\omega_{x_k} \cap \alpha_{x_{k+1}} \neq \emptyset$  при всех  $k = i+1, \dots, j-1$ , то для чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $t > 0$  и точки  $x_k$  ( $k = i, i+1, \dots, j-2$ ) найдутся  $t'_k > t$ ,  $t''_k < -t$  и  $p_k \in \omega_{x_k} \cap \alpha_{x_k}$  такие, что  $\rho(x_k t'_k, p_k) < \frac{\varepsilon}{3}$  и  $\rho(x_k t''_k, p_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Положим  $\bar{x}_0 := x_i, \bar{x}_1 := x_{i+1} t'_{i+1}, \dots, \bar{x}_{p-1} := x_j t''_j, \bar{x}_p := x_j; \bar{t}_0 := t'_i, \bar{t}_1 := t'_{i+1} - t''_{i+1}, \dots, \bar{t}_{p-1} := -t''_j$ . Ясно, что  $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p; \bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{p-1}\}$  является  $(\varepsilon, t, \pi)$ -цепью, соединяющей точки  $x_i$  и  $x_j$ . Лемма доказана.

В леммах 44-46 мы будем предполагать, что  $\mathcal{R}(\Sigma)$  состоит из конечного числа различных классов эквивалентности  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k$  т.е.  $\mathcal{R}(\Sigma) = \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{R}_k$ . Установим некоторые свойства множеств  $\mathcal{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

**Лемма 44.** *В наборе  $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов.*

*Доказательство.* Допустим противное, т.е. существует  $r \geq 1$  и  $i_1, i_2, \dots, i_r$  такие, что  $\mathcal{R}_{i_1} < \mathcal{R}_{i_2} < \dots < \mathcal{R}_{i_r} < \mathcal{R}_{i_1}$ . Рассуждая также

как и в лемме 43, можно убедиться, что множество  $M := \mathcal{R}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{R}_{i_r}$  принадлежит одному классу эквивалентности и, следовательно,  $r = 1$ . Покажем, что 1-циклы в наборе  $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k\}$  также отсутствуют. Действительно, если допустить, что существуют  $1 \leq i \leq r$  и точкам  $x$  из  $(W^s(\mathcal{R}_i) \cap W^u(\mathcal{R}_i)) \setminus \mathcal{R}_i$ , то  $H(x_0) \cup \mathcal{R}_i \subseteq (\Sigma)$ . Причем  $H(x_0) \cup \mathcal{R}_i$  принадлежит одному классу эквивалентности и, следовательно,  $H(x_0) \cup \mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_i$ . Последнее противоречит выбору  $x_0$ . Лемма доказана.

**Лемма 45.** *Множества  $\mathcal{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) локально максимальны в  $\Sigma$  т.е. для  $\mathcal{R}_i$  существует окрестность  $U_i$  множества  $\mathcal{R}_i$  в  $\Sigma$  такая, что  $\mathcal{R}_i$  есть максимальное замкнутое инвариантное множество в  $U_i$ .*

*Доказательство.* Так как  $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j \neq \emptyset$  для всех  $i \neq j$ , то существуют окрестности  $U_i$  множеств  $\mathcal{R}_i$  такие, что  $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Заметим, что в  $U_i$  множество  $\mathcal{R}_i$  максимально. Действительно, если допустить, что существует компактное инвариантное множество  $\Lambda_i \subset U_i$  такое, что  $\Lambda_i \not\subseteq \mathcal{R}_i$ , тогда  $\Lambda_i \setminus \mathcal{R}_i \neq \emptyset$ . Пусть  $x \in \Lambda_i \setminus \mathcal{R}_i$ . Так как  $\alpha_x$  и  $\omega_x$  цепно рекуррентны [17, с.33], то  $\alpha_x, \omega_x \subseteq \mathcal{R}_i$ , т.е. мы нашли  $x \in (W^s(\mathcal{R}_i) \cap W^u(\mathcal{R}_i)) \setminus \mathcal{R}_i$  и, следовательно,  $x \notin \mathcal{R}(\Sigma)$ . С другой стороны, рассуждая также, как и при доказательстве леммы 43, можно показать, что  $x$  цепно рекуррентна, т.е.  $x \in \mathcal{R}(\Sigma)$ . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**Лемма 46.** *Множества  $\mathcal{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) неразложимы.*

*Доказательство.* Допустим, что при некотором  $i$  множество  $\mathcal{R}_i$  представимо в виде объединения двух своих замкнутых, инвариантных подмножеств  $A_1$  и  $A_2$  т.е.  $\mathcal{R}_i = A_1 \sqcup A_2$ . Так, как  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  и  $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset$  при всех  $j \neq i$ , то существуют окрестности  $U_1$  и  $U_2$  множеств  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, такие что  $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$  и  $(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2) \cap \mathcal{R}_j = \emptyset$  при всех  $j \neq i$ . Пусть  $\varepsilon_0 > 0$  таково, что  $B(A_1, \varepsilon_0) \subset \bar{U}_1$  и  $B(A_2, \varepsilon_0) \subset \bar{U}_2$ . Возьмем произвольные точки  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$  и числа  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  и  $t > 0$ . Так как  $a_1, a_2 \in \mathcal{R}_i$ , то для чисел  $\varepsilon$  и  $t$  найдется  $(\varepsilon, t, \pi)$ -цепь  $\{a_1 = x_0, x_1, \dots, x_n = a_2; t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , соединяющая точки  $a_1$  и  $a_2$ . Согласно теореме 2.24 из [17] можно считать, что  $x_k \in \mathcal{R}_i$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). В силу выбора  $\varepsilon$  и инвариантности  $A_1$  имеем  $x_k \in A_1$  при всех  $k = 0, 1, \dots, n$  т.е.  $x_n = a_2 \in A_1$ . Последнее противоречит нашему допущению. Лемма доказана.

### 4.3. Спектральное разложение центра Левинсона неавтономной диссипативной динамической системы

Пусть  $((X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h)$  - групповая неавтономная динамическая система, слои  $X_y := \{x \in X : h(x) = y\}$  которой гомеоморфны некоторому фиксированному  $n$ -мерному многообразию (например  $E^n$ ) и  $p \in X_y$ . Следуя [17, с.213], обозначим через  $W_\delta^s(p) := \{x \in X_y : \rho(xt, pt) \leq \delta, t \geq 0\}$  и  $W_\delta^u(p) := \{x \in X_y : \rho(xt, pt) \leq \delta, t \leq 0\}$  ( $\delta > 0$ ).

Будем говорить, что компактное инвариантное множество  $\Lambda \subseteq X$  гиперболично (неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  имеет гиперболическую структуру на  $\Lambda$ ), если существуют положительные числа  $N, \nu, \delta$  и  $\gamma$  такие, что

- (Н1).  $W_\delta^s(p) \cap W_\delta^u(p) = \{p\}$  при всех  $p \in \Lambda$ ,  $W_\delta^s(p)$  и  $W_\delta^u(p)$  - подмногообразия из  $X_y$  ( $y = h(p)$ ), гомеоморфные замкнутому диску в  $\mathbb{R}^k$  и  $\mathbb{R}^{n-k}$  соответственно. При этом, если  $\rho(p, q) \leq \gamma$  ( $p, q \in X_y$ ), то  $W_\delta^s(p) \cap W_\delta^u(p) \neq \emptyset$ ;
- (Н2).  $\pi^t W_\delta^s(p) \subseteq W_\delta^s(\pi^t p)$  при всех  $t \geq 0$  и  $\pi^t W_\delta^u(p) \supseteq W_\delta^u(\pi^t p)$  при всех  $t \leq 0$  и при каждом  $p \in \Lambda$ ;
- (Н3). многообразия  $W_\delta^s(p)$  и  $W_\delta^u(p)$  непрерывно зависят от точки  $p \in \Lambda$  в метрике Хаусдорфа;
- (Н4). (a)  $\rho(p_1 t, p_2 t) \leq N \exp(-\nu t) \rho(p_1, p_2)$  при всех  $p_1, p_2 \in W_\delta^s(p)$  и  $t \geq 0$ ;  
(b)  $\rho(p_1 t, p_2 t) \leq N \exp(\nu t) \rho(p_1, p_2)$  при всех  $p_1, p_2 \in W_\delta^u(p)$  и  $t \leq 0$ .

**Замечание 4.3.23.** *а. Если  $\Lambda \subseteq X$  является гиперболическим в общепринятом смысле [17, 70], то, при некоторых дополнительных условиях гладкости, множество  $\Lambda$  будет гиперболическим и в смысле вышеприведенного определения. Обратное, вообще говоря, неверно.*

*б. Для автономных динамических систем с дискретным временем близкое понятие (аксиома  $A^\#$ ) содержится в работе [1].*

Обозначим через  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  замыкание множества всех рекуррентных точек множества  $\Sigma$ . Имеет место следующая

**Теорема 4.3.68.** *Пусть  $Y$  - компактное минимальное множество,  $\Sigma$  - компактное инвариантное множество из  $X$  и выполнено одно из следующих двух условий:*

- а. число минимальных множеств в  $\Sigma$  конечно;*
- б. если в  $\Sigma$  содержится бесконечное число минимальных множеств, то на множестве  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ , кроме, быть может, конечного числа изолированных минимальных множеств, неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  имеет гиперболическую структуру.*

*Тогда отношение  $\sim$  разбивает  $\mathfrak{R}(\Sigma)$  на конечное число различных классов эквивалентности.*

*Доказательство.* Если в  $\Sigma$  содержится лишь конечное число минимальных множеств, то утверждение теоремы совпадает с леммой 42.

Пусть выполнено условие б. теоремы. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существует счетное семейство различных классов эквивалентности  $\{\mathfrak{R}_k : k = 1, 2, \dots\}$ . Так как  $\mathfrak{R}_k$  замкнуты, инвариантны и  $\Sigma$  компактно, то в каждом  $\mathfrak{R}_k$  найдется по крайней мере по одному минимальному множеству  $M_k \subseteq \mathfrak{R}_k$ . Так как  $Y$  минимально, то  $h(M_k) =$

$Y$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ . Пусть  $y \in Y$  и  $p_k \in M_k \cap X_y$ . В силу компактности  $\Sigma$  последовательность  $\{p_k\}$  можно считать сходящейся. Положим  $p := \lim_{k \rightarrow +\infty} p_k$  и заметим, что  $p \in \Lambda := \overline{\cup\{M_k : k = 1, 2, \dots\}}$ . Не умаляя общности рассуждений множество  $\Lambda$  можно считать гиперболическим. Пусть  $\gamma > 0$  – число, фигурирующее в **Н1**. для множества  $\Lambda$ . Последовательность  $\{p_k\} \subseteq \Lambda$  является сходящейся, поэтому, начиная с некоторого  $k_0$ , многообразия  $W_\delta^s(p_{k_1})$  и  $W_\delta^u(p_{k_2})$  имеют непустое пересечение при всех  $k_1, k_2 \geq k_0$ . Пусть теперь  $k_1 \neq k_2$  и  $k_1, k_2 \geq k_0$ . Выберем  $x_1 \in W_\delta^s(p_{k_1}) \cap W_\delta^u(p_{k_2})$ ,  $x_2 \in W_\delta^u(p_{k_1}) \cap W_\delta^s(p_{k_2})$  и рассмотрим гомоклинический контур  $K = H(x_1) \cup H(x_2)$ . Согласно следствию 2.19 [17] и тому, что на  $\omega$  ( $\alpha$ ) предельном множестве любые две точки эквивалентны в смысле отношения  $\sim$ , получаем эквивалентность любых двух точек гомоклинического контура  $K$ , т.е.  $K$  принадлежит одному классу эквивалентности. Таким образом, начиная с некоторого  $k_0$ , точки  $p_{k_1}$  и  $p_{k_2}$  эквивалентны при всех  $k_1, k_2 \geq k_0$ . Последнее противоречит тому, что точки  $\{p_k\}$  выбраны из различных классов эквивалентности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Теорема 4.3.69.** *Если выполнены условия теоремы 4.3.68 на центре Левинсона  $J$  системы  $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ , то:*

- (1) *отношение  $\sim$  разбивает множество  $\mathfrak{R}(J)$  на конечное число различных классов эквивалентности, т.е.  $\mathfrak{R}(J) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ ;*
- (2) *множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе  $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов;*
- (3)  *$J = \cup\{W^u(\mathfrak{R}_i) : i = \overline{1, k}\}$ , где*

$$W^u(\mathfrak{R}_i) := \{x \in X : \lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(xt, \mathfrak{R}_i) = 0\} \quad (i = \overline{1, k}).$$

*Доказательство.* Первые два утверждения теоремы 4.3.69 непосредственно вытекают из лемм 44-46 и теоремы 4.3.68. Докажем третье утверждение. Пусть  $x \in W^u(\mathfrak{R}_i)$  ( $i = \overline{1, k}$ ), тогда в силу компактной диссипативности  $(X, \mathbb{S}, \pi)$  множество  $H(x)$  компактно и, следовательно,  $x \in J$ .

Обратно. Пусть  $x \in J$ . В силу компактности и инвариантности  $J$  множества  $\alpha_x$  и  $\omega_x$  непусты, компактны, неразложимы и цепно рекуррентны [17]. Так как в условиях теоремы 4.3.68  $\mathfrak{R}(J) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$  и множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) не пересекаются, замкнуты и инвариантны, то существуют  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  такие, что  $\alpha_x \subseteq \mathfrak{R}_i$  и  $\omega_x \subseteq \mathfrak{R}_j$ . Следовательно,  $x \in W^u(\mathfrak{R}_j)$ . Теорема доказана.

**Замечание 4.3.24.** *Теоремы 4.3.68 и 4.3.69 остаются справедливыми и в том случае, если в ней условие минимальности  $Y$  заменить следующим :  $Y$  содержит лишь конечное число минимальных множеств.*

#### 4.4. Одномерные диссипативные динамические системы с гиперболическим центром

Пусть  $\Lambda \subseteq X$  – гиперболическое множество неавтономной динамической системы  $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ .

**Замечание 4.4.25.** *а. Если  $p \in \Lambda$  таково, что  $k = n$  ( $k = 0$ ), то множество  $H(p)$  экспоненциально устойчиво, или просто э.у. на  $\mathbb{S}_+$  ( $\mathbb{S}_-$ ).*

*б. При  $n = 1$  гиперболическое множество  $H(p)$  либо э.у. на  $\mathbb{S}_+$  либо на  $\mathbb{S}_-$ .*

В дальнейшем в этом параграфе предполагается, что  $Y$  – компактное минимальное множество и  $n = 1$ .

**Лемма 47.** *Если компактное минимальное множество  $M$  из  $X$  гиперболично, то  $h|_M : M \rightarrow Y$  есть гомеоморфизм (или, что то же самое,  $M_y := M \cap X_y$  состоит ровно из одной точки при любом  $y \in Y$ ).*

*Доказательство.* Пусть  $M \subseteq X$  – компактное минимальное множество. Если  $M$  гиперболично, то согласно замечанию 4.4.25 б. можно считать, что  $M$  э.у. на  $\mathbb{S}_+$  и, следовательно,  $M$  равномерно устойчиво в положительном направлении, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\gamma(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(m_1, m_2) < \gamma$  ( $m_1, m_2 \in M$  и  $h(m_1) = h(m_2)$ ) влечет неравенство  $\rho(m_1 t, m_2 t) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . Для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на теорему 3 из [29, с.110].

**Лемма 48.** *Если  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  гиперболично, то в  $\Sigma$  содержится конечное число минимальных множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$  и, следовательно,  $\mathfrak{M}(\Sigma) = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \dots \sqcup M_k$ .*

*Доказательство.* Допустим противное, т.е. существует счетное семейство  $\{M_k : k = 1, 2, \dots\}$  различных минимальных множеств в  $\Sigma$ . Пусть  $y \in Y$  и  $p_k \in M_k \cap X_y$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Так, как  $p_k \in \mathfrak{M}(\Sigma)$ , то  $\{p_k\}$  можно считать сходящейся. Пусть  $p_k \rightarrow p$ . Заметим, что  $p \in \mathfrak{M}(\Sigma)$ . Так как  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  гиперболично, то можно считать (см. замечание 4.4.25 б.), что  $H(p)$  э.у. на  $\mathbb{S}_+$ . Поэтому существует  $k_0 \in \mathbb{N}$ , что  $\rho(p_{k_1} t, p_{k_2} t) \leq N \exp(-\nu t) \rho(p_{k_1}, p_{k_2})$  при всех  $k_1, k_2 \geq k_0$  и  $t \geq 0$ . Из последнего неравенства следует, что  $\rho(p_{k_1} t, p_{k_2} t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  при всех  $k_1, k_2 \geq k_0$ . Но это противоречит совместной рекуррентности  $p_{k_1}$  и  $p_{k_2}$  (такowymi они являются согласно лемме 47). Полученное противоречие доказывает лемму 48.

**Лемма 49.** *В условиях леммы 48 для любой точки  $x \in \Sigma$  существуют (и определяются однозначно) рекуррентные точки  $p_1$  и  $p_2$  ( $h(p_1) = h(p_2) = h(x)$ ) такие, что*

$$(4.4.194) \quad a. \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, p_1 t) = 0 \quad \text{и} \quad b. \lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(xt, p_2 t) = 0.$$



*Доказательство.* Пусть  $x \in \Sigma$ ,  $\omega$ -и  $\alpha$ -предельные множества  $\omega_x$  и  $\alpha_x$  непусты, компактны и каждое из них содержит хотя бы по одному минимальному множеству  $M_1$  и  $M_2$  соответственно ( $M_1$  и  $M_2$  не обязательно различны). Так как  $Y$  минимально, то  $h(M_1) = h(M_2) = Y$  и в силу гиперболичности  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  множества  $M_{1y}$  и  $M_{2y}$  состоят ровно из одной точки, каково бы ни было  $y \in Y$ .

Пусть  $x$  нерекуррентна (в противном случае лемма очевидна) и  $M_{iy} = \{p_i\}$  ( $i = 1, 2$ ). Существуют  $t_{1n} \rightarrow +\infty$  и  $t_{2n} \rightarrow -\infty$  такие, что  $xt_{1n} \rightarrow p_1$  и  $xt_{2n} \rightarrow p_2$ . Согласно лемме 47  $p_it_{in} \rightarrow p_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $n \rightarrow +\infty$ . Откуда следует, что

$$(4.4.195) \quad \rho(xt_{in}, p_it_{in}) \rightarrow 0$$

а. Пусть  $M_1$  э.у. на  $\mathbb{S}_+$ . Тогда из (4.4.195) следует (4.4.194а). Покажем, что имеет место (4.4.194б). Действительно, если  $M_1$  э.у. на  $\mathbb{S}_+$ , то  $M_2$  э.у. на  $\mathbb{S}_+$ . Если допустить противное, то согласно (4.4.195)  $\rho(xt, p_2t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Из леммы 47 следует, что  $p_1 = p_2 = p$ . Пусть  $\varepsilon = \rho(x, p) > 0$  и  $\gamma(\varepsilon) > 0$  выбрано для  $\varepsilon$  из условия равномерной устойчивости  $H(p)$  на  $\mathbb{S}_+$ . Из (4.4.195) следует, что при достаточно больших  $n$  имеем

$$\rho(xt_{2n}, p_2t_{2n}) < \gamma(\varepsilon)$$

и, следовательно,  $\rho(x(t+t_{2n}), p_2(t+t_{2n})) < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . В частности,  $\rho(x, p) < \varepsilon$ , что противоречит выбору  $\varepsilon$ . Полученное противоречие доказывает э.у. на  $\mathbb{S}_-$  множества  $M_2$ . Из (4.4.195) следует равенство (4.4.194б).

б. Покажем, что множество  $M_1 \subseteq \omega_x$  не может быть э.у. на  $\mathbb{S}_-$ . Действительно, если допустить противное, то из (4.4.195) следует, что  $\rho(xt, p_1t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Значит,  $\alpha_x = M_1 \subseteq \omega_x$ . Таким образом,  $M_2 = M_1 = \alpha_x \subseteq \omega_x$ . Пусть  $p := p_1 = p_2 \in M_1 \cap X_y = M_2 \cap X_y$  и  $\varepsilon = \rho(x, p) > 0$ . Дальше, рассуждая так же, как и в конце предыдущего пункта, получаем противоречие, что и доказывает э.у. на  $\mathbb{S}_+$  минимального множества  $M_1 \subseteq \omega_x$ . Лемма доказана.

В условиях леммы 48 в  $\Sigma$  содержится лишь конечное число различных минимальных множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$  и  $\mathfrak{M}(\Sigma) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ . Пусть  $y \in Y$  и  $\{\gamma_i(y)\} = M_i \cap X_y$ . Будем считать, что  $M_1, M_2, \dots, M_k$  упорядочены таким образом, что  $\gamma_1(y) < \gamma_2(y) < \dots < \gamma_k(y)$ . Положим  $\mu_y := \inf \Sigma_y$  и  $\nu_y := \sup \Sigma_y$ . Очевидно,  $\mu_y, \nu_y \in \Sigma_y$ .

**Лемма 50.** *В условиях леммы 48 имеют место равенства  $\mu_y = \gamma_1(y)$  и  $\nu_y = \gamma_k(y)$  при всех  $y \in Y$ .*

*Доказательство.* Докажем, например, первое равенство (второе доказывается аналогично). Если допустить, что для некоторого  $y \in Y$   $\mu_y \neq \gamma_1(y)$ , то  $\mu_y < \gamma_1(y)$ . Согласно лемме 49 существуют рекуррентные точки  $p_1$  и  $p_2$  из  $\mathfrak{M}(\Sigma)$  такие, что имеют место равенства (4.4.194) а. и б. Покажем, что  $p_1, p_2 \leq \gamma_1(y)$ . Действительно, из (4.4.194) следует существование  $t_{1n} \rightarrow +\infty$  и  $t_{2n} \rightarrow -\infty$  таких, что  $\mu_y t_{1n} \rightarrow p_1$  и  $\mu_y t_{2n} \rightarrow p_2$ . Кроме того, согласно лемме 47,  $\gamma_i(y)t_{in} \rightarrow \gamma_i(y)$  ( $i = 1, 2$ ). Так как

$\mu_y < \gamma_1(y)$ , то  $\mu_y t_{1n} < \gamma_1(y) t_{1n}$  и, следовательно,  $p_1 \leq \gamma_1(y)$ . Аналогично  $p_2 \leq \gamma_1(y)$ . Таким образом,  $p_1 = p_2 = \gamma_1(y)$ . Так как  $H(\gamma_1(p)) = M_1$  гиперболично, то  $M_1$  з.у. на  $\mathbb{S}_+$  либо на  $\mathbb{S}_-$ . Далее рассуждая так же, как и в лемме 49, получаем противоречие. Лемма доказана.

**Теорема 4.4.70.** Пусть  $\Sigma \subseteq X$  – непустое компактное инвариантное множество и  $\mathfrak{M}(\Sigma) \subseteq \Sigma$  гиперболично. Тогда:

- (1) в  $\Sigma$  содержится лишь конечное число различных минимальных множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$  и  $\mathfrak{M}(\Sigma) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ ;
- (2) каждое минимальное множество  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) гомеоморфно  $Y$  и, в частности, если  $Y$  почти периодически ( $\tau$  – периодически), то  $M_i$  обладает тем же свойством;
- (3) какова бы ни была точка  $x \in \Sigma$  существуют такие точки  $p_1$  и  $p_2$  из  $\mathfrak{M}(\Sigma)$ , что имеют место соотношения (4.4.194);
- (4) если  $M_1, M_2, \dots, M_k$  упорядочены таким образом, что  $\gamma_i(y) < \gamma_j(y)$  при всех  $y \in Y$ , где  $\{\gamma_i(y)\} := M_i \cap X_y$ , тогда и только тогда, когда  $i < j$ , то  $\partial\Sigma = M_1 \cup M_k$ , где  $\partial\Sigma$  – граница  $\Sigma$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из лемм 47-50.

**Теорема 4.4.71.** Пусть неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$  компактно диссипативна. Если  $\mathfrak{M}(J)$  гиперболично, где  $J$  – центр Левинсона  $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ , то:

- (1) в  $J$  содержится лишь конечное число различных минимальных множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , каждое из которых гомеоморфно  $Y$  и  $\mathfrak{M}(J) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ ;
- (2) какова бы ни была точка  $x \in J$  существуют точки  $p_1$  и  $p_2$  из  $\mathfrak{M}(J)$  такие, что выполнены соотношения (4.4.194);
- (3) если  $x \notin J$ , то
  - (a)  $\rho(xt, \gamma_1(y)t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $x < \gamma_1(y)$ , где  $y = h(x)$ ;
  - (b)  $\rho(xt, \gamma_k(y)t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $x > \gamma_k(y)$ .
- (4)  $\partial J = M_1 \cup M_k$  и  $\partial J$  равномерно асимптотически устойчиво в положительном направлении (в частности,  $k$  нечетно).

*Доказательство.* Теорема 4.4.71 по существу вытекает из теоремы 4.4.70 и свойств Центра Левинсона.

**Замечание 4.4.26.** Хотя теоремы 4.4.70 и 4.4.71 доказаны для одномерных систем, на самом деле, мы всюду пользовались только следствием из одномерности (см. замечание 4.4.25 б.). Поэтому, если кроме гиперболичности  $\mathfrak{M}$  требовать, чтобы при каждом  $t \in \mathfrak{M}$  множества  $H(t)$  были з.у. либо на  $\mathbb{S}_+$  либо на  $\mathbb{S}_-$ , то эти утверждения справедливы и в случае  $n \geq 2$ . При этом, минимальные множества в теоремах 4.4.70 и 4.4.71, вообще говоря, не будут гомеоморфны  $Y$ , а будут лишь

конечнократными дистальными накрытиями  $Y$ , что также гарантирует их почти периодичность (периодичность), если  $Y$  почти периодически (периодично).

#### 4.5. Диссипативные каскады на гладких многообразиях

Пусть  $M$  – гладкое многообразие,  $U$  – его открытое подмножество,  $f : U \rightarrow f(U) \subseteq M$  – диффеоморфизм класса  $C^r$  ( $r \geq 1$ ),  $\Lambda \subset U$  – максимальное компактное инвариантное множество диффеоморфизма  $f$ . Предположим, что  $U$  является областью притяжения  $\Lambda$ , т.е.  $W^s(\Lambda) = U$ . В этом случае динамическая система, порожденная степенями  $f$ , является диссипативной и ее центр Левинсона  $J = \Lambda$ .

**Лемма 51.** Пусть  $x_0 \in U$ . Если  $\omega_{x_0}$  является компактным гиперболическим множеством диффеоморфизма  $f : U \rightarrow M$ , то каковы бы ни были  $x \in \omega_{x_0}$  и  $\delta > 0$  найдется  $p \in \text{Per}(f)$  такая, что  $\rho(x, p) < \delta$  и  $\Sigma_p \subseteq B(\omega_{x_0}, \delta)$ , где  $\text{Per}(f)$  – множество всех периодических точек  $f$ ,  $\Sigma_p$  – траектория точки  $p$ .

*Доказательство.* Пусть  $\delta > 0$ . Можно считать  $\delta$  настолько малым, что  $B(\omega_{x_0}, \delta) \subset \tilde{U}(\omega_{x_0})$  где  $\tilde{U}(\omega_{x_0})$  окрестность гиперболического множества  $\omega_{x_0}$ , фигурирующая в теореме Д.В.Аносова о семействах  $\varepsilon$ -траекторий [70, с.220]. Выберем в упомянутой теореме  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ ) соответствующее числу  $\frac{\delta}{2}$ . Тогда для  $\frac{\varepsilon}{2}$  найдется  $l > 0$  такое, что  $f^n x_0 \in B(\omega_{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$  при всех  $n \geq l$ . Если  $x \in \omega_{x_0}$ , то существует  $n_0 \geq l$  такое, что  $f^{n_0} x_0 \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ . Положим  $x_1 = f^{n_0} x_0$ . Найдется  $N > 0$  такое, что  $f^N x_1 \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ . Рассмотрим пространство  $X_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$  с дискретной топологией, гомеоморфизм сдвига  $\tau : X_N \rightarrow X_N$ ,  $\tau(k) = k + 1 \pmod{N}$ , и отображение  $\varphi : X_N \rightarrow M$ , определенное равенством  $\varphi(k) = f^k x_1$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ). Заметим, что  $\varphi : X_N \rightarrow B(\omega_{x_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \tilde{U}(\omega_{x_0})$ . Далее:  $P(\varphi \circ \tau, f \circ \varphi) := \sup_{0 \leq k \leq N-1} \rho(\varphi(\tau(k)), f(\varphi(k))) \leq \rho(x_1, f^N x_1)$ . Так как  $\rho(x_1, f^N x_1) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, f^N x_1) < \varepsilon$ , то  $P(\varphi \circ \tau, f \circ \varphi) < \varepsilon$ . Согласно теореме о семействах  $\varepsilon$ -траекторий найдется непрерывное отображение  $\psi : X_N \rightarrow \tilde{U}(\omega_{x_0})$  такое, что  $\psi \circ \tau = f \circ \psi$  и  $P(\varphi, \psi) < \frac{\delta}{2}$ . Для завершения доказательства леммы остается заметить, что  $\psi(0) \in \text{Per}(f)$ ,  $\rho(\psi(0), x) < \frac{\delta}{2}$  и  $\psi(k) \in B(\omega_{x_0}, \delta)$  при всех  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

**СЛЕДСТВИЕ 32.** Если  $\Sigma$  локально максимально и  $\omega_{x_0} \subseteq \Sigma$ , то, в условиях леммы 51, в  $\Sigma$  содержится по крайней мере одна периодическая точка  $f$ .

**СЛЕДСТВИЕ 33.** Пусть  $\Lambda$  – локально максимальное компактное инвариантное множество. Если  $\Sigma \subseteq \omega_{x_0} \subseteq \Lambda$  – компактное минимальное множество, не содержащее периодических траекторий, то в условиях леммы 51, в  $\Lambda$  имеется бесконечное число различных гиперболических периодических точек  $p_k \rightarrow p \in \Sigma \subseteq \omega_{x_0}$ , причем  $\Sigma_{p_k} \subseteq B(\omega_{x_0}, \varepsilon_k)$  и  $\varepsilon_k \downarrow 0$ .

Напомним, что множество  $M \subseteq X$  динамической системы  $(X, \mathbb{S}, \pi)$  называют квазиминимальным, если существует устойчивая по Пуассону точка  $p \in M$  такая, что  $M = H(p)$ .

**Теорема 4.5.72.** Пусть  $f : U \rightarrow M$  диффеоморфизм класса  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) и  $\Lambda$  – компактное инвариантное множество  $f$ . Если  $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$  гиперболично, то:

- (1) отношение  $\sim$  разбивает множество  $\mathfrak{R}(\Lambda)$  на конечное число классов эквивалентности т.е.  $\mathfrak{R}(\Lambda) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ ;
- (2) множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе  $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$  нет  $r$ -циклов, где  $r \geq 1$ .

*Доказательство.* Это утверждение вытекает из теоремы 4.3.68.

**СЛЕДСТВИЕ 34.** Пусть  $M$  – гладкое многообразие и  $f : M \rightarrow M$  – диффеоморфизм класса  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Если множество цепно рекуррентных точек  $\mathfrak{R}(f)$  диффеоморфизма  $f$  компактно и гиперболично, то:

- (1) отношение  $\sim$  разбивает  $\mathfrak{R}(f)$  на конечное число классов эквивалентности т.е.  $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ ;
- (2) множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) замкнуты, инвариантны, квазиминимальны, локально максимальны и в наборе  $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов;
- (3) если, кроме того, в  $M$  содержится бесконечное число минимальных множеств, то в  $M$  существует нетривиальное (отличное от периодической траектории) минимальное множество.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 4.5.72, теорем 7.5 (и его дискретного аналога) и 7.8 из [1] и леммы 6.4 из [70].

**Теорема 4.5.73.** Пусть диффеоморфизм  $f : U \rightarrow M$  диссипативен и  $J$  – его центр Левинсона. Если выполнено одно из следующих двух условий:

- a. в  $\Lambda$  содержится лишь конечное число минимальных множеств;
- b. в  $\Lambda$  содержится бесконечное число минимальных множеств и  $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$  гиперболично [70],

то:

- (1) отношение  $\sim$  разбивает множество цепно рекуррентных точек  $\mathfrak{R}(f)$  диффеоморфизма  $f$  на конечное число классов эквивалентности, т.е.  $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ ;
- (2) множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе  $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов;
- (3)  $J = \cup \{W^u(\mathfrak{R}_i) : i \in \overline{1, k}\}$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 4.3.69. Действительно, если множество  $\mathfrak{M}_0(\Lambda) \neq \emptyset$  и гиперболично, то из результатов [70] (теоремы 0.1, 5.4 и теорема 2 из 1-ого добавления) следует, что на множестве  $\mathfrak{M}(\Lambda)$ , кроме, быть может, конечного числа изолированных минимальных множеств, динамическая система, порожденная степенями  $f$ , имеет гиперболическую структуру в смысле нашего определения.

**Замечание 4.5.27.** *а. Теорема 4.5.73 является аналогом известной теоремы Смейла о спектральном разложении [70] для  $A$ -диффеоморфизмов.*

*б. Утверждение, аналогичное теореме 4.5.73, имеет место и для потоков.*

**Теорема 4.5.74.** *Пусть диффеоморфизм  $f : U \rightarrow M$  диссипативен и его центр Левинсона содержит бесконечное число минимальных множеств. Если множество  $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$  гиперболично, то имеют место утверждения 1.-3. теоремы 4.5.72. Кроме того, в  $\Lambda$  содержится бесконечное число гиперболических периодических траекторий.*

*Доказательство.* Согласно теореме 4.5.73 достаточно показать, что в  $\Lambda$  содержится бесконечное число различных гиперболических периодических траекторий. Обозначим через  $\tilde{U} \subset U$  окрестность множества  $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$  такую, что любое компактное, инвариантное относительно  $f$ , множество  $\Lambda' \subset \tilde{U}$  является гиперболическим. Согласно теореме 2 [70, с.224] такая окрестность существует. Согласно [49, с.52] метрическое пространство  $2^\Lambda$  компактно. Так как в  $\Lambda$  содержится бесконечное число минимальных множеств  $\{M_i\}$  и  $M_i \subseteq \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ , то можно считать, что  $M_i \subseteq \mathfrak{R}_1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). В силу компактности  $2^\Lambda$  последовательность  $\{M_i\}$  можно считать сходящейся в метрике Хаусдорфа. В частности, начиная с некоторого  $i_0$ , имеем  $M_i \subseteq \tilde{U}$  при  $i \geq i_0$ . В силу выбора  $\tilde{U}$  все минимальные множества  $M_i$  ( $i \geq i_0$ ) гиперболичны. Логически возможны следующие два случая:

а. все минимальные множества  $M_i$  ( $i \geq i_0$ ) периодичны и в этом случае теорема доказана.

б. среди минимальных множеств  $M_i$  ( $i \geq i_0$ ) есть минимальное множество  $M$ , которое не сводится к периодической траектории. Тогда согласно следствию 33 существует бесконечное число различных периодических точек  $p_k \rightarrow p \in M$ , причем  $\Sigma_{p_k} \subseteq B(M, \varepsilon_k)$  и  $\varepsilon_k \downarrow 0$ . Так как  $M_i \subseteq \mathfrak{R}_1$  ( $i \geq i_0$ ) и  $\mathfrak{R}_1$  замкнуто и локально максимально, то начиная с некоторого  $m_0$  имеем  $p_m \in \mathfrak{R}_1$ . Теорема доказана.

Напомним [1]-[2], что инвариантное множество  $\Lambda$  диффеоморфизма  $f : U \rightarrow M$  называется фактор-марковским, если существует ГМЦ (топологическая марковская цепь [1])  $T : \Omega_\Pi \rightarrow \Omega_\Pi$  и непрерывное отображение  $\varphi : \Omega_\Pi \rightarrow \Lambda$  такое, что  $\varphi \circ T = f \circ \varphi$ . Если  $\varphi$  является гомеоморфизмом, то  $\Lambda$  называется марковским.

**СЛЕДСТВИЕ 35.** *В условиях теоремы 4.5.74 в  $\mathfrak{X}$  существует локально максимальное гиперболическое марковское множество  $\Lambda \subseteq \mathfrak{X}$  и, в частности, в  $\mathfrak{X}$  содержится трансверсальная гомоклиническая траектория.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 4.5.74, а также теорем 7.7 [1] и 2.4 [75].

#### 4.6. Периодические диссипативные системы

1. Пусть

$$(4.6.196) \quad \langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$$

неавтономная динамическая система. Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что динамическая система  $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$  периодична, т.е. существуют  $\tau \in \mathbb{T}_2$  ( $\tau > 0$ ) и  $q \in Y$  такие, что  $\sigma(q, \tau) = q$  и  $Y = \{\sigma(q, t) : 0 \leq t < \tau\}$ . При этом неавтономная динамическая система (4.6.196) называется  $\tau$ -периодической. Обозначим через  $P : X_q \rightarrow X_q$  отображение, определенное равенством  $P(x) = \pi(\tau, x)$  и  $(X_q, P)$  каскад, порожденный степенями  $P$ .

**Лемма 52.** *Для того чтобы неавтономная динамическая система (4.6.196) была поточечно (компактно, локально) диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы каскад  $(X_q, P)$  был поточечно (компактно, локально) диссипативен. При этом имеют место соотношения:*

$$J = \{\pi^t J_q : 0 \leq t < \tau\} \quad \text{и} \quad J_q := J \cap X_q,$$

где  $J$  – центр Левинсона динамической системы (4.6.196), а  $J_q$  – центр Левинсона каскада  $(X_q, P)$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

**СЛЕДСТВИЕ 36.** *Если  $(X, h, Y)$  – конечномерное векторное расслоение, то центр Левинсона  $J$  неавтономной диссипативной динамической системы (4.6.196) и  $J_q$  связны.*

*Доказательство.* Это утверждение вытекает из теорем 4.1.66, 4.1.67 и следствия 31.

**СЛЕДСТВИЕ 37.** *В условиях следствия 36 существует  $r > 0$  и для любого  $a > 0$  найдется  $k(a) \in \mathbb{Z}_+$  такое, что  $P^k B[0, a] \subseteq B[0, r]$  для всех  $k \geq k(a)$ , где  $B[0, a]$  шар в  $X_q$  радиуса  $a$  с центром в начале координат.*

*Доказательство.* Следствие 37 вытекает из теоремы 2.6.43 и леммы 52.

**СЛЕДСТВИЕ 38.** *В условиях следствия 36 существует неподвижная точка отображения  $P : X_q \rightarrow X_q$ .*

*Доказательство.* Следствие 38 вытекает из теоремы Браудера [143] о неподвижной точке и следствия 37.

**Теорема 4.6.75.** Пусть  $(X, h, Y)$  – конечномерное векторное расслоение. Существует непустое компактное инвариантное множество  $J$  (центр Левинсона) диссипативной динамической системы (4.6.196), обладающее следующими свойствами:

- (1) при каждом  $y \in Y$  множество  $J_y = J \cap X_y$  связно;
- (2) для любого  $\epsilon > 0$  существует  $\delta(\epsilon) > 0$  такое, что  $\rho(x, J_y) < \delta$  ( $x \in X_y$ ) влечет  $\rho(xt, J_{yt}) < \epsilon$  при всех  $t \geq 0$ ;
- (3) при каждом  $y \in Y$  и  $x \in X_y$   $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, J_{yt}) = 0$ ;
- (4) в центре Левинсона  $J$  системы (4.6.196) содержится по крайней мере одна  $\tau$ -периодическая точка.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из леммы 22, теоремы 2.1.26 и следствия 38.

**Теорема 4.6.76.** Если  $X_q$  – комплексное  $n$ -мерное пространство и отображение  $P: X_q \rightarrow X_q$  голоморфно, то  $J_q = \{p\}$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(xt, pt) = 0$  при всех  $x \in X_q$ , т.е. система (4.6.196) конвергентна.

*Доказательство.* Доказательство этого утверждения получается незначительной модификацией рассуждений из теоремы 3.2.51.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(4.6.197) \quad \dot{u} = f(t, u) \quad (t \in \mathbb{R}, u \in E^n)$$

с  $\omega$ -периодической правой частью  $t \in \mathbb{R}$  и непрерывно дифференцируемой по пространственной переменной  $u \in E^n$ . Если функция  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  регулярна, то, как было показано выше (см. пример 11), уравнение (4.6.197) порождает некоторую неавтономную (и, очевидно,  $\tau$ -периодическую) динамическую систему. Применяя к ней теоремы 4.5.72, 4.5.73, и 4.5.74, получим соответствующие утверждения для уравнения (4.6.197).

Пусть  $P: E^n \rightarrow E^n$  преобразование Пуанкаре уравнения (4.6.197) т.е.  $P(u) = \varphi(\tau, u, f)$ . Множество цепно рекуррентных точек уравнения (4.6.197) назовем множеством цепно рекуррентных точек каскада  $(E^n, P)$ . Известно (см., например, [17, с.56]), что для уравнения (4.6.197) с гладкой правой частью множество цепно рекуррентных точек  $\mathfrak{R}$  совпадает с множеством  $\Pi$ , порождающим периодические (периода  $k\tau$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ) решения (4.6.197) (по поводу определения  $\Pi$  см. [75, с.278]).

**Теорема 4.6.77.** Предположим, что для уравнения (4.6.197) множество цепно рекуррентных точек  $\mathfrak{R}$  компактно и множество  $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{R})$  гиперболично, тогда

- (1) отношение  $\sim$  разбивает множество  $\mathfrak{R}$  на конечное число классов эквивалентности, т.е.  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ ;

- (2) множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе  $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов;

**СЛЕДСТВИЕ 39.** *Предположим, что для уравнения (4.6.196) множество  $\Pi$ , порождающее периодические (периода  $k\omega$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ) решения компактно и гиперболично, тогда:*

- (1) отношение  $\sim$  разбивает  $\Pi$  на конечное число классов эквивалентности, т.е.  $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2 \sqcup \dots \sqcup \Pi_k$ ;
- (2) множества  $\Pi_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) замкнуты, инвариантны, квазими-  
нимальны, локально максимальны и в наборе  $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов;
- (3) кроме того, если в  $\Pi$  содержится бесконечное число минимальных множеств, то в  $\Pi$  существует нетривиальное минимальное множество.

Последнее утверждение обобщает и усиливает теорему 3.3 из [75, с.280].

**Теорема 4.6.78.** *Пусть уравнение (4.6.197) диссипативно и  $J$  – его центр Левинсона. Если выполнено одно из следующих условий:*

- a. *в  $J$  содержится лишь конечное число минимальных множеств;*  
b. *в  $J$  содержится бесконечное число минимальных множеств и  $\mathfrak{M}_0(J)$  гиперболично.*

*Тогда:*

- (1) *отношение  $\sim$  разбивает множество цепно рекуррентных точек  $\mathfrak{R}$  уравнения (4.6.197) на конечное число классов эквивалентности т.е.  $\mathfrak{R}(J) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$ ;*
- (2) *множества  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе  $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$  нет  $r$  ( $r \geq 1$ ) циклов;*
- (3)  *$J = \cup \{W^u(\mathfrak{R}_i) : i \in \overline{1, k}\}$ .*

**Теорема 4.6.79.** *Пусть уравнение (4.6.197) диссипативно,  $J$  – его центр Левинсона. Если в  $J$  содержится бесконечное число минимальных множеств и множество  $\mathfrak{M}_0(J)$  гиперболично, то имеют место утверждения 1.-3. теоремы 4.6.78. Кроме того, в  $J$  содержится бесконечное число гиперболических периодических решений.*

**СЛЕДСТВИЕ 40.** *В условиях теоремы 4.6.79 в  $J$  существует локально максимальное гиперболическое марковское множество  $\Lambda \subseteq J$  и, в частности, в  $J$  содержится трансверсальная гомоклиническая периодическая траектория.*

Последнее утверждение вытекает из следствия 35.





## Метод функций Ляпунова

### 5.1. Критерии диссипативности неавтономных динамических систем в терминах функций Ляпунова

Всюду в этом параграфе предполагается, что  $(X, h, Y)$  – банахово расслоение.

**Теорема 5.1.80.** Пусть  $Y$  компактно и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  вполне непрерывна, т.е. для любого ограниченного множества  $A \subseteq X$  существует  $l = l(A) > 0$  такое, что  $\pi^l A$  относительно компактно в  $X$ . Для того чтобы неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была ограничено  $k$ -диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $X_r := \{x \in X : |x| \geq r\}$ ), обладающая следующими свойствами:

- (1)  $V(x) \geq a(|x|)$  при всех  $x \in X_r$ , где  $a \in \mathfrak{A}$  и  $\text{Im } V \subseteq \text{Im } a$ ;
- (2) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V(xt) \leq V(x)$ ;
- (3) линии уровня функции  $V$  не содержат  $\omega$ -предельных точек динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

*Доказательство.* Достаточность. Пусть  $K_1 := \{x \in X : |x| \leq r\}$ . В силу компактности  $Y$  и локальной тривиальности банахового расслоения  $(X, h, Y)$  множество  $K_1$  ограничено. Покажем, что  $K_1$  является слабым  $b$ -аттрактором динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ , т.е. для любого  $x \in X$  найдется  $\tau = \tau(x) > 0$  такое, что  $x\tau \in K_1$ . Если допустить, что это не так, то найдется  $x_0 \in X \setminus K$ , для которого  $x_0 t \notin K$  при всех  $t > 0$ . Положим  $\varphi(t) := V(x_0 t)$  ( $t \geq 0$ ), тогда  $\varphi : \mathbb{T}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $\mathbb{T}_+ = \{t \in \mathbb{T}_1 \mid t \geq 0\}$ ) непрерывна, ограничена и монотонна, и, следовательно, существует  $V_0 := \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_0 t)$ . Докажем, что в условиях теоремы точка  $x_0$  устойчива  $L_+$ , т.е.  $\{x_0 t \mid t \in \mathbb{T}_+\}$  относительно компактно. В силу вполне непрерывности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  достаточно показать, что множество  $\{x_0 t \mid t \in \mathbb{T}_+\}$  ограничено. Последнее вытекает из того, что  $a(|x_0 t|) \leq V(x_0 t) \leq V(x_0)$  при всех  $t \in \mathbb{T}_+$ , а, значит,  $|x_0 t| \leq a^{-1}(V(x_0))$  ( $t \in \mathbb{T}_+$ ). Таким образом, множество  $\{x_0 t \mid t \in \mathbb{T}_+\}$  относительно компактно, поэтому  $\omega_{x_0} \neq \emptyset$ , компактно и инвариантно. Заметим, что  $\omega_{x_0} \subseteq X_r$ . Пусть  $x \in \omega_{x_0}$ , тогда в силу непрерывности функции  $V$  имеем  $V(x) = V_0$ . Последнее противоречит условию 3. теоремы. Полученное противоречие

доказывает, что множество  $K_1$  является слабым  $b$ -аттрактором динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и согласно теореме 1.6.19 неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна.

Необходимость. Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна,  $J$  – ее центр Левинсона и  $r > r_0$ , где  $r := \sup\{|x| : x \in J\}$ . Определим функцию  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$  равенством

$$(5.1.198) \quad V(x) := \sup\{|xt| : t \geq 0\}.$$

Непосредственно из определения  $V$  следует, что:

- (1)  $V(x) \geq |x|$  при всех  $x \in X_r$ ;
- (2) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V(xt) \leq V(x)$ .

Покажем, что функция  $V$  непрерывна. Пусть  $x_n \rightarrow x$  ( $x, x_n \in X_r$ ) и  $R := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ , тогда в силу теоремы 2.6.43 для числа  $R > 0$  найдется  $l(R) > 0$  такое, что

$$(5.1.199) \quad |xt| \leq r \quad (t \geq l(R) \text{ и } |x| \leq R).$$

Из (5.1.198) и (5.1.199) следует, что

$$(5.1.200) \quad V(x) = |x\tau|$$

при некотором  $\tau(x) \in [0, l(R)]$  ( $|x| \leq R$ ). Последовательность  $\{V(x_n)\} = \{|x_n\tau_n|\}$  ограничена, где  $\tau_n = \tau(x_n)$ . Покажем, что она имеет единственную предельную точку. Пусть  $\tilde{V}$  – одна из предельных точек последовательности  $\{V(x_n)\}$ . Существует подпоследовательность  $\{V(x_{k_n})\}$  такая, что  $V(x_{k_n}) \rightarrow \tilde{V}$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Так как  $\{\tau_{k_n}\}$  ограничена, то ее можно считать сходящейся. Тогда  $\tilde{V} = |x\tau'|$ , где  $\tau' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{k_n}$ . Покажем, что  $|x\tau'| = |x\tau| = V(x)$ . Если допустить, что  $|x\tau'| \neq |x\tau|$ , то  $|x\tau| > |x\tau'|$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  таково, что  $|x\tau'| + 2\varepsilon < |x\tau|$ . Тогда для достаточно больших  $k \in \mathbb{N}$  имеем

$$||x_{k_n}\tau| - |x\tau|| < \varepsilon \text{ и } ||x_{k_n}\tau_{k_n}| - |x\tau'|| < \varepsilon,$$

откуда

$$(5.1.201) \quad |x_{k_n}\tau| > |x\tau| - \varepsilon > |x\tau'| + \varepsilon > |x_{k_n}\tau_{k_n}| = V(x_{k_n}).$$

Неравенство (5.1.201) противоречит выбору числа  $\tau_{k_n}$

$$(|x_{k_n}\tau_{k_n}| = \sup\{|x_{k_n}\tau| : \tau \geq 0\}).$$

Таким образом,  $V(x) = |x\tau'|$  и, следовательно,  $V(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_n)$ .

Отсюда следует непрерывность  $V$ .

Наконец, покажем, что линии уровня функции  $V$  не содержат  $\omega$ -предельных точек  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . Действительно, каково бы ни было  $x \in X$ , имеем  $\omega_x \subseteq J$ . По определению множества  $X_r$  оно не имеет общих точек с  $J$  и, следовательно,  $\omega_x \cap V^{-1}(c) = \emptyset$ , каковы бы ни были  $c \in \text{Im } V$  и  $x \in X_r$ .

**Лемма 53.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система,  $Y$  компактно и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  вполне непрерывна, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) существуют  $r_1 > 0$  и непрерывная функция  $V_1 : X_{r_1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая следующими свойствами:
  - (a)  $V_1(x) \geq a_1(|x|)$  при всех  $x \in X_{r_1}$ , где  $a_1 \in \mathfrak{A}$  и  $Im V_1 \subseteq Im a_1$ ;
  - (b) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V_1(xt) \leq V_1(x)$ ;
  - (c) линии уровня функции  $V_1$  не содержат  $\omega$ -предельных точек динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ ;
- (2) существуют  $r_2 > 0$  и непрерывная функция  $V_2 : X_{r_2} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая свойствами:
  - (a)  $V_2(x) \geq a_2(|x|)$  при всех  $x \in X_{r_2}$ , где  $a_2 \in \mathfrak{A}$  и  $Im V_2 \subseteq Im(a_2)$ ;
  - (b) если  $x\tau \in X_{r_2}$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V_2(xt) \leq V_2(x)$ ;
  - (c) линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

*Доказательство.* Покажем, что из условия 1. следует 2.. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся  $c_0 \in Im V$  и  $x_0 \in V^{-1}(c_0)$  такие, что  $x_0 t \in V^{-1}(c_0)$  при всех  $t \geq 0$ . Заметим, что  $a(|x_0 t|) \leq V(x_0 t) = V(x_0) = c_0$ , и, следовательно,  $|x_0 t| \leq a^{-1}(c_0)$  при всех  $t \geq 0$ . В силу вполне непрерывности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  множество  $\Sigma_{x_0}^+$  относительно компактно и, следовательно,  $\omega_{x_0} \neq \emptyset$ , компактно и  $\omega_{x_0} \subseteq V^{-1}(c_0)$ . Последнее противоречит условию 1. Полученное противоречие доказывает импликацию 1.  $\Rightarrow$  2. и в качестве  $V_2$  можно взять  $V_1$ .

Покажем теперь, что из 2. следует 1. Рассуждая так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 5.1.80, можно показать, что динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  будет ограничено  $k$ -диссипативной. Пусть  $J$  – центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  и  $r_2 > r_0 = \sup\{|x| : x \in J\}$ . Теперь в качестве  $V_2 : X_{r_2} \rightarrow \mathbb{R}_+$  достаточно взять функцию, определенную равенством (5.1.198) и, так же, как и при доказательстве необходимости в теореме 5.1.80, проверяется, что построенная функция является искомой. Лемма доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 41.** Пусть  $Y$  компактно и динамическая система  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  вполне непрерывна. Для того чтобы неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была ограничено  $k$ -диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

- (1)  $V(x) \geq a(|x|)$  при всех  $x \in X_r$ , где  $a \in \mathfrak{A}$  и  $Im V \subseteq Im(a)$ ;
- (2) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V(xt) \leq V(x)$ ;
- (3) линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

**Теорема 5.1.81.** Пусть  $Y$  компактно и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  вполне непрерывна. Для того чтобы динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  была ограничено  $k$ -диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая следующими свойствами:

- (1)  $V(x) \geq a(|x|)$  при всех  $x \in X_r$ , где  $a \in \mathfrak{A}$  и  $Im V \subseteq Im(a)$ ;
- (2) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$  ( $t > 0$ ), то  $V(xt) < V(x)$ .

*Доказательство.* Достаточность. Пусть  $K_1 = \{x | x \in X, |x| \leq r\}$  и  $l > 0$  таково, что  $\pi^l K_1$  относительно компактно.  $K := \overline{\pi^l K_1}$ . Покажем, что  $\omega_x \cap K_1 \neq \emptyset$  при всех  $x \in X$ . Если допустить, что это не так, то найдется  $x_0 \in X$  такое, что  $\omega_{x_0} \cap K_1 = \emptyset$  и, следовательно, существует  $t_0 > 0$ , начиная с которого  $xt \notin K_1$  (см. доказательство теоремы 5.1.80). С другой стороны,  $a(|x_0 t|) \leq V(x_0 t) < V(x_0 t_0) = c_0$  и, следовательно,  $|x_0 t| \leq a^{-1}(c_0)$  ( $t \geq t_0$ ) и по условию теоремы множество  $\Sigma_{x_0}^+$  относительно компактно. Таким образом,  $\omega_{x_0} \neq \emptyset$  и компактно. Как и в теореме 5.1.80, можно показать, что  $V(x) = c$  при всех  $x \in \omega_{x_0}$ , где  $c$  – некоторая положительная константа. Так как множество  $\omega_{x_0}$  инвариантно, то наряду с точкой  $x$ , множеству  $\omega_{x_0}$  принадлежит и  $xt$  при всех  $t > 0$  и, следовательно,  $V(xt) < V(x) = c$ . Полученное противоречие доказывает, что наше допущение о том, что  $\omega_x \cap K = \emptyset$  неверно. Таким образом,  $\omega_x \cap K \neq \emptyset$  при всех  $x \in X$ , и согласно теореме 2.6.43 неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна.

Необходимость. Пусть неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна. Определим функцию  $\mathcal{V} : X \setminus J \rightarrow \mathbb{R}_+$  равенством (5.1.198), где  $J$  – центр Левинсона динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . Из доказательства теоремы 5.1.80 следует, что  $\mathcal{V}$  удовлетворяет следующим условиям:

- (1)  $\mathcal{V}$  непрерывна;
- (2)  $\mathcal{V}(x) \geq |x|$  при всех  $x \in X \setminus J$ ;
- (3)  $\mathcal{V}(xt) \leq \mathcal{V}(x)$  при всех  $x \in X \setminus J$  и  $t \geq 0$ .

При  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$  определим функцию  $V : X \setminus J \rightarrow \mathbb{R}_+$  формулой

$$(5.1.202) \quad V(x) := \int_0^{+\infty} \mathcal{V}(xt) e^{-t} dt.$$

Функция  $V$  непрерывна и  $V(xt) \leq V(x)$  при всех  $x \in X \setminus J$  и  $t \geq 0$ . Пусть  $r > r_0 := \sup\{|x| : x \in J\}$  и  $t > 0$  таково, что  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ . Покажем, что  $V(xt) < V(x)$ . Допустим, что это не так. Тогда существуют  $x_0 \in X_r$  и  $t_0 > 0$  такие, что  $x_0\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t_0]$  и

$$(5.1.203) \quad V(x_0 t_0) = V(x_0).$$

Из равенств (5.1.202) и (5.1.203) следует, что

$$(5.1.204) \quad \mathcal{V}(x_0(t_0 + \tau)) = \mathcal{V}(x_0\tau)$$

при всех  $\tau \geq 0$ .

Рассмотрим функцию  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , определенную равенством  $\varphi(\tau) := \mathcal{V}(x_0\tau)$ . Непосредственно из определения функции  $\varphi$  следует, что она непрерывна и является невозрастающей, и из равенства (5.1.204) следует, что  $\varphi(t_0 + \tau) = \varphi(\tau)$  при всех  $\tau \geq 0$ . Из вышесказанного заключаем, что функция  $\varphi$  постоянна, т.е.

$$(5.1.205) \quad \sup_{t \geq \tau} |x_0 t| = \sup_{t \geq 0} |x_0 t| \geq |x_0| \geq r$$

при всех  $\tau \geq 0$ . Из (5.1.205) и доказательства теоремы 5.1.80 (см. (5.1.200)) следует, что найдется  $\tau_k \rightarrow +\infty$ , для которой  $|x_0 \tau_k| \geq r$ . Так как  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна, то последовательность  $\{x_0 \tau_k\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\bar{x} := \lim_{k \rightarrow +\infty} x_0 \tau_k$ . Очевидно,  $\bar{x} \in \omega_{x_0} \cap X_r$ . С другой стороны,  $\omega_{x_0} \subseteq J \subseteq X \setminus X_r$ . Полученное противоречие показывает, что наше допущение о том, что имеет место равенство (5.1.203) неверно.

Для завершения доказательства теоремы 5.1.81 достаточно показать, что  $V(x) \geq |x|$ . Действительно, так как  $\mathcal{V}(x) \geq |x|$  при всех  $x \in X_r$ , то

$$(5.1.206) \quad V(x) = \int_0^{+\infty} \mathcal{V}(xt) e^{-t} dt \geq \int_0^{\varepsilon} |xt| e^{-t} dt$$

при всех  $x \in X_r$  и  $\varepsilon > 0$ . Найдется  $0 \leq \theta(\varepsilon) \leq \varepsilon$  такое, что

$$(5.1.207) \quad V(x) \geq |x\theta(\varepsilon)| e^{-\theta(\varepsilon)}.$$

Переходя к пределу в (5.1.207), когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим требуемое неравенство.

Если  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ , функцию  $V : X \setminus J \rightarrow \mathbb{R}_+$  определим равенством

$$(5.1.208) \quad V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{V}(xk) e^{-k}.$$

Так же, как и в непрерывном случае, проверяется, что функция  $V$ , определенная равенством (5.1.208), является искомой. Теорема полностью доказана.

**Теорема 5.1.82.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система и  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ . Если существует число  $r > 0$  и функция  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая следующими свойствами:

- (1)  $a(|x|) \leq V(x) \leq b(|x|)$  ( $a, b \in \mathfrak{A}$ ,  $Im b \subseteq Im a$ ) при всех  $x \in X_r$ ;
- (2)  $\dot{V}_\pi(x) \leq -c(|x|)$  при всех  $x \in X_r$ , где  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  – непрерывная функция, положительная на  $[r, +\infty)$ , ( $\dot{V}_\pi(x) = \limsup_{t \downarrow +0} t^{-1}[V(xt) -$

$$V(x)]),$$

тогда существует  $R_0 > 0$ , такое что для любого  $R > 0$  найдется  $L(R) > 0$ , при котором  $|xt| \leq R_0$  при всех  $t \geq L(R)$  и  $|x| \leq R$ .

*Доказательство.* Прежде всего покажем, что каково бы ни было  $x \in X_r$ , найдется  $\tau = \tau(x) > 0$  такое, что  $|x\tau| < r$ . Если допустить, что это не так, то существует  $x_0 \in X_r$ , такое что  $|x_0\tau| \geq r$  при всех  $\tau \geq 0$ . Следовательно,  $a(|x_0\tau|) \leq V(x_0\tau) \leq V(x_0) \leq b(|x_0|)$ . Из последнего неравенства следует, что  $|x_0\tau| \leq a^{-1}(b(|x_0|))$ . Таким образом,  $\sup\{|x\tau| : \tau \geq 0\} = b_0 < +\infty$ . Обозначим через  $\nu = \inf\{c(\alpha) \mid r \leq \alpha \leq b_0\}$  и заметим, что  $\dot{V}_\pi(x_0t) \leq -\nu t$ , поэтому

$$(5.1.209) \quad V(x_0t) \leq V(x_0) - \nu t$$

при всех  $t > 0$ . Правая часть (5.1.209) отрицательна при достаточно больших  $t$ , что противоречит положительной определенности  $V$  на  $X_r$ . Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Докажем, что  $|xt| \leq R_0$  при всех  $|x| \leq r$  и  $t \geq 0$ , где  $R_0 = \inf\{\alpha \mid a(\alpha) \geq b(r)\}$ . Действительно, если  $|x| \leq r$ ,  $|x\beta_x| = |x\gamma_x| = r$  и  $|xt| > r$  при всех  $t \in ]\beta_x, \gamma_x[$ , то справедливы неравенства

$$a(|xt|) \leq V(xt) \leq V(x\beta_x) \leq b(|x\beta_x|) = \beta(r) \leq a(R_0).$$

Из последнего неравенства следует, что  $|xt| \leq R_0$  при всех  $t \in ]\beta_x, \gamma_x[$  и  $|x| \leq r$ , а значит,  $|xt| \leq R_0$  при всех  $t \geq 0$  и  $|x| \leq r$ .

По доказанному выше для любого  $x \in X_r$  найдется  $\tau(x) > 0$  такое, что  $|x\tau| < r$ . Положим  $\alpha_x = \sup\{t \mid x\tau \in X_r \text{ при всех } \tau \in [0, t]\}$ , тогда  $|x\alpha_x| = r$  и  $|xt| > r$  при всех  $t \in ]0, \alpha_x[$ . Покажем, что для любого  $R > 0$   $|xt| \leq a^{-1}(b(R))$  при всех  $|x| \leq R$  и  $t \in ]0, \alpha_x[$ . Действительно,

$$(5.1.210) \quad a(|xt|) \leq V(xt) \leq V(x) \leq b(|x|) \leq b(R)$$

при всех  $t \in ]0, \alpha_x[$ . Из неравенства (5.1.210) вытекает требуемая оценка. Заметим теперь, что  $L(R) := \sup\{\alpha_x \mid |x| \leq R\}$  конечно каково бы ни было  $R > 0$ . Если допустить, что это не так, то найдутся  $\bar{R} > 0$  и  $\{x_n\}$  такие, что  $|x_n| \leq \bar{R}$  и  $\alpha_{x_n} \rightarrow +\infty$ . Положим

$$\bar{\nu} = \inf\{c(\alpha) \mid r \leq \alpha \leq a^{-1}(b(R))\}$$

и заметим, что  $\dot{V}_\pi(xt) \leq -\bar{\nu}$  при всех  $|x| \leq R$  и  $t \in ]0, \alpha_x[$  и, следовательно,

$$V(xt) \leq V(x) - \bar{\nu}t \leq b(R) - \bar{\nu}t$$

при всех  $|x| \leq R$  и  $t \in ]0, \alpha_x[$ . В частности,

$$(5.1.211) \quad V(x_n\alpha_{x_n}) \leq b(\bar{R}) - \bar{\nu}\alpha_{x_n}$$

при всех  $n$ . Правая часть (5.1.211) при достаточно больших  $n$  отрицательна, что противоречит положительной определенности  $V$  на  $X_r$ . Полученное противоречие доказывает, что  $L(R)$  при каждом  $R > 0$  конечно. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что  $|xt| \leq R_0$  при всех  $|x| \leq R$  и  $t \geq L(R)$ .

**СЛЕДСТВИЕ 42.** Пусть  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система и  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ . Если существует непрерывная функция  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V$  ограничена на ограниченных множествах из  $X$ , т.е.  $V(x) \leq b(|x|)$  для любого  $x \in X$ , где  $b \in \mathfrak{A}$ ;
- (2)  $V(y) \geq \gamma_1|y|^2 - D_1$  ( $\gamma_1, D_1 > 0$ );
- (3)  $\dot{V}_\pi(y) \leq -\gamma_2 V(y) + D_2$  ( $\gamma_2, D_2 > 0$ ),

тогда существует  $R_0 > 0$  такое, что для любого  $R > 0$  найдется  $l(R) > 0$ , при котором  $|xt| \leq R_0$  при всех  $|x| \leq R$  и  $t \geq l(R)$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.1.82. Для этого достаточно заметить, что при достаточно больших  $r > 0$  условия 1. и 2. гарантируют выполнение условия 1. теоремы 5.1.82, а условие 3. – условия 2..

**СЛЕДСТВИЕ 43.** В условиях теоремы 5.1.82, если  $Y$  компактно и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  асимптотически компактно, то неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.1.82.

**Замечание 5.1.28.** Утверждение, аналогичное следствию 43, имеет место и для динамических систем с дискретным временем  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}_+$ .

**Замечание 5.1.29.** В отличие от теорем 5.1.80 и 5.1.81, в теореме 5.1.82 непрерывности функции  $V$  не требуется, а, вместо этого, накладывается определенное условие на скорость убывания функции  $V$  вдоль траекторий системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . Кроме того, при  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$  полнота пространства  $Y$  не требуется (в приложениях встречаются примеры, когда  $Y$  заведомо неполно).

Неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  назовем ограниченной, если для любого  $R > 0$  существует  $C(R) > 0$  такое, что  $|xt| \leq C(R)$  при всех  $|x| \leq R$  и  $t \geq 0$ .

**Теорема 5.1.83.** Пусть  $Y$  компактно,  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ ,  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  асимптотически компактна. Если существуют  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) существуют  $a, b \in \mathfrak{A}$  такие, что  $a(|x|) \leq V(x) \leq b(|x|)$  при всех  $x \in X_r$  и  $Im b \subseteq Im a$ ;
- (2) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V(xt) \leq V(x)$ ;
- (3) линии уровня  $V$  не содержат  $\omega$ -предельных точек динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ ,

то неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна и ограничена.

*Доказательство.* Прежде всего покажем, что найдется  $R_0 > 0$  такое, что  $|xt| \leq R_0$  при всех  $t \geq 0$  и  $|x| \leq r$ . Действительно, если  $|x| = r$ ,  $|x\tau| = r$  и  $|xt| > r$  при всех  $t \in ]0, \tau[$ , то

$$a(|xt|) \leq V(xt) \leq V(x) \leq b(|x|) = b(r)$$



и, следовательно,  $|xt| \leq a^{-1}(b(r)) = R_0$ . Таким образом,  $|xt| \leq R_0$  при всех  $t \geq 0$  и  $|x| \leq r$ .

Докажем теперь ограниченность  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ . Если  $|x| \leq R$  и  $xt \notin K_1 = \{x \mid x \in X_r, |x| \leq R\}$  при всех  $t \geq 0$ , то  $|xt| \leq C_1(R) = a^{-1}(b(R))$ . Если  $xt \notin K_1$  при всех  $0 \leq t < \tau$  и  $x\tau_1 \in K_1$ , то  $|xt| \leq C_1(R)$  при  $0 \leq t < \tau$  и  $|xt| \leq R_0$  при всех  $t \geq \tau$  и, следовательно,  $|xt| \leq C(R) = \max\{C_1(R), R_0\}$  при всех  $t \geq 0$  и  $|x| \leq R$ .

Покажем, что неавтономная система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна. Так как  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничена и асимптотически компактна, то согласно лемме 4  $\Omega(K_1) \neq \emptyset$ , компактно и притягивает  $K_1$ . Положим  $K = \Omega(K_1)$  и покажем, что  $\omega_x \cap K \neq \emptyset$ , каково бы ни было  $x \in X$ . Если допустить, что это не так, то найдется  $x_0 \in X$ , что  $\omega_{x_0} \cap K = \emptyset$ . В условиях теоремы 5.1.81 множество  $\Sigma_{x_0}^+ = \{xt \mid t \geq 0\}$  относительно компактно и, следовательно,  $\omega_{x_0} \neq \emptyset$  и компактно. Положим  $d := \rho(\omega_{x_0}, K) > 0$ , тогда

$$(5.1.212) \quad B[\omega_{x_0}, d/3] \cap B[K, d/3] = \emptyset$$

и найдется  $l > 0$  такое, что

$$(5.1.213) \quad \pi^t K_1 \subseteq B(K, d/3)$$

при всех  $t \geq l$ . Покажем, что  $xt \notin K_1$  при всех  $t \geq t_0$ , где  $t_0$  – некоторое неотрицательное число. Если допустить, что это не так, то найдется  $t_n \rightarrow +\infty$ , что  $x_0 t_n \in K_1$  и, согласно (5.1.213),  $x_0(t_n + l) \in B(K, d/3)$ . Последовательность  $\{x_0(t_n + l)\}$  можно считать сходящейся. Положим  $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0(t_n + l)$ , тогда  $p \in \omega_{x_0} \cap B[K, d/3] \neq \emptyset$ , что противоречит соотношению (5.1.212). Полученное противоречие показывает, что  $xt \notin K_1$  при всех  $t \geq t_0$ . Далее, рассуждая также, как и в теореме 5.1.80, получим, что  $V(x) = c$  при всех  $x \in \omega_{x_0}$ , где  $c$  – некоторая константа. Последнее противоречит условию 3. теоремы. Полученное противоречие показывает, что  $\omega_x \cap K \neq \emptyset$  при всех  $x \in X$ . В силу асимптотической компактности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна. Теорема доказана.

**Замечание 5.1.30.** *а. Условие 1. теоремы 5.1.83 эквивалентно положительной определенности  $V$  на  $X_r$  и ее ограниченности на ограниченных множествах из  $X$ ;*

*б. Имеет место и утверждение, обратное к теореме 5.1.81, и доказывается оно так же, как и необходимость в теореме 5.1.80;*

*с. Лемма 53 остается справедливой, если в ней условие вполне непрерывности  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  заменить на ограниченность и асимптотическую компактность  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ . Поэтому теорема 5.1.83 справедлива и в том случае, если условие 3. в ней заменить следующим: линии уровня  $V$  не содержат положительных полутраекторий динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .*

**Теорема 5.1.84.** Пусть  $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ ,  $Y$  компактно,  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система и  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$  асимптотически компактна. Если существуют  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) существуют  $a, b \in \mathfrak{A}$  такие, что  $a(|x|) \leq V(x) \leq b(|x|)$  при всех  $x \in X_r$  и  $Im b \subseteq Im a$ ;
- (2) если  $x\tau \in X_r$  при всех  $t \in [0, t]$  ( $t > 0$ ), то  $V(xt) < V(x)$ ,

то неавтономная динамическая система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  ограничено  $k$ -диссипативна и ограничена.

*Доказательство.* Сформулированное утверждение доказывается так же, как и теорема 5.1.81.

**Замечание 5.1.31.** а. Видимо, теоремы 5.1.81 и 5.1.82 имеют место и для динамических систем с дискретным временем, однако доказательством соответствующих утверждений мы не располагаем;

б. В теоремах 5.1.80–5.1.84 везде условия  $V(x) \geq a(|x|)$  и  $Im a \supseteq Im V$  (или  $a(|x|) \leq V(x) \leq b(|x|)$  и  $Im b \subseteq Im a$ ) можно заменить условием  $\lim_{h \rightarrow +\infty} a(h) = +\infty$ .

## 5.2. Некоторые признаки диссипативности неавтономных дифференциальных уравнений (многомерный случай)

1. Пусть  $E^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\|\cdot\|$  – норма на  $E^n$ , порожденная скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(5.2.214) \quad \dot{u} = f(t, u),$$

где  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  – регулярная функция. Наряду с уравнением (5.2.214) рассмотрим и его  $H$ -класс

$$(5.2.215) \quad \dot{v} = f(t, v) \quad (g \in H(f)).$$

Как отмечалось выше, уравнение (5.2.214) естественным образом порождает неавтономную динамическую систему (см. пример 11). Применяя к ней результаты, относящиеся к общим неавтономным динамическим системам, получаем ряд утверждений относительно уравнения (5.2.214). Из теорем 5.1.80, 5.1.81, леммы 53 и следствия 41 вытекают

Пусть  $r > 0$  и  $E_r^n := \{u \in E^n : \|u\| \geq r\}$ .

**Теорема 5.2.85.** Пусть  $H(f)$  – компактно. Для того, чтобы уравнение (5.2.214) было диссипативным необходимо и достаточно, чтобы существовали  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : H(f) \times E_r^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая условиям:

- (1)  $V(g, v) \geq a(\|v\|)$  при всех  $v \in E_r^n$  и  $g \in H(f)$ , где  $a \in \mathfrak{A}$  и  $Im V \subseteq Im a$ ;
- (2) если  $\|\varphi(\tau, v, g)\| \geq r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V(g_t, \varphi(t, v, g)) \leq V(g, v)$  ( $g \in H(f)$ );

- (3) линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полу-траекторий уравнений (5.2.215).

**Теорема 5.2.86.** Пусть  $H(f)$  компактно. Для того чтобы уравнение (5.2.214) было диссипативным необходимо и достаточно, чтобы существовали  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : H(f) \times E_r^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V(g, v) \geq a(\|v\|)$  при всех  $v \in E_r^n$  и  $g \in H(f)$ , где  $a \in \mathfrak{A}$  и  $Im V \subseteq Im a$ ;
- (2) если  $\|\varphi(\tau, v, g)\| \geq r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ , то  $V(g_t, \varphi(t, v, g)) < V(g, v)$  ( $g \in H(f)$ ).

**Теорема 5.2.87.** Пусть  $H(f)$  компактно. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) уравнение (5.2.214) диссипативно;
- (2) существует число  $r > 0$ , обладающее следующим свойством: для любых  $v \in E^n$  и  $g \in H(f)$  найдется  $\tau = \tau(v, g) > 0$  такое, что  $\|\varphi(\tau, v, g)\| < r$ ;
- (3) существует такое число  $R_1 > 0$ , что  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, v, g)\| < R_1$  при всех  $v \in E^n$  и  $g \in H(f)$ ;
- (4) существует число  $R_0 > 0$  и для любого  $R > 0$  найдется  $l(R) > 0$ , что  $\|\varphi(t, v, g)\| \leq R_0$  при всех  $t \geq l(R)$ ,  $\|v\| \leq R$  и  $g \in H(f)$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение следует из теорем 2.6.43 и 3.1.49. В случае, когда  $f$  периодична эквивалентность условий 1, 2 и 4 установлена в [74]. Эквивалентность условий 1 и 2 для неперодических уравнений установлена в [24].

Будем говорить, что функция  $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  удовлетворяет локальному условию Липшица по  $u \in E^n$  равномерно по  $t \in \mathbb{R}$  или просто условию Липшица, если для любого  $r > 0$  существует  $L(r) > 0$  такое, что  $\|F(t, u_1) - F(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $u_1, u_2 \in B(0, r)$ .

**Теорема 5.2.88.** Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  удовлетворяет условию Липшица,  $H(f)$  компактно и существуют  $R > 0$  и непрерывно дифференцируемая функция  $V \in C(\mathbb{R} \times E_r^n, \mathbb{R}_+)$  удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V$  – удовлетворяет условию Липшица;
- (2)  $a(\|u\|) \leq V(t, u) \leq b(\|u\|)$  ( $a, b \in \mathfrak{A}$ ,  $Im a = Im b$ ,  $t \in \mathbb{R}$  и  $u \in E_r^n$ );
- (3)  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V \cap \mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}} \cap \mathfrak{M}_{grad_u V}$  (где:  $\mathfrak{M}_f := \{t_n\} : \{f_{t_n}\}$  сходится}, и аналогично для  $\mathfrak{M}_V$ ,  $\mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}}$  и  $\mathfrak{M}_{grad_u V}$ );
- (4)  $\dot{V}_f(t, u) := \frac{\partial V}{\partial t}(t, u) + \langle grad_u V, f(t, u) \rangle \leq 0$  ( $t \in \mathbb{R}$  и  $u \in E_r^n$ );

(5) ни при каком  $(\tilde{V}, g) \in H(V, f) := \overline{\{(V_\tau, f_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}}$  линии уровня функции  $\tilde{V}$  не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.2.215), лежащих вне шара  $B(0, r)$ .

Тогда уравнение (5.2.214) диссипативно.

*Доказательство.* Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Пусть  $g \in H(f)$ . Существует  $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$  такая, что  $f_{t_k} \rightarrow g$ . Так как  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V$ , то последовательность  $\{V_{t_k}\}$  также сходится. Положим  $\tilde{V} := \lim_{k \rightarrow +\infty} V_{t_k}$ . Из условий а.-д. следует, что функция  $\tilde{V}$  удовлетворяет

условию Липшица,  $\dot{\tilde{V}}_g(t, v) := \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(t, v) + \langle \text{grad}_v \tilde{V}, g \rangle \leq 0$  и, кроме того,  $a(\|v\|) \leq \tilde{V}(t, v) \leq b(\|v\|)$  при всех  $v \in E_r^n$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Пусть  $v \in E_r^n$  и  $g \in H(f)$ . Обозначим через  $\varphi(\cdot, v, g)$  решение уравнения (5.2.215), проходящее через точку  $v$  при  $t = 0$ . Покажем, что это решение продолжаемо вправо на всю полуось  $\mathbb{R}_+$ . Для этого, очевидно, достаточно показать, что оно ограничено на всей области своего существования  $[0, t_v]$ . Пусть  $R = R(r) > 0$  такого, что  $a(R) > b(r)$ ,

$$\mathbb{T}_1(v) := \{t \in [0, t_v] : \|\varphi(t, v, g)\| \leq r\} \text{ и } \mathbb{T}_2(v) := [0, t_v] \setminus \mathbb{T}_1(v).$$

Очевидно,  $\mathbb{T}_2(v)$  открыто и, следовательно,

$$\mathbb{T}_2(v) = \bigcup_{\alpha} ]t_{\alpha}, t_{\beta}[ \quad (\beta = \beta(\alpha)).$$

Для любого  $t \in \mathbb{T}_2(v)$  существует  $\alpha$  такое, что  $t \in ]t_{\alpha}, t_{\beta}[$ ,  $\|\varphi(t_{\alpha}, v, g)\| = \|\varphi(t_{\beta}, v, g)\| = r$ ,  $\|\varphi(t, v, g)\| > r$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} a(\|\varphi(t, v, g)\|) &\leq \tilde{V}(t, \varphi(t, v, g)) \leq \tilde{V}(t_{\alpha}, \varphi(t_{\alpha}, v, g)) \\ (5.2.216) \quad &\leq b(\|\varphi(t_{\alpha}, v, g)\|) = b(r) \leq a(R) \end{aligned}$$

Из неравенства (5.2.216) следует, что  $\|\varphi(t, v, g)\| \leq R$  и мы имеем

$$\sup\{\|\varphi(t, v, g)\| : t \in [0, t_v]\} \leq r_0 := \max(r, R(r)).$$

Так как  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  удовлетворяет условию Липшица, то она регулярна.

3. Пусть  $((X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h)$  – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.2.214). Определим на  $X_r := E_r^n \times H(f)$  функцию  $\mathcal{V} : X_r \rightarrow \mathbb{R}_+$  равенством  $\mathcal{V}(v, g) = \tilde{V}(0, v)$ , где  $\tilde{V}$  – функция, определенная в первом пункте доказательства. Отметим, что функция  $\mathcal{V}(\cdot, g)$  определяется однозначно по  $g \in H(f)$  в силу включения  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V$ .

4. Покажем, что введенная в предыдущем пункте функция  $\mathcal{V}$  удовлетворяет всем условиям следствия 41. Установим ее непрерывность на  $X_r = E_r^n \times H(f)$ . Пусть  $g_k \rightarrow g$  и  $v_k \rightarrow v$  ( $(v_k, g_k) \in E_r^n \times H(f)$ ). Тогда

$$|\mathcal{V}(v_k, g_k) - \mathcal{V}(v, g)| \leq |\mathcal{V}(v_k, g_k) - \mathcal{V}(v, g_k)|$$

$$(5.2.217) \quad \begin{aligned} &+|\mathcal{V}(v, g_k) - \mathcal{V}(v, g)| \leq L_{g_k}(R)\|v_k - v\| \\ &+|\mathcal{V}(v, g_k) - \mathcal{V}(v, g)|, \end{aligned}$$

где  $L_{g_k}(R)$  есть константа Липшица для  $V(\cdot, g_k)$  на  $B(0, R)$  и  $R := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|$ .

Так как  $L_{g_k}(R) \leq L_f(R)$  при всех  $g \in H(f)$  (см., например, [95]) и  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V$ , то  $\mathcal{V}(v, g_k) \rightarrow \mathcal{V}(v, g)$  и, переходя к пределу в (5.2.217) при  $k \rightarrow +\infty$ , устанавливаем непрерывность  $V$  в точке  $(v, g) \in X_r$ .

Остальные условия следствия 41 в условиях доказываемой теоремы очевидным образом выполняются. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на следствие 41.

Отметим, что в случае периодичности  $f$  утверждение теоремы 5.2.88 усиливает теорему 2.5 из [74].

**2.** Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$(5.2.218) \quad \dot{u} = A(t)u,$$

где  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$  и  $[E^n]$  – множество всех линейных операторов  $A : E^n \rightarrow E^n$ . Через  $U(t, A)$  обозначим оператор Коши уравнения (5.2.218). Наряду с уравнением (5.2.218) рассмотрим возмущенное уравнение

$$(5.2.219) \quad \dot{u} = A(t)u + F(t, u) \quad (F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)).$$

Имеет место следующая

**Теорема 5.2.89.** *Для диссипативности уравнения (5.2.219) достаточно выполнение следующих условий:*

- (1) функция  $F$  удовлетворяет условию Липшица;
- (2)  $H(A, F) := \{(A_\tau, F_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$  компактно в  $C(\mathbb{R}, [E^n]) \times C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ ;
- (3) существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$ , что

$$(5.2.220) \quad \|U(t, A)U^{-1}(\tau, A)\| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (t \geq \tau);$$

- (4)  $\|F(t, u)\| \leq A + \varepsilon\|u\|$  ( $\forall u \in E^n, t \in \mathbb{R}$ ), где  $A > 0$  и  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 < \nu N^{-2}$ .

*Доказательство.* Пусть  $(B, G) \in H(A, F)$ . Определим  $W_B \in [E^n]$  равенством

$$(5.2.221) \quad W_B := \int_0^{+\infty} U^*(\tau, B)U(\tau, B)d\tau.$$

Из (5.2.220) и (5.2.221) следует, что  $\|W_B\| \leq N^2(2\nu)^{-1}$ . Обозначим через  $a := \sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}\}$  и заметим, что

$$(5.2.222) \quad \begin{aligned} \|u\| &= \|U(-\tau, B_\tau)U(\tau, B)u\| \leq \\ &\|U(-\tau, B_\tau)\| \|U(\tau, B)u\| \leq e^{a\tau} \|U(\tau, B)u\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(5.2.223) \quad \begin{aligned} \langle W_B u, u \rangle &= \int_0^{+\infty} \|U(\tau, B)u\|^2 d\tau \\ &\geq \int_0^{+\infty} e^{-2a\tau} \|u\|^2 d\tau = \frac{1}{2a} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Итак, установлено следующее неравенство

$$(5.2.224) \quad \frac{1}{2a} \|u\|^2 \leq \langle W_B u, u \rangle \leq \frac{N^2}{2\nu} \|u\|^2 \quad (u \in E^n, B \in H(A)).$$

Пусть  $Y := H(A, F)$ ,  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$  – динамическая система сдвигов на  $Y$ ,  $X := E^n \times Y$  и  $\pi^t(v; B, g) = (\varphi(t, v, B, g); B_t, g_t)$  ( $v \in E^n$ ,  $(B, G) \in H(A, F)$ ), где  $\varphi(\cdot, v, B, G)$  решение уравнения

$$(5.2.225) \quad \dot{v} = B(t)v + G(t, v),$$

проходящее через точку  $v$  при  $t = 0$ . Рассмотрим неавтономную динамическую систему  $\langle (X, \mathbb{R}, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ , где  $h := pr_2 : X \rightarrow Y$ . Определим на  $X$  функцию  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  по следующему правилу

$$(5.2.226) \quad V(v; B, G) := \langle W_B v, v \rangle$$

при всех  $v \in E^n$  и  $(B, G) \in H(A, F)$ . Отметим, что эта функция обладает следующими свойствами:

- а.  $\frac{1}{2a} \|v\|^2 \leq V(v; B, G) \leq \frac{N^2}{2a} \|v\|^2$  ( $v \in E^n$ ,  $(B, g) \in H(A, F)$ ).
- б.  $V$  непрерывна.

Действительно, если  $v_k \rightarrow v$  и  $(B_k, G_k) \rightarrow (B, G)$ , то

$$(5.2.227) \quad \begin{aligned} |V(v_k; B_k, G_k) - V(v; B, G)| &= |\langle W_{B_k} v_k, v_k \rangle - \langle W_B v, v \rangle| \\ &= |\langle W_{B_k}(v_k - v), v_k \rangle + \langle W_{B_k} v, v_k - v \rangle| \\ &+ |\langle (W_{B_k} - W_B)v, v \rangle| \leq \frac{N^2}{2\nu} \|v_k\| \|v_k - v\| \\ &+ \frac{N^2}{2\nu} \|v\| \|v - v_k\| + \|W_{B_k} - W_B\| \|v\|^2. \end{aligned}$$

Из неравенства (5.2.227) видно, что для непрерывности  $V$  достаточно показать, что  $\|W_{B_k} - W_B\| \rightarrow 0$ , если  $B_k \rightarrow B$ . Установим последнее соотношение. Из (5.2.221) следует, что  $W_B$  является самосопряженным

оператором. Поэтому

$$\begin{aligned}
(5.2.228) \quad \|W_{B_k} - W_B\| &= \sup_{\|v\|=1} |\langle (W_{B_k} - W_B)v, v \rangle| \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \sup_{\|v\| \leq 1} \|[U(\tau, B_k) - U(\tau, B)]v\|^2 d\tau = \\
&= \int_0^l \sup_{\|v\| \leq 1} \|[U(\tau, B_k) - U(\tau, B)]v\|^2 d\tau + \\
&+ \int_l^{+\infty} \sup_{\|v\| \leq 1} \|[U(\tau, B_k) - U(\tau, B)]v\|^2 d\tau \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq \tau \leq l} \|U(\tau, B_k) - U(\tau, B)\|^2 l + \\
&+ 2 \int_l^{+\infty} (\|U(\tau, B_k)\|^2 + \|U(\tau, B)\|^2) d\tau.
\end{aligned}$$

Из (5.2.220) следует неравенство  $\|U(\tau, B)\| \leq Ne^{-\nu\tau}$  при всех  $\tau \in \mathbb{R}_+$  и  $B \in H(A)$  (см. [92, с.70]). Поэтому из (5.2.228) получаем

$$(5.2.229) \quad \|W_{B_k} - W_B\| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq l} \|U(\tau, B_k) - U(\tau, B)\|^2 l + \frac{2N^2}{v} e^{-2\nu l}.$$

Переходя к пределу, когда  $k \rightarrow +\infty$  и учитывая, что первое слагаемое в правой части (5.2.229) стремится к нулю при любом фиксированном  $l > 0$ , устанавливаем, что

$$(5.2.230) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \|W_{B_k} - W_B\| \leq \frac{2N^2}{v} e^{-2\nu l}.$$

Причем (5.2.230) имеет место при всех  $l > 0$ . Устремляя  $l$  к  $+\infty$  и учитывая, что левая часть (5.2.230) от  $l$  не зависит, получим требуемый результат. Тем самым непрерывность  $V$  установлена.

с. Пусть теперь  $\|\varphi(\tau; v, B, G)\| \geq r$  ( $r > N^2 A(v - \varepsilon_0 N^2)^{-1}$ ) при всех  $\tau \in [0, t]$ . Тогда  $V(\varphi(t; v, B, G), B_t, G_t) < V(v; B, G)$ . Для установления этого неравенства подсчитаем производную функции

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\tau) &:= V(\varphi(\tau; v, B, G), B_\tau, G_\tau) \\
&= \langle W_B \varphi(\tau; v, B, G), \varphi(\tau; v, B, G) \rangle
\end{aligned}$$

по  $\tau \in \mathbb{R}$ . Стандартными выкладками, учитывая тождество

$$(5.2.231) \quad \frac{d}{d\tau} W_{B_\tau} + B^*(\tau) W_{B_\tau} + W_{B_\tau} B(\tau) = -E$$

( $E$  – единичный оператор в  $E^n$ ), имеем

$$(5.2.232) \quad \frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau; v, B, G), B_\tau, G_\tau) = -\|\varphi(\tau; v, B, G)\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle G(\tau, \varphi(\tau; v, B, G)), W_{B_\tau} \varphi(\tau; v, B, G) \rangle.$$

Из (5.2.232) получается следующее неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau; v, B, G), B_\tau, G_\tau) &\leq -\|\varphi(\tau; v, B, G)\|^2 + \\ \frac{N^2}{v^2} \|\varphi(\tau; v, B, G)\| (A + \varepsilon_0 \|\varphi(\tau; v, B, G)\|) &\leq \\ \|\varphi(\tau; v, B, G)\|^2 \left(-1 + \varepsilon_0 \frac{N^2}{v} + \frac{N^2 A}{v} \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $V(\varphi(t; v, B, G), B_t, G_t) < V(v, B, G)$ . Так же, как и в теореме 5.2.88, доказывается нелокальная продолжаемость вправо всех решений уравнения (5.2.225), а их единственность следует из условия Липшица для  $F$ . Для завершения доказательства теоремы остается сослаться на теорему 5.2.88 (см. также теорему 5.1.81).

**Замечание 5.2.32.** *а. Теорема 5.2.89 по существу совпадает с теоремой 3.5.61, которая получена с помощью ряда априорных оценок. Однако теорема 3.5.61 имеет место также для уравнений, заданных в произвольном банаховом пространстве.*

*б. Теорема 5.2.90 остается справедливой и в том случае, если условие 4. заменить следующим условием:  $\|F(t, u)\| \leq A + B\|u\|^\alpha$  ( $\forall u \in E^n, t \in \mathbb{R}$ ), где  $A$  и  $B$  некоторые положительные числа и  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Доказательство этого утверждения получается по той же схеме, что и теоремы 5.2.89, при этом в доказательстве нужно выбрать  $r$  так, чтобы выполнять условие:  $r > r_0$ , где  $r_0$  – решение уравнения  $Ar^{-1} + Br^{\alpha-1} = \nu^2 N^{-2}$ .*

*с. Отметим, что утверждение пункта б., вообще говоря, не имеет места, если  $\alpha > 1$ . Сказанное подтверждается примером  $\dot{x} = -x + x^3$ .*

**Теорема 5.2.90.** Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  удовлетворяет условию Липшица,  $H(f)$  компактно и существует  $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$  ( $\dot{A}(t) := \frac{dA(t)}{dt}$ );
- (2)  $A(t) = A^*(t)$  и  $\alpha\|u\|^2 \leq \langle A(t)u, u \rangle \leq \beta\|u\|^2$   $u \in E^n, t \in \mathbb{R}$  и  $\alpha, \beta > 0$ ;
- (3)  $\langle \dot{A}(t)u, u \rangle \leq 0$  ( $u \in E^n, t \in \mathbb{R}$ );
- (4) существует  $r > 0$  такое, что  $Re \langle A(t)u, f(t, u) \rangle \leq -\gamma(\|u\|)$  при всех  $u \in E_r^n$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ , где  $\gamma(s) > 0$  при  $s \geq r$ .

Тогда уравнение (5.2.214) диссипативно.

*Доказательство.* Согласно теореме 5.2.88 функция  $f$  регулярна. Пусть  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.2.214) (см. пример 11) и  $g \in H(f)$ . Существует  $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_f$  такая, что  $g = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{t_k}$  и по условию теоремы  $\{A_{t_k}\}$  сходится. Обозначим ее предел через  $B_g$ . Определим теперь на  $X_r := E_r^n \times Y$  функцию  $V$  по следующему правилу  $V(v, g) = \langle B_g(0)v, v \rangle$  для



любого  $v \in E_r^n$  и  $g \in H(f)$ . Отметим, что  $B_g$  определяется однозначно по функции  $g \in H(f)$ , ибо  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_A$ . Непрерывность  $V$  доказывается так же, как и в теоремах 5.2.86 и 5.2.87.

Пусть теперь  $\|\varphi(\tau, v, g)\| \geq r$  при всех  $\tau \in [0, t]$  ( $t > 0$ ). Вычислим производную  $V(\varphi(\tau, v, g), g_\tau)$  по  $\tau \in \mathbb{R}$ . Для этого заметим, что из включения  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$  следует равенство

$$(5.2.233) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt}(\varphi(\tau, v, g), g_\tau) &= \frac{d}{d\tau} \langle B(\tau)\varphi(\tau, v, g), \varphi(\tau, v, g) \rangle = \\ &\langle \dot{B}(\tau)\varphi(\tau, v, g), \varphi(\tau, v, g) \rangle + 2\operatorname{Re} \langle B(\tau)\varphi(\tau, v, g), \\ &g(\tau, \varphi(\tau, v, g)) \rangle. \end{aligned}$$

Из условий 1.–4. теоремы получаем

$$(5.2.234) \quad \langle \dot{B}(t)v, v \rangle \leq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \langle B(t)v, g(t, v) \rangle \leq -\gamma(\|v\|)$$

при всех  $v \in E_r^n$ ,  $B \in H(A)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  и  $g \in H(f)$ . Из (5.2.233) и (5.2.234) следует, что  $\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau, v, g), g_\tau) \leq -2\gamma(\|\varphi(\tau, v, g)\|)$ , поэтому  $V(\varphi(\tau, v, g), g_\tau) < V(v, g)$  при всех  $v \in E_r^n$  и  $g \in H(f)$ . Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на следствие 42 и теорему 5.1.81.

**СЛЕДСТВИЕ 44.** *Если уравнение (5.2.214)  $\tau$ -периодично и выполняются условия теоремы 5.2.88, то уравнение (5.2.214) имеет хотя бы одно  $\tau$ -периодическое решение.*

Частный случай следствия 44 анонсирован в работе [175].

**СЛЕДСТВИЕ 45.** *Пусть  $a_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Если  $H(a_i)$  компактно ( $i = \overline{0, 2n+1}$ ) и  $a_{2n+1}(t) \leq -\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ , то уравнение*

$$(5.2.235) \quad \dot{v}(t) = a_0(t) + a_1(t)v + \dots + a_{2n+1}v^{2n+1}$$

*диссипативно.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.2.88. Для этого достаточно в качестве  $A(t)$  взять единичный оператор и заметить, что

$$\begin{aligned} \langle A(t)v, f(t, v) \rangle &= v(a_0(t) + a_1(t)v + \dots + a_{2n+1}(t)v^{2n+1}) = \\ &v^{2n+2} \left( a_{2n+1}(t) + \frac{a_{2n}(t)}{v} + \dots + \frac{a_0(t)}{v^{2n+1}} \right) \leq -\frac{\alpha}{2} v^{2n+2} \end{aligned}$$

при всех  $|v| \geq r$  и  $t \in \mathbb{R}$  и при достаточно большом  $r > 0$ .

**СЛЕДСТВИЕ 46.** *Если функции  $a_i$  ( $i \in \overline{0, 2n+1}$ )  $\tau$ -периодичны и  $a_{2n+1}(t) > 0$  при всех  $t \in [0, \tau]$ , то уравнение (5.2.235) имеет хотя бы одно  $\tau$ -периодическое решение.*

Отметим, что в случае, когда  $a_{2n+1}(t) < 0$  ( $t \in [0, \tau]$ ) по следствию 46 уравнение (5.2.235) диссипативно и, следовательно, по теореме 2.3 из [74] оно имеет хотя бы одно  $\tau$ -периодическое решение. Случай  $a_{2n+1}(t) > 0$  ( $t \in [0, \tau]$ ) сводится к предыдущему заменой  $t$  на  $-t$ .

В случае, когда  $a_{2n+1} \equiv 1$  следствие 46 совпадает с результатом, установленным в [74, с.126].

**СЛЕДСТВИЕ 47.** Пусть  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  непрерывно дифференцируема. Если  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leq -m < 0$  ( $i \in \overline{1, n}$ ),  $H(f)$  компактно и функции  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$  ограничены, то уравнение (5.2.214) диссипативно.

*Доказательство.* Из равенства

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^{x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i + f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

в условиях следствия 47, следует что при всех  $x \in \mathbb{R}^n$  выполняется неравенство  $x_i f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq -m x_i^2 + M |x_i|$ , поэтому

$$(5.2.236) \quad \begin{aligned} \langle x, f(t, x) \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i f_i(t, x) \\ &\leq -m \|x\|^2 + Mn \|x\| \leq -\frac{m}{2} \|x\|^2 \end{aligned}$$

при всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $\|x\| \geq \frac{2Mn}{m}$ . Согласно теореме 5.2.85 уравнение (5.2.214) диссипативно.

Отметим, что в случае периодичности  $f$  следствие 47 хорошо известно [74]. Когда  $f$  непериодично утверждение, близкое к следствию 47 установлено в [191] при некоторых дополнительных ограничениях на  $f$ .

**Теорема 5.2.91.** Пусть для каждого уравнения (5.2.215) при  $g \in \Sigma_f := \{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$  выполнено условие единственности. Для диссипативности уравнения (5.2.214) достаточно существования функции  $V : \mathbb{R} \times E_r^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $r > 0$ ) удовлетворяющей условиям:

- (1)  $V$  удовлетворяет условию Липшица;
- (2)  $a(\|u\|) \leq V(t, u) \leq b(\|u\|)$  ( $a, b \in \mathfrak{A}$ ,  $Im a = Im b$ ) при  $u \in E_r^n$ ;
- (3)  $\dot{V}_f(t, u) := \limsup_{\tau \downarrow 0} \tau^{-1} [V(t + \tau, u + \tau f(t, u)) - V(t, u)] \leq -c(\|u\|)$  при  $u \in E_r^n$ , где  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  непрерывно и  $c(s) > 0$  при  $s > r$ .

*Доказательство.* Так же, как и в теореме 5.2.88, можно показать, что решение  $\varphi(\cdot, u, f_\tau)$  уравнения (5.2.215) ( $g = f_\tau$ ), проходящее через  $u$  при  $t = 0$  продолжаемо вправо на всю полуось  $\mathbb{R}_+$ . Положим  $Y := \Sigma_f$  и через  $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$  обозначим динамическую систему определенную по следующему правилу:  $\pi^t(u, f_\tau) := (\varphi(t, u, f_\tau), f_{\tau+t})$  при всех  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $u \in E^n$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ . Определим на  $X_r := E_r^n \times Y$  функцию  $\mathcal{V}$  равенством  $\mathcal{V}(u, f_\tau) := V(\tau, u)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\pi^t(u, f_\tau)) &= \mathcal{V}(\varphi(t, u, f_\tau), f_{t+\tau}) = V(t + \tau, \varphi(t, u, f_\tau)) = \\ &= V(s, \varphi(s - \tau, u, f_\tau)) = V(s, X(s; u, \tau)) \quad (s = t + \tau) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_\pi(u, f_\tau) &= \limsup_{t \downarrow 0} t^{-1} [\mathcal{V}(\pi^t(u, f_\tau)) - \mathcal{V}(u, f_\tau)] \\ &= \limsup_{s-\tau \downarrow 0} (s-\tau)^{-1} [V(s, x(s; u, \tau)) - V(\tau, x(\tau; u, \tau))] \\ &= \dot{V}_f(\tau, x(\tau; u, \tau)) = \dot{V}_f(\tau, u) \leq -c(\|u\|) \quad (\|u\| \geq r).\end{aligned}$$

Согласно теореме 5.1.82 неавтономная динамическая система

$$\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle \quad (h = pr_2 : X \rightarrow Y)$$

диссипативна и, следовательно, существует  $R > 0$  и  $l(u, \tau) > 0$  такие, что  $\|\varphi(t, u, f_\tau)\| < R$  при всех  $u \in E^n$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  и  $t \geq l(u, \tau)$ . Так же как и в [28] можно показать, что число  $l(u, \tau) > 0$  можно выбрать не зависящим от  $\tau \in \mathbb{R}$ . Рассуждая также как, и при доказательстве леммы 35, получаем, что уравнения (5.2.214) диссипативно.

Отметим, что теорема 5.2.91 уточняет известную теорему Йошизавы [28],[209]–[210].

### 5.3. Теорема Барбашина–Красовского для неавтономных динамических систем

Идеи и методы, которые нами применились при изучении диссипативных систем в первых двух параграфах гл. 5 позволяют сформулировать и доказать ряд утверждений об устойчивости неавтономных динамических систем и, в частности, обобщить известную теорему Барбашина–Красовского [14] об асимптотической устойчивости.

Пусть  $(X, h, Y)$  – конечномерное векторное расслоение,  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  – неавтономная динамическая система,  $\theta_y \in X_y := h^{-1}(y)$  – нулевой элемент ( $|\theta_y| = 0$ ) и  $\Theta := \{\theta_y : y \in Y\}$  – нулевое сечение векторного расслоения  $(X, h, Y)$ . Ниже всюду будем предполагать, что нулевое сечение  $\Theta$  инвариантно, т.е.  $\Theta \subseteq X$  является инвариантным множеством динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

Напомним, что нулевое сечение  $\Theta$  равномерно устойчиво, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $y \in Y$ ,  $x \in X_y$  и  $|x| < \delta$  влечет  $|xt| < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ .

Если  $\Theta$  равномерно устойчиво и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |xt| = 0$  при всех  $x \in X$ , то нулевое сечение называют равномерно асимптотически устойчивым в целом.

**Теорема 5.3.92.** *Пусть  $Y$  компактно. Для того чтобы нулевое сечение  $\Theta$  было равномерно асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая условиям:*

1.  $V(x) \geq a(|x|)$  при всех  $x \in X$ ,  $V(\theta_y) = 0$  при всех  $y \in Y$  и  $Im a = Im V$ , где  $a \in \mathfrak{A}$ ;
2.  $V(xt) \leq V(x)$  при всех  $x \in X$  и  $t \geq 0$ ;

3. линии уровня  $V$  не содержат ненулевых  $\omega$ -предельных точек динамической системы  $(X, \mathbb{T}, \pi)$ .

*Доказательство.* Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что нулевое сечение  $\Theta$  равномерно устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $|x_n| < \delta$ ,  $\delta_n \downarrow 0$  и  $t_n \geq 0$  такие, что

$$(5.3.237) \quad |x_n t_n| \geq \varepsilon_0.$$

С другой стороны,  $0 \leq a(|x_n t_n|) \leq V(x_n t_n) \leq V(x_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  и, следовательно,  $|x_n t_n| \rightarrow 0$ . Последнее противоречит соотношению (5.3.237).

Теперь покажем, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |xt| = 0$  при всех  $x \in X$ . Действительно, если допустить противное, то найдется  $x_0 \in X$  ( $|x_0| \neq 0$ ) такое, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup |x_0 t| > 0$ , т.е. существуют  $\varepsilon_0 > 0$  и  $t_n \rightarrow +\infty$ , для которых

$$(5.3.238) \quad |x_0 t_n| \geq \varepsilon_0.$$

Заметим, что  $\Sigma_{x_0}^+$  относительно компактно. Действительно,  $a(|x_0 t|) \leq V(x_0 t) \leq V(x_0)$  и, следовательно,  $|x_0 t| \leq a^{-1}(V(x_0))$  при всех  $t \geq 0$ . Таким образом последовательность  $\{x_0 t_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $\tilde{x} := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 t_n$ , тогда  $\tilde{x} \in \omega_{x_0}$ . Рассуждая так же, как и в теореме 5.1.80, можно показать, что существует  $c \geq 0$  для которого  $V(x) = c$  при всех  $x \in \omega_{x_0}$ . Так как  $\tilde{x} \in \omega_{x_0}$  и  $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 t_n$ , то из (5.3.238) следует, что  $|\tilde{x}| > 0$ , поэтому  $c = V(\tilde{x}) \geq a(|\tilde{x}|) > 0$ . Таким образом, линии уровня функции  $V$  содержат ненулевые  $\omega$ -предельные точки, что противоречит условию теоремы. Тем самым равномерная асимптотическая устойчивость в целом нулевого сечения доказана.

*Необходимость.* Пусть нулевое сечение  $\Theta$  равномерно асимптотически устойчиво в целом. Функцию  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  определим равенством (5.1.198). Непосредственно из определения  $V$  следует, что она удовлетворяет условиям 1. и 2. теоремы. Покажем, что она непрерывна. Для этого заметим, что в условиях теоремы неавтономная система  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  диссипативна. Покажем, что  $J \subseteq \Theta$ , где  $J$  – центр Левинсона  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ . Действительно, если  $x \in J$ , то согласно теореме 1.1.2 полутраектория  $\Sigma_x^+$  продолжаема влево, т.е. существует непрерывное отображение  $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow J$  такое, что  $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t + s)$  при всех  $t \in \mathbb{T}_1$ ,  $s \in \mathbb{S}$  и  $\varphi(0) = x$ . Так как  $J$  компактно, то множество  $\alpha$ -предельных точек  $\alpha_{\varphi_x}$  движения  $\varphi$  непусто, компактно и инвариантно. Очевидно  $\alpha_{\varphi_x} \cap \Theta \neq \emptyset$  и, следовательно, существует  $t_n \rightarrow -\infty$  такая, что  $|\varphi(t_n)| \rightarrow 0$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $\delta(\varepsilon) > 0$  выбрано из условия равномерной устойчивости  $\Theta$ . Тогда при достаточно больших  $n$  имеем  $|\varphi(t_n)| < \delta$  и, следовательно,  $|\pi^t \varphi(t_n)| = |\varphi(t + t_n)| < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ . В частности,  $|x| = |\varphi(t_n - t_n)| < \varepsilon$  и в силу произвольности  $\varepsilon$  имеем  $|x| = 0$  т.е.  $J \subseteq \Theta$ .

Покажем теперь, что при любом  $r > 0$  имеет место равенство

$$(5.3.239) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq r} |xt| = 0.$$

Допустим, что это не так, тогда найдутся  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $r_0 > 0$ ,  $|x_n| < r_0$  и  $t_n \rightarrow +\infty$  такие, что

$$(5.3.240) \quad |x_n t_n| \geq \varepsilon_0.$$

В силу диссипативности системы  $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$  последовательность  $\{x_n t_n\}$  можно считать сходящейся. Положим  $x_0 := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n t_n$  и заметим, что  $x_0 \in J$ , поэтому  $|x_0| = 0$ . Последнее противоречит (5.3.240). Итак, соотношение (5.3.239) имеет место. Непрерывность  $V$  устанавливается дословным повторением рассуждений теоремы 5.1.80, но при этом вместо (5.1.199) следует воспользоваться условием (5.3.239).

Что касается третьего условия, то оно проверяется также, как и в теореме 5.1.80. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 5.3.92 остается справедливой, если в ней  $X$  заменить на некоторую трубчатую окрестность  $U_r := \{x \in X : |x| \leq r\}$  ( $r > 0$ ) нулевого сечения  $\Theta$ .

Нулевое сечение  $\Theta$  называют равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и существует  $r > 0$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |xt| = 0$  при всех  $x \in U_r$ .

Незначительно изменив доказательство теоремы 5.3.92, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 5.3.93.** Пусть  $Y$  компактно. Для того чтобы нулевое сечение  $\Theta$  было равномерно асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали  $r > 0$  и непрерывная функция  $V : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V(x) \geq a(|x|)$  при всех  $x \in U_r$ ,  $V(\theta_y) = 0$  при всех  $y \in Y$ ;
- (2)  $V(xt) \leq V(x)$ , если  $x\tau \in U_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ ;
- (3) линии уровня  $V$  не содержат ненулевых  $\omega$ -предельных точек динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

**Замечание 5.3.33.** Также, как и в лемме 53, можно показать, что в теореме 5.3.93 условие 3. можно заменить следующим: линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий динамической системы  $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ .

Наконец, отметим, что имеет место

**Теорема 5.3.94.** Для того чтобы нулевое сечение  $\Theta$  было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали  $r > 0$  и функции  $V : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V(x) \geq a(|x|)$  при всех  $x \in U_r$  и  $\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) = 0$ ;
- (2)  $V(xt) \leq V(x)$ , если  $x\tau \in U_r$  при всех  $\tau \in [0, t]$ .

*Доказательство.* Достаточность. Покажем, что нулевое сечение равномерно устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют  $\varepsilon_0 > 0$  ( $\varepsilon_0 < r$ ),  $\delta_n \downarrow 0$ ,  $|x_n| < \delta_n$  и  $t_n \geq 0$  такие, что  $x_n \tau \in U_r$  при всех  $\tau \in [0, t_n]$  и

$$(5.3.241) \quad |x_n t_n| \geq \varepsilon_0.$$

Заметим, что

$$(5.3.242) \quad a(\varepsilon_0) \leq a(|x_n t_n|) \leq V(x_n t_n) \leq V(x_n).$$

Переходя к пределу в (5.3.242) при  $n \rightarrow +\infty$ , получим  $a(\varepsilon_0) \leq 0$  и, следовательно,  $\varepsilon_0 = 0$ . Последнее противоречит выбору  $\varepsilon_0$ . Таким образом, равномерная устойчивость  $\Theta$  доказана.

Необходимость. Пусть  $\Theta$  равномерно устойчиво. Для  $\varepsilon_0 = 1$  подберем  $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0) > 0$  ( $\delta_0 \leq 1$ ) из условия равномерной устойчивости  $\Theta$ . Положим  $r := \delta_0$  и определим  $V : U_r \rightarrow \mathbb{R}_+$  равенством (5.1.198). Нетрудно убедиться, что функция  $V$  является искомой, т.е. удовлетворяет условиям 1. и 2. теоремы 5.3.94. Теорема доказана.

**Замечание 5.3.34.** В условиях теоремы 5.3.94 функция  $V$ , вообще говоря, не является непрерывной в отличие от теорем 5.3.92 и 5.3.93.

Из приведенных в этом параграфе теорем можно получить соответствующие утверждения для уравнения (5.2.214). Предварительно приведем следующие определения.

Пусть  $f(t, 0) \equiv 0$  и функция  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  регулярна. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (5.2.214) равномерно устойчиво, если для любых  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $g \in H(f)$ ,  $\|v\| < \delta$  влечет  $\|\varphi(t, v, g)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$ .

Если нулевое решение уравнения (5.2.214) равномерно устойчиво и существует  $\gamma > 0$  такое, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, v, g)\| = 0$  при всех  $g \in H(f)$  и  $v \in B(0, \gamma)$ , то нулевое решение уравнения (5.2.214) назовем равномерно асимптотически устойчивым.

Наконец, нулевое решение (5.2.214) назовем равномерно асимптотически устойчивым в целом, если оно равномерно устойчиво и  $\|\varphi(t, v, g)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  каковы бы ни были  $g \in H(f)$  и  $v \in E^n$ .

Отметим, что из результатов работ [136],[197] следует эквивалентность общепринятого определения равномерной асимптотической устойчивости (равномерной асимптотической устойчивости в целом) и приведенного выше.

Из теорем 5.3.92, 5.3.93 и замечания 5.3.33 следуют

**Теорема 5.3.95.** Пусть  $H(f)$  компактно и  $f(t, 0) \equiv 0$ . Для того чтобы нулевое решение уравнения (5.2.214) было равномерно асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция  $V : H(f) \times E^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V(g, v) \geq a(\|v\|)$  при всех  $v \in E^n$ ,  $V(g, 0) = 0$ ,  $g \in H(f)$  и  $Im a = Im V$ , где  $a \in \mathfrak{A}$ ;
- (2)  $V(g_\tau, \varphi(\tau, v, g)) \leq V(g, v)$  при всех  $g \in H(f)$ ,  $v \in E^n$  и  $\tau \geq 0$ ;
- (3) какова бы ни была функция  $g \in H(f)$  линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.2.215), кроме тривиальной.

**Теорема 5.3.96.** Пусть  $H(f)$  компактно и  $f(t, 0) \equiv 0$ . Для того чтобы нулевое решение уравнения (5.2.214) было равномерно асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали и непрерывная функция  $V : H(f) \times B(0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V(g, v) \geq a(\|v\|)$  и  $V(g, 0) = 0$  при всех  $g \in H(f)$  и  $x \in B(0, r_0)$ , где  $a \in \mathfrak{A}$ ;
- (2)  $V(g_t, \varphi(t, v, g)) \leq V(g, v)$ , если  $\varphi(t, v, g) \in B(0, r_0)$  при всех  $t \in [0, t]$ ;
- (3) каковы бы ни была функция  $g \in H(f)$  линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.2.215), кроме тривиальной.

Из теорем 5.3.95 и 5.3.96 можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости, удобные для приложений.

**Теорема 5.3.97.** Пусть  $H(f)$  компактно,  $f(t, 0) \equiv 0$  и существует непрерывно дифференцируемая функция  $V \in C(\mathbb{R} \times E^n, \mathbb{R}_+)$ , удовлетворяющая условиям:

- (1)  $a(\|u\|) \leq V(t, u) \leq b(\|u\|)$  ( $a, b \in \mathfrak{A}$ ,  $Im a = Im b$ ) при всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $u \in E^n$ ;
- (2)  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V \cap \mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}} \cap \mathfrak{M}_{grad_u V}$ ;
- (3)  $\dot{V}_f(t, u) := \frac{\partial}{\partial t} V(t, u) + \langle grad_u V, f \rangle \leq 0$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in E^n$ );
- (4) какова бы ни была функция  $g \in H(f)$  линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.2.215), кроме тривиальной.

Тогда нулевое решение уравнения (5.1.198) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

**Теорема 5.3.98.** Пусть  $r > 0$ ,  $H(f)$  компактно,  $f(t, 0) \equiv 0$  и существует непрерывно дифференцируемая функция

$$V \in C(\mathbb{R} \times B(0, r), \mathbb{R}_+),$$

удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $a(\|u\|) \leq V(t, u) \leq b(\|u\|)$  ( $a, b \in \mathfrak{A}$ ) при всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $x \in B(0, r)$ ;
- (2)  $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V \cap \mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}} \cap \mathfrak{M}_{grad_u V}$ ;

$$(3) \dot{V}_f(t, u) := \frac{\partial}{\partial t} V(t, u) + \langle \text{grad}_u V(t, u), f(t, u) \rangle \leq 0 \quad (t \in \mathbb{R}, u \in E^n);$$

- (4) *какова бы ни была функция  $g \in H(f)$  линии уровня функции  $V$  не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.2.215), кроме тривиальной.*

*Тогда нулевое решение уравнения (5.1.198) равномерно асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Доказательство теорем 5.3.97 и 5.3.98 строится по той же схеме, как и в теореме 5.2.88.

Утверждения, близкие к теореме 5.3.98, получены в работах [3], [37].

#### 5.4. Уравнения с конвергенцией

1. Приведем критерии конвергентности уравнения (5.2.214), получающиеся из теорем 2.4.31, 2.4.36 и 2.4.37, следствия 11 и теорем 2.5.40 и 2.5.41, применяя последние к неавтономной динамической системе, порожденной уравнением (5.2.214).

**Теорема 5.4.99.** *Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $u$  на компактах из  $E^n$  [132]. Для того чтобы уравнение (5.2.214) было конвергентным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- (1) *уравнение (5.2.214) имеет хотя бы одно ограниченное на  $\mathbb{R}_+$  решение;*
- (2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, v_1, g) - \varphi(t, v_2, g)\| = 0$  *при всех  $g \in H(f)$  и  $v_1, v_2 \in E^n$ ;*
- (3) *для любых  $\varepsilon > 0$  и  $r > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$  такое, что  $\|v_1 - v_2\| < \delta$  ( $\|v_1\|, \|v_2\| < \delta$ ) влечет  $\|\varphi(t, v_1, g) - \varphi(t, v_2, g)\| < \varepsilon$  при всех  $t \geq 0$  и  $g \in H(f)$ .*

Отметим, что, в случае почти периодичности функции  $f$ , теорема 5.4.99 обобщает и уточняет критерий почти периодической конвергенции В.И. Зубова [34].

**Теорема 5.4.100.** *Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $u$  на компактах из  $E^n$ . Для того чтобы уравнение (5.2.214) было конвергентным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) *уравнение (5.2.214) имеет хотя бы одно ограниченное на  $\mathbb{R}_+$  решение;*
- 2) *Каковы бы ни были  $g \in H(f)$  и  $v \in E^n$  решение  $\varphi(\cdot, v, g)$  уравнения (5.2.215) асимптотически устойчиво.*

В случае периодичности функции  $f$  теорема 5.4.100 совпадает с теоремой Н.Н. Красовского - В.А. Плисса [74].



**Теорема 5.4.101.** Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $u$  на компактах из  $E^n$  и уравнение (5.2.214) диссипативно. Для того чтобы уравнение (5.2.214) было конвергентным, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция  $V : H(f) \times E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $V$  положительно определена, то есть  $V(g, v_1, v_2) = 0$  ( $g \in H(f)$  и  $v_1, v_2 \in E^n$ ) тогда и только тогда, когда  $v_1 = v_2$ ;
- 2)  $V(g_t, \varphi(t, v_1, g), \varphi(t, v_2, g)) \leq V(g, v_1, v_2)$  при всех  $t \geq 0$ ,  $v_1, v_2 \in E^n$  и  $g \in H(f)$ ;
- 3)  $V(g_t, \varphi(t, v_1, g), \varphi(t, v_2, g)) = V(g, v_1, v_2)$  при всех  $t \geq 0$  тогда и только тогда, когда  $v_1, v_2 \in E^n$ .

В случае периодичности функции  $f$  теорема 5.4.101 совпадает с теоремами 7.2 и 7.3 из [74].

**Теорема 5.4.102.** Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$  рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $u$  на компактах из  $E^n$  и уравнение (5.2.214) диссипативно. Для того чтобы уравнение (5.2.214) было конвергентным, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция  $V : H(f) \times E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1)  $V$  положительно определена;
- (2)  $V(g_t, \varphi(t, v_1, g), \varphi(t, v_2, g)) < V(g, v_1, v_2)$  при всех  $t > 0$ ,  $g \in H(f)$  и  $v_1, v_2 \in E^n$ ,  $v_1 \neq v_2$ ;

2. Пусть  $E$  – банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|$  и  $[E]$  – банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из  $E$  в  $E$ , снабженное операторной нормой.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$(5.4.243) \quad \dot{u} = A(t)u + f(t),$$

где  $A \in C(\mathbb{R}, [E])$  и  $f \in C(\mathbb{R}, E)$ . Наряду с уравнением (5.4.243) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$(5.4.244) \quad \dot{u} = A(t)u$$

и обозначим через  $U(t, A)$  оператор Коши для уравнения (5.4.244).

В этом параграфе мы будем предполагать, что множества  $H(A)$  и  $H(f)$  компактны, соответственно в  $C(\mathbb{R}, [E])$  и  $C(\mathbb{R}, E)$ , хотя некоторые из приводимых ниже утверждений имеют место и без этого условия.

**Лемма 54.** Для того чтобы уравнение (5.4.243) было конвергентным, необходимо и достаточно существование положительных чисел  $\mathcal{N}$  и  $\nu$  таких, что

$$(5.4.245) \quad \|U(t, A)U^{-1}(\tau, A)\| \leq \mathcal{N} \exp^{-\nu(t-\tau)}$$

при всех  $t \geq \tau$  ( $t, \tau \in \mathbb{R}$ ).

*Доказательство.* Сформулированное утверждение следует из определения конвергентности и того, что равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (5.4.244) эквивалентна условию (5.4.245).

**Лемма 55.** *Отображение  $U : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, [E]) \rightarrow [E]$  ( $U : (t, A) \rightarrow U(t, A)$ ) непрерывно по  $A$  равномерно по  $t \in \mathbb{R}$  на компактах из  $\mathbb{R}$ , то есть для любого  $\ell > 0$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{|t| \leq \ell} \|U(t, A_n) - U(t, A)\| = 0$ , если  $A_n \rightarrow A$  в  $C(\mathbb{R}, [E])$ .*

*Доказательство.* Пусть  $A_n \subset C(\mathbb{R}, [E])$ ,  $A_n \rightarrow A$  равномерно на компактах из  $\mathbb{R}$  и  $\ell > 0$ . Тогда существует положительное число  $M(\ell)$  такое, что

$$(5.4.246) \quad \max_{|t| \leq \ell} \|A_n(t)\| \leq M(\ell).$$

Так как  $U(t, A_n)$  является решением системы

$$\begin{cases} \dot{U}(t, A_n) = A_n(t)U(t, A_n) \\ U(0, A_n) = Id_E, \end{cases}$$

где  $Id_E$  – единичный оператор в  $E$ , то имеем

$$\|U(t, A_n)\| \leq \exp\left(\int_{t_0}^t \|A_n(s)\| ds\right) \quad (t > t_0, \quad t, t_0 \in [-\ell, \ell]).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\max_{|t| \leq \ell} \|U(t, A_n)\| \leq \exp(2\ell M(\ell)) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При каждом  $n \in \mathbb{N}$  функция  $V_n(t) := U(t, A) - U(t, A_n)$  удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dot{V}_n(t) = A(t)V_n(t) + [A(t) - A_n(t)]U(t, A_n) \\ V_n(0) = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$(5.4.247) \quad V_n(t) = U(t, A) \int_0^t U^{-1}(\tau, A)[A_n(\tau) - A(\tau)]U(\tau, A_n) d\tau.$$

Пусть  $K(\ell) := \max_{|t| \leq \ell} \{\|U(t, A)\|, \|U^{-1}(t, A)\|\}$ . Из (5.4.246) и (5.4.247) следует неравенство

$$(5.4.248) \quad \max_{|t| \leq \ell} \|V_n(t)\| \leq K^2(\ell) 2\ell \exp(2\ell M(\ell)) \max_{|t| \leq \ell} \|A_n(t) - A(t)\|.$$

Переходя к пределу в (5.4.248) при  $n \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{|t| \leq \ell} \|U(t, A) - U(t, A_n)\| = 0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 56.** Пусть  $\mathcal{N} > 0$  и  $\nu > 0$  таковы, что выполнено неравенство (5.4.245). Тогда при всех  $B \in H(A)$ ,  $t \geq \tau$  и  $\tau \in \mathbb{R}$  имеет место неравенство

$$(5.4.249) \quad \|U(t, B)U^{-1}(\tau, B)\| \leq \mathcal{N} \exp(-\nu(t - \tau)),$$

где  $U(t, B)$  – оператор Коши уравнения

$$(5.4.250) \quad \dot{y} = B(t)y \quad (B \in H(A)).$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{N} > 0$  и  $\nu > 0$  таковы, что выполнено неравенство (5.4.245), и  $B \in H(A)$ . Тогда существует  $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$  такая, что  $A_{\tau_n} \rightarrow B$  в  $C(\mathbb{R}, [E])$ . Заметим, что  $U(t + \tau, A) = U(t, A_\tau)U(\tau, A)$  при всех  $t, \tau \in \mathbb{R}$  и  $A \in C(\mathbb{R}, [E])$ , поэтому

$$\begin{aligned} U(t, A_{\tau_n})U^{-1}(\tau, A_{\tau_n}) &= \\ U(t, A_{\tau_n})U(\tau_n, A)U^{-1}(\tau_n, A)U^{-1}(\tau, A_{\tau_n}) &= \\ U(t + \tau_n, A)U^{-1}(t + \tau_n, A). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\|U(t, A_{\tau_n})U^{-1}(\tau, A_{\tau_n})\| \leq \mathcal{N} \exp(-\nu(t - \tau)) \quad (t \geq \tau, n = 1, 2, \dots).$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при  $n \rightarrow +\infty$  и учитывая лемму 55, получим неравенство (5.4.249). Лемма доказана.

**Лемма 57.** Пусть выполнено условие (5.4.245). Тогда при каждом  $B \in H(A)$  и  $p \geq 1$  равенством

$$(5.4.251) \quad \|v\|_{B,p} = \left\{ \int_0^{+\infty} \|U(t, B)v\|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

на  $E$  определяется норма, топологически эквивалентная старой норме, причем

$$(5.4.252) \quad \begin{aligned} &\|U(\tau, B)v_1 - U(\tau, B)v_2\|_{B,p} \\ &\leq \mathcal{N} \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}} \exp(-\nu\tau) \|v_1 - v_2\|_{B,p} \end{aligned}$$

при всех  $\tau \geq 0$ .

*Доказательство.* Из неравенства Минковского следует, что равенством (5.4.251) определяется некоторая норма на  $E$ . Покажем, что существуют положительные числа  $m_p$  и  $M_p$ , не зависящие от  $B \in H(A)$ , такие, что  $m_p \|v\| \leq \|v\|_{B,p} \leq M_p \|v\|$ . Первое неравенство следует из (5.4.245) и неравенства

$$\begin{aligned} \|v\|_{B,p}^p &= \int_0^{+\infty} \|U(t, B)v\|^p dt \leq \int_0^{+\infty} \|U(t, B)\|^p dt \|v\|^p \leq \\ \mathcal{N}^p \int_0^{+\infty} \exp(-\nu pt) dt \|v\|^p &= \frac{\mathcal{N}^p}{\nu p} \|v\|^p. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как  $U(-\tau, B_\tau)U(\tau, B)v = v$  при всех  $\tau \in \mathbb{R}$  и  $v \in E$ , то

$$\|v\| = \|U(-\tau, B_\tau)U(\tau, B)v\| \leq \|U(-\tau, B_\tau)\| \|U(\tau, B)v\| \leq \exp(a\tau) \|U(\tau, B)v\| \quad (a := \sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|v\|_{B,p}^p &= \int_0^{+\infty} \|U(t, B)v\|^p dt \geq \int_0^{+\infty} (\exp(-at)\|v\|)^p dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-apt) dt \|v\|^p = \frac{1}{ap} \|v\|^p \end{aligned}$$

( $m_p = (ap)^{-\frac{1}{p}}$ ). Таким образом,

$$(5.4.253) \quad (ap)^{-\frac{1}{p}} \|v\| \leq \|v\|_{B,p} \leq \mathcal{N}(\nu p)^{-\frac{1}{p}} \|v\|.$$

Установим теперь неравенство (5.4.252). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \|U(\tau, B)v_1 - U(\tau, B)v_2\|_{B_\tau,p}^p &= \\ &= \int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)[U(\tau, B)v_1 - U(\tau, B)v_2]\|^p dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)U(\tau, B)(v_1 - v_2)\|^p dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \|U(t + \tau, B)(v_1 - v_2)\|^p dt = \int_\tau^{+\infty} \|U(s, B)(v_1 - v_2)\|^p ds \\ &\leq \int_\tau^{+\infty} \mathcal{N}^p \exp(-\nu ps) \|v_1 - v_2\|^p ds = \frac{\mathcal{N}^p}{\nu p} \exp(-\nu p\tau) \|v_1 - v_2\|^p \\ &\leq \frac{\mathcal{N}^p ap}{\nu p} \exp(-\nu p\tau) \|v_1 - v_2\|_{B,p}^p. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует (5.4.252). Лемма доказана.

Оказывается, если уравнение (5.4.243) конвергентно, то это свойство сохраняется при малых нелинейных возмущениях.

Имеет место теорема.

**Теорема 5.4.103.** Пусть  $A$ ,  $f$  и  $F$  таковы, что  $H(A)$ ,  $H(f)$  и  $H(F)$  компактны в  $C(\mathbb{R}, [E])$ ,  $C(\mathbb{R}, E)$  и  $C(\mathbb{R} \times E, E)$  соответственно и функция  $F$  удовлетворяет условию Липшица по  $u \in E$  равномерно по  $t \in \mathbb{R}$  с достаточно малой константой Липшица ( $Lip(F) < \nu^2(\mathcal{N}a)^{-1}$ ). Тогда, если уравнение (5.4.243) конвергентно, то возмущенное уравнение

$$(5.4.254) \quad \dot{u} = A(t)u + F(t, u)$$

также конвергентно.

*Доказательство.* Обозначим через

$$H(A, f, F) := \overline{\{(A_\tau, f_\tau, F_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}}.$$

Пусть  $v \in B$ ,  $(B, g, G) \in H(A, f, F)$  и  $\tau \in \mathbb{R}$ . Через  $\varphi(\cdot, v, B, g, G)$  обозначим решение уравнения

$$(5.4.255) \quad \dot{v} = B(t)v + g(t) + G(t, v),$$

проходящее через точку  $v$  при  $t = 0$ .

В условиях теоремы уравнение (5.4.255) имеет единственное решение, определенное на  $\mathbb{R}$  и проходящее через точку  $v$  при  $\tau = 0$ , каковы бы ни были  $(B, g, G) \in H(A, f, F)$  и  $v \in E$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в условиях теоремы 5.4.103 применима теорема 1.2 [25] (глобальная теорема существования и единственности) к (5.4.255).

Положим  $Y := H(A, f, F)$  и через  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$  обозначим динамическую систему сдвигов на  $Y$ . Пусть  $X := E \times Y$ . Определим на  $X$  динамическую систему по следующему правилу:

$$\pi^\tau(v; B, g, G) := (\varphi(\tau, v, B, g, G); B_\tau, g_\tau, G_\tau).$$

В условиях теоремы 5.4.103  $Y$  компактно и тройка  $\langle (X, \mathbb{R}, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ , где  $h := pr_2 : X \rightarrow Y$ , есть неавтономная динамическая система. Покажем, что к построенной динамической системе применима теорема 2.5.39 и следствие 15. Действительно, множество  $Y$  компактно по условию теоремы. Пространство непрерывных сечений  $\Gamma(H(A, f, F), B \times H(A, f, F))$ , очевидно, изоморфно пространству всех непрерывных отображений  $x : H(A, f, F) \rightarrow E$  (см. параграф 3.3) и, следовательно, оно непусто. Определим на  $X \times X$  скалярную неотрицательную функцию  $V$  по следующему правилу:

$$V((v_1; B, g, G), (v_2; B, g, G)) := \|v_1 - v_2\|_{B,1} = \int_0^{+\infty} \|U(t, B)(v_1 - v_2)\| dt$$

при любых  $(B, g, G) \in H(A, f, F)$  и  $v_1, v_2 \in E$ . Из леммы 57 следует, что построенная функция удовлетворяет условиям а.-в. теоремы 2.5.39. Пусть  $\varphi(\cdot, v_i, B, g, G)$  – решение уравнения (5.4.255), проходящее через точку  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $\tau = 0$ . Тогда имеет место тождество

$$\dot{\varphi}(\tau, v_i, B, g, G) \equiv B(\tau)\varphi(\tau, v_i, B, g, G) + g(\tau) + G(\tau, \varphi(\tau, v_i, B, g, G)).$$

Откуда следует, что

$$(5.4.256) \quad \varphi(\tau, v_i, B, g, G) = U(\tau, B)(v_i + \int_0^\tau U^{-1}(s, B)[g(s) + G(s, \varphi(s, v_i, B, g, G))] ds).$$

Из (5.4.256) и лемм 56 и 57 следует

$$\begin{aligned}
& \|\varphi(\tau, v_1, B, g, G) - \varphi(\tau, v_2, B, g, G)\|_{B_\tau} = \\
& \int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)(\varphi(\tau, v_1, B, g, G) - \varphi(\tau, v_2, B, g, G))\| dt = \\
& \int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)U(\tau, B)(v_1 - v_2 + \\
& \int_0^\tau U^{-1}(s, B)[G(s, \varphi(s, v_1, B, g, G)) - \\
& G(s, \varphi(s, v_2, B, g, G))] ds\| dt \leq \\
& \int_0^{+\infty} \|U(t + \tau, B)(v_1 - v_2)\| dt + \\
& \int_0^{+\infty} \left\| \int_0^\tau U(t + \tau, B)U^{-1}(s, B)[G(s, \varphi(s, v_1, B, g, G)) - \right. \\
& \left. G(s, \varphi(s, v_2, B, g, G))] ds\right\| dt \leq \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau) \|v_1 - v_2\| + \\
& + \int_0^{+\infty} \int_0^\tau \mathcal{N} \exp(-\nu(t + \tau - s)) \text{Lip}(G) \|\varphi(s, v_1, B, g, G) - \\
& \varphi(s, v_2, B, g, G)\| ds dt = \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau) \|v_1 - v_2\| + \\
& \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau) \text{Lip}(G) \int_0^\tau \exp(\nu s) \|\varphi(s, v_1, B, g, G) - \\
& \varphi(s, v_2, B, g, G)\| ds \leq \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau) a \|v_1 - v_2\|_{B,1} + \\
& \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \exp(-\nu\tau) \text{Lip}(G) \int_0^\tau \exp(\nu s) \|\varphi(s, v_1, B, g, G) - \\
& \varphi(s, v_2, B, g, G)\|_{B,1} ds.
\end{aligned}$$

Умножим обе части последнего неравенства на  $\exp(\nu\tau)$  и, положив  $\varphi(\tau) := \exp(\nu\tau) \|\varphi(s, v_1, B, g, G) - \varphi(s, v_2, B, g, G)\|_{B,1}$ , получим

$$(5.4.257) \quad \varphi(\tau) \leq \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \|v_1 - v_2\|_{B,1} + \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \text{Lip}(G) \int_0^\tau \varphi(s) ds.$$

Применяя к (5.4.257) неравенство Гронуолла-Белмана, получим

$$(5.4.258) \quad \varphi(\tau) \leq \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \|v_1 - v_2\|_{B,1} \exp\left(\frac{\mathcal{N}a}{\nu} \text{Lip}(G)\tau\right).$$

Следовательно,

$$(5.4.259) \quad \|\varphi(\tau, v_1, B, g, G) - \varphi(\tau, v_2, B, g, G)\|_{B,1} \leq \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \|v_1 - v_2\| \exp\left(-\left(\nu - \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \text{Lip}(G)\right)\tau\right).$$

Из неравенства (5.4.259) имеем

$$\begin{aligned} & V((\varphi(\tau, v_1, B, g, G); B_\tau, g_\tau, G_\tau)), \\ & (\varphi(\tau, v_2, B, g, G); B_\tau, g_\tau, G_\tau)) \leq \\ & M \exp(-\lambda\tau) V((v_1; B, g, G), (v_2; B, g, G)) \end{aligned}$$

(здесь:  $M = \frac{Na}{\nu}$ ,  $\lambda = -\frac{Na}{\nu} \text{Lip}(G) + \nu > 0$ ) при всех  $v_1, v_2 \in E$ ,  $\tau \geq 0$  и  $(B, g, G) \in H(A, f, F)$ . Таким образом, все условия теоремы 2.5.39 и следствия 15 выполнены. Применяя их к построенной неавтономной динамической системе, завершаем доказательство теоремы.

**СЛЕДСТВИЕ 48.** *В условиях теоремы 5.4.103, если  $A, f$  и  $F$  совместно  $\tau$ -периодичны (почти периодичны, рекуррентны), то уравнение (5.4.254) конвергентно и каждое уравнение (5.4.255) имеет единственное  $\tau$ -периодическое (почти периодическое, рекуррентное) равномерно асимптотически устойчивое в целом решение.*

Отметим, что утверждения, аналогичные леммам 56 и 57 в случае, когда оператор-функция  $A(t)$  стационарна, доказаны в [25]. Следствие 48 в случае периодичности  $A, f$  и  $F$  ( $E = \mathbb{R}^n$ ) установлено в [74, с.99].

**3.** Пусть  $H$  – вещественное или комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(5.4.260) \quad \dot{u} = f(t, u),$$

где  $f \in C(\mathbb{R} \times H, H)$ . Наряду с уравнением (5.4.260) рассмотрим его  $H$ -класс

$$(5.4.261) \quad \dot{v} = g(t, v) \quad (g \in H(f)).$$

Имеет место

**Теорема 5.4.104.** *Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times H, H)$  и множество  $H(f)$  компактно в  $C(\mathbb{R} \times H, H)$ . Если существует самосопряженная оператор-функция  $A \in C(\mathbb{R}, [H])$ , удовлетворяющая следующим условиям:*

- (1)  $\mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$ ;
- (2)  $\text{Re}\langle A(t)(u - v), f(t, u) - f(t, v) \rangle \leq -\alpha\|u - v\|$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $u, v \in H$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $H$ ,  $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$  и  $\alpha > 0$ );
- (3)  $\|\dot{A}(t)\| \leq \beta$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  ( $\beta \geq 0$ );
- (4)  $\langle A(t)u, u \rangle \geq \gamma\|u\|^2$  при всех  $t \in \mathbb{R}$  и  $u \in H$  и  $-2\alpha + \beta := -\lambda < 0$ .

Тогда уравнение (5.4.260) конвергентно, то есть

- a. каковы бы ни были  $g \in H(f)$  и  $v \in H$  существует единственное решение  $\varphi(\cdot, v, g)$  уравнения (5.4.261), проходящее через точку  $v$  при  $t = 0$  и определенное на  $\mathbb{R}$ ;
- b. при любом  $g \in H(f)$  уравнение (5.4.261) имеет единственное компактное решение  $\psi_g(t) = \varphi(t, v_g, g)$ , определенное на  $\mathbb{R}$ ;

с. существуют положительные числа  $\mathcal{N}$  и  $\nu$  (не зависящие от  $g \in H(f)$  и  $v \in H$ ) такие, что

$$(5.4.262) \quad \|\varphi(t, v, g) - \varphi(t, v_g, g)\| \leq \mathcal{N} \exp(-\nu t) \|v - v_g\|$$

при всех  $g \in H(f)$ ,  $v \in H$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение докажем в несколько этапов.

1. Так как  $\mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$ , то из [132] – [134] следует существование непрерывного отображения  $q : H(f) \rightarrow H(A) \times H(\dot{A})$ , удовлетворяющего условию

$$(5.4.263) \quad q(f) = (A, \dot{A}).$$

2. Покажем, что в условиях теоремы любая функция  $g \in H(f)$  удовлетворяет условиям, аналогичным 1.–4. Действительно, пусть  $g \in H(f)$  и  $q(g) = (B_g, \dot{B}_g) \in H(A) \times H(\dot{A})$ . Тогда существует  $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$  такая, что  $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\tau_n}$  и  $(B_g, \dot{B}_g) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{\tau_n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{A}_{\tau_n})$ . Из условия 2. теоремы следует, что

$$(5.4.264) \quad \begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle A(t + \tau_n)(u - v), f(t + \tau_n, u) \\ & - f(t + \tau_n, v) \rangle \leq -\alpha \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

при всех  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u$  и  $v \in H$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Переходя к пределу в (5.4.264) при  $n \rightarrow +\infty$ , получим

$$(5.4.265) \quad \operatorname{Re} \langle B_g(t)(u - v), g(t, u) - g(t, v) \rangle \leq -\alpha \|u - v\|^2.$$

Аналогичным образом показывается, что оператор-функция  $B_g \in H(A)$  ( $g \in H(f)$ ) удовлетворяет условиям 3. и 4. с теми же константами  $\beta$  и  $\gamma$ , что и оператор-функция  $A \in C(\mathbb{R}, [H])$ .

3. Незначительная модификация рассуждений работы [71] (см. также [31]) позволяет доказать, что при выполнении условий теоремы, каково бы ни было  $u \in H$ , уравнение (5.4.260) имеет единственное решение  $\varphi(\cdot, u, f)$ , определенное на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяющее условию  $\varphi(0, u, f) = u$ . Учитывая, что, наряду с функцией  $f$ , условиям теоремы удовлетворяет и любая функция  $g \in H(f)$ , заключаем, что для любого  $v \in H$  и  $g \in H(f)$  уравнение (5.4.261) имеет единственное решение  $\varphi(\cdot, v, g)$ , определенное на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяющее условию  $\varphi(0, v, g) = v$ .

4. Положим  $Y := H(f)$  и через  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$  обозначим динамическую систему сдвигов на  $Y$ . Пусть  $X = H \times H(f)$ . Определим на  $X$  динамическую систему по следующему правилу:  $\pi((v, g), \tau) := (\varphi(\tau, v, g), g_\tau)$ . Заметим, что в условиях теоремы множество  $Y$  компактно. Тройка  $\langle (X, \mathbb{R}, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ , где  $h := pr_2 : X \rightarrow Y$ , есть неавтономная динамическая система. Покажем, что к построенной динамической системе применима теорема 2.5.39 и следствие 15. Действительно, множество  $Y$  компактно по условию теоремы. Пространство непрерывных сечений  $\Gamma(Y, X)$  непусто.



Определим на  $X \times X$  скалярную неотрицательную функцию  $V$  по следующему правилу:

$$(5.4.266) \quad V((v_1, g), (v_2, g)) := \langle B_g(0)(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle$$

для любых  $g \in H(f)$  и  $v_1, v_2 \in H$  ( $B_g = q(g)$ ).

Очевидно, функция  $V$  удовлетворяет условиям 2. и 3. теоремы 2.5.39. Действительно, по условию 4.

$$(5.4.267) \quad \gamma \|v_1 - v_2\|^2 \leq \langle A(t)(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle \leq \delta \|v_1 - v_2\|^2$$

при всех  $v_1, v_2 \in H$  и  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\delta = \sup\{\|A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  ( $\delta < +\infty$ , так как  $\mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A$  и  $H(f)$  компактно). Для  $g \in H(f)$  существует  $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$  такая, что  $A_{\tau_n} \rightarrow B_g$ . Из (5.4.267) и последнего соотношения следует, что

$$(5.4.268) \quad \gamma \|v_1 - v_2\|^2 \leq \langle B_g(t)(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle \leq \delta \|v_1 - v_2\|^2$$

при всех  $g \in H(f)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  и  $v_1, v_2 \in H$ . В частности, имеем

$$(5.4.269) \quad \gamma \|v_1 - v_2\|^2 \leq V((v_1, g), (v_2, g)) \leq \delta \|v_1 - v_2\|^2$$

при всех  $g \in H(f)$  и  $v_1, v_2 \in H$ .

Наконец, покажем, что выполнено и условие 4. леммы 32. В самом деле,

$$\begin{aligned} & V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) = \\ & \langle B_{g_\tau}(0)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), \varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g) \rangle = \\ & \langle B_g(\tau)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), \varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g) \rangle. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\begin{aligned} & \dot{V}((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) = \\ & \langle \dot{B}_g(\tau)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), \varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g) \rangle + \\ & 2\operatorname{Re}\langle B_g(\tau)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), g(\tau, \varphi(\tau, v_1, g)) - \\ & g(\tau, \varphi(\tau, v_2, g)) \rangle. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и (5.4.264), а также условия 3. теоремы 5.4.104 следует неравенство

$$(5.4.270) \quad \begin{aligned} & \dot{V}((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \leq \\ & \beta \|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2 - \\ & - 2\alpha \|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2 = \\ & - \lambda \|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, из неравенства (5.4.269) получаем

$$(5.4.271) \quad \begin{aligned} & V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \\ & \leq \delta \|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2. \end{aligned}$$

Из неравенства (5.4.270) и (5.4.271) имеем

$$\begin{aligned} & \dot{V}((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \leq \\ & - \lambda \delta V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство, получим следующее соотношение

$$V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \leq \exp(-\lambda\delta\tau)V((v_1, g), (v_2, g))$$

при всех  $g \in H(f)$ ,  $v_1, v_2 \in H$  и  $\tau \in \mathbb{R}_+$ . Таким образом, все условия теоремы 2.5.39 выполнены и, применяя ец и следствие 15 к построенной неавтономной динамической системе, завершаем доказательство теоремы 5.4.104.

**СЛЕДСТВИЕ 49.** *В условиях теоремы 5.4.104, если правая часть  $f$  уравнения (5.4.260) является  $\tau$ -периодической (почти периодической, рекуррентной), то уравнение (5.4.260) конвергентно и каждое уравнение (5.4.261) имеет единственное  $\tau$ -периодическое (почти периодическое, рекуррентное) решение, подчиняющееся оценке (5.4.262).*

В случае, когда  $f$  является  $\tau$ -периодической, то следствие 49 усиливает основной результат работы [175] (в [175] в тех же условиях доказано только существование единственного  $\tau$ -периодического решения на основе принципа Лере-Шаудера в случае  $H = E^n$ ).

Если правая часть  $f$  почти периодична и оператор-функция  $A(t)$  не зависит от времени ( $\dot{A}(t) \equiv 0$ ), то утверждение следствия 49 совпадает с основным результатом работы [71]. Отметим попутно, что результаты работы [71] получены на основе ряда тонких оценок. Наш метод носит чисто топологический характер.

Наконец, отметим, что в работе [189] изучаются так называемые  $\alpha$ -сжимающие неавтономные динамические системы (то есть такие системы, которые удовлетворяют условию:

$$\rho(x_1 t, x_2 t) \leq \alpha \rho(x_1, x_2)$$

для любых  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x_1, x_2 \in X$  и  $h(x_1) = h(x_2)$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ ) в связи с задачей об устойчивости и асимптотической устойчивости по Пуассону решений дифференциальных уравнений с монотонной правой частью.

В случае конечномерного гильбертова пространства ( $H = E^n$ ), рекуррентности функции  $f$  и стационарности  $A(t)$  ( $\dot{A}(t) \equiv 0$ ) теорема 5.4.104 допускает следующее усиление.

**Теорема 5.4.105.** *Пусть  $f \in C(\mathbb{R} \times H, H)$  удовлетворяет условию Липшица и рекуррентна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $u$  на компактах из  $H$ . Если существует самосопряженный оператор  $A \in [H]$  и положительно определенная функция  $c: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такие, что*

$$(5.4.272) \quad \operatorname{Re}\langle A(u - v), f(t, u) - f(t, v) \rangle \leq -c(\|u - v\|)$$

*и  $c(r)r^{-1} \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$  (например,  $c(r) = r^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ), то уравнение (5.4.260) конвергентно.*

*Доказательство.* Также, как в теореме 5.4.104, устанавливается, что, каковы бы ни были  $v \in H$  и  $g \in H(f)$ , уравнение (5.4.261) имеет

единственное решение  $\varphi(\cdot, v, g)$ , определенное на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяющее условию  $\varphi(0, v, g) = v$ . Определим функцию  $\mathcal{V} : H(f) \times H \rightarrow \mathbb{R}_+$  следующим образом

$$(5.4.273) \quad \mathcal{V}(g, v) := \langle Av, v \rangle.$$

Из равенства (5.4.273) следует, что

$$(5.4.274) \quad \dot{\mathcal{V}}(g_\tau, \varphi(\tau, v, g)) = 2\operatorname{Re}\langle A\varphi(\tau, v, g), \varphi(\tau, v, g) \rangle.$$

Так как  $c(r)r^{-1} \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$ , то существует  $r_0 > 0$  такое, что

$$(5.4.275) \quad c(r)r^{-1} > \|f_0\| \|A\|$$

при всех  $r > r_0$ , где  $\|f_0\| := \sup\{\|f(t, 0)\| : t \in \mathbb{R}\}$ . Пусть  $t > 0$ ,  $v \in H$  и  $g \in H(f)$  таковы, что  $\|\varphi(\tau, v, g)\| \geq r_0$  при всех  $\tau \in [0, t]$ . Из (5.4.272), (5.4.274) и (5.4.275) следует, что  $\mathcal{V}(g_\tau, \varphi(\tau, v, g)) < \mathcal{V}(g, v)$ , и согласно теореме 5.2.86 уравнение (5.4.260) диссипативно.

Обозначим через  $V : H(f) \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}_+$  функцию, определяемую равенством

$$(5.4.276) \quad V(g, u, v) = \langle A(u - v), (u - v) \rangle.$$

Непосредственным вычислением получаем

$$(5.4.277) \quad \begin{aligned} \dot{V}(g_\tau, \varphi(\tau, u, g), \varphi(\tau, v, g)) &= 2\operatorname{Re}\langle A(\varphi(\tau, u, g) - \varphi(\tau, v, g)), \\ &g(\tau, \varphi(\tau, u, g)) - g(\tau, \varphi(\tau, v, g)) \rangle. \end{aligned}$$

Из (5.4.272) и (5.4.277) следует, что  $V(g_t, \varphi(t, u, g), \varphi(t, v, g)) < V(g, u, v)$  при всех  $t > 0$ ,  $g \in H(f)$  и  $u, v \in H$  ( $u \neq v$ ). Согласно теореме 2.5.41 уравнение (5.4.260) конвергентно.

### 5.5. Диссипативность и конвергентность некоторых уравнений 2-го и 3-го порядков, встречающиеся в приложениях

1. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$(5.5.278) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + Q(x, y, t) \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases}$$

где  $F$  и  $g$  – непрерывные функции, определенные на  $\mathbb{R}$ , а  $Q(x, y, t)$  непрерывна по совокупности переменных, ограничена и равномерно непрерывна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $(x, y)$  на компактах из  $\mathbb{R}^2$ . Как известно, к системе (5.5.278) сводится уравнение

$$(5.5.279) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = p(t),$$

если ввести новую переменную  $y = \dot{x} + F(x) - g(t)$ , где  $F(x) = \int_0^x h(\tau)d\tau$ ,  $q(t) = \int_0^t p(s)ds$ . Наряду с системой (5.5.278) рассмотрим еч  $H$ -класс

$$(5.5.280) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + G(x, y, t) \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases}$$

( $G \in H(Q) = \overline{\{Q_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ ).

**Теорема 5.5.106.** Пусть выполнены следующие условия:

- (1)  $xg(x) > 0$  при  $|x| \geq 1$ ;
- (2)  $\int_0^{+\infty} g(x)dx = -\int_{-\infty}^0 g(x)dx = +\infty$ ;
- (3) существует такая константа  $N > 0$ , что  $|Q(x, y, t)| \leq N$  при  $|x| \leq 1$ .
- (4)  $[F(x) - Q(x, y, t)]\operatorname{sgn} x \geq 0$  при  $|x| \geq 1$ , причем для любого  $G \in H(Q)$  существует  $\theta_G > 0$  такое, что  $F(x) - G(x, y, \theta_G) \neq 0$  при  $|x| \geq 1$  и  $y \in \mathbb{R}$ .
- (5) при  $|x| \geq 1$  справедливо неравенство  $|F(x) - Q(x, y, t)| \geq \alpha(y) \geq 0$ , где  $\alpha(y)$  — измеримая по Лебегу на каждом промежутке функция и  $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(y)dy > 0$ .

Тогда система (5.5.278) диссипативна.

*Доказательство.* Также, как и в работе [21] показывается, что существует такое  $\eta > 0$ , что в прямоугольник  $\{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq \eta\}$  попадает любое решение (5.5.280) при некотором  $\tau$  ( $\tau$  зависит от системы (5.5.280) и соответствующего решения). Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 5.2.87.

Рассмотрим более общее уравнение

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = \mathcal{R}(x, \dot{x}, t).$$

Положим  $y = \dot{x} + F(x)$ , где  $F(x) = \int_0^x h(\tau)d\tau$ . Тогда получим систему

$$(5.5.281) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + \mathcal{R}(x, y, t) \end{cases}$$

Наряду с системой (5.5.281) рассмотрим еч  $H$ -класс

$$(5.5.282) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + G(x, y, t), \end{cases}$$

где  $G \in H(\mathcal{R})$ .

**Теорема 5.5.107.** Пусть функции  $h$ ,  $g$  и  $\mathcal{R}$  непрерывны и  $\mathcal{R}$  ограничена и равномерно непрерывна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $(x, y)$  на компактах из  $\mathbb{R}^2$ . Предположим, кроме того, что существуют такие постоянные  $L > N > 0$  и  $K > 0$ , что

- (1)  $|\mathcal{R}(x, y, t)| \leq N$  при всех  $x, y, t \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $g(x)\operatorname{sgn} x \geq L$  при  $|x| \geq 1$ .
- (3)  $f(x) \geq K$  при  $|x| \geq 1$

Тогда система (5.5.281) диссипативна.

*Доказательство.* Также, как и в работе [74] введем в рассмотрение функцию  $\mathcal{V}(x, y) = y^2 - yF(x) + \frac{1}{2}F(x) + 2\int_0^x g(\tau)d\tau$ . Производная этой функции, взятая в силу системы (5.5.282), равна

$$\dot{\mathcal{V}}(x, y, t) = -[y - F(x)]^2 f(x) - g(x)F(x) + [2y - F(x)]G(x, y, t).$$

Согласно [74] существует  $a > 0$  такое, что при  $x^2 + y^2 \geq a^2 \dot{\mathcal{V}}_G(x, y, t) < 0$  и  $\mathcal{V}(x, y) \rightarrow +\infty$  при  $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ . Согласно теореме 5.2.86 система (5.5.281) диссипативна.

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + f(x) = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, t),$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ . Положим  $y = ax + \dot{x}$ ,  $z = bx + a\dot{x} + \ddot{x}$ . Тогда это уравнение эквивалентно системе

$$(5.5.283) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - ax \\ \dot{y} = z - bx \\ \dot{z} = -f(x) + p(x, y, z, t) \end{cases}$$

Наряду с системой (5.5.283) рассмотрим ещ  $H$ -класс

$$(5.5.284) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - ax \\ \dot{y} = z - bx \\ \dot{z} = -f(x) + g(x, y, z, t), \end{cases}$$

где  $g \in H(p)$ .

**Теорема 5.5.108.** Пусть функции  $f$  и  $p(x, y, z, t)$  непрерывны и выполнены следующие условия:

1.  $a, b > 0$ ;
2.  $0 < \frac{f(x)}{x} < ab$  при  $|x| \geq 1$ ;
3.  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ ;
4.  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |f(x) - abx| = +\infty$ ;
5.  $p$  ограничена и равномерно непрерывна по  $t \in \mathbb{R}$  равномерно по  $(x, y, z)$  на компактах из  $\mathbb{R}^3$ ;
6. существует  $A > 0$  такое, что  $|p(x, y, z, t)| \leq A$  при всех  $x, y, z$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

Тогда система (5.5.283) диссипативна.

*Доказательство.* Для доказательства сформулированного утверждения, следуя [74], рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, y, z) &= \frac{1}{2}(a^2x - ay + z)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(z - bx)^2 + \frac{b}{2}y^2 + a \int_a^x [f(\tau) - ab\tau] d\tau. \end{aligned}$$

В условиях теоремы 5.5.108  $\mathcal{V}(x, y, z) \rightarrow +\infty$  при  $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow +\infty$  и производная этой функции, взятая в силу системы (5.5.284), равна

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_g(x, y, z, t) &= -a(a^2x - ay + z)^2 + \\ &+ [abx - f(x)][2(a^2x - ay + z) - bx] \\ &+ [(a^2 - b)x - ay + 2z]g(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Также, как и в [74], можно показать, что существует  $a > 0$  такое, что вне шара радиуса  $a$  функция  $\mathcal{V}$  вдоль траекторий (5.5.284) убывает, и согласно теореме 5.2.86 система (5.5.283) диссипативна.

**2.** Приведем два признака конвергентности уравнения (5.5.279), которое эквивалентно системе

$$(5.5.285) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - h(x)y + p(t), \end{cases}$$

или, соответственно, системе

$$(5.5.286) \quad \begin{cases} \dot{x} = -F(x) + v \\ \dot{v} = -x + p(t), \end{cases}$$

где  $v = \dot{x} + F(x)$  и  $F(x) := \int_0^x h(t)dt$ . Как обычно, наряду с системой (5.5.286), рассматриваем ещ  $H$ -класс

$$(5.5.287) \quad \begin{cases} \dot{x} = -F(x) + v \\ \dot{v} = -x + g(t) \quad (g \in H(p)). \end{cases}$$

**Теорема 5.5.109.** *Если  $h(x) > 0$  ( кроме, быть может, дискретного множества точек),  $p(t)$  рекуррентна и  $F(+\infty) = +\infty$  ( или  $F(-\infty) = -\infty$ ), то уравнение (5.5.279) обладает единственным ограниченным на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованным и асимптотически устойчивым в целом решением, то есть (5.5.279) конвергентно.*

*Доказательство.* Рассуждая также, как и в [76], покажем, что в условиях теоремы существует замкнутый контур, который пересекает все решения каждой системы (5.5.287). Согласно теореме 5.2.85 система (5.5.286) диссипативна.

Покажем, что, на самом деле, система (5.5.286) конвергентна. Пусть  $\{x_i(t), v_i(t)\}$  ( $i = 1, 2$ ) – два различных решения системы (5.5.287). Построим функцию

$$\varphi(t) = |x_1(t) - x_2(t)|^2 + |v_1(t) - v_2(t)|^2$$

и вычислим ещ производную. Получим:

$$(5.5.288) \quad \dot{\varphi}(t) = -(x_1(t) - x_2(t))[F(x_1(t)) - F(x_2(t))].$$

Заметим, что, если  $\dot{\varphi}(t) \equiv 0$ , то  $x_1(t) \equiv x_2(t)$  и, следовательно,  $v_1(t) \equiv v_2(t)$ . Для завершения доказательства теоремы 5.5.109 достаточно сослаться на теорему 5.4.102.

**Теорема 5.5.110.** *Если  $\psi_1(x) = h(x) - 2D$  ( $0 < D < 1$ ) и  $\psi_2(x) = g(x) - x$  удовлетворяют условиям:*

- (1)  $|\psi_1(x)| \leq c_1$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $|\psi_1(\bar{x}) - \psi_2(x)| \leq c_2|\bar{x} - x|$  при всех  $\bar{x}, x \in \mathbb{R}$ , где  $c_1 + c_2 = c < mD = \sqrt{1 - DD}$ ,

то система (5.5.286) обладает единственным ограниченным на  $\mathbb{R}$  равномерно согласованным решением, которое асимптотически устойчиво в целом.

*Доказательство.* Пусть

$$\{\varphi(t, x_i, y_i, g)\} = \{(\varphi_1(t, x_i, y_i, g), \varphi_2(t, x_i, y_i, g))\}$$

( $i = 1, 2, g \in H(f)$ ) – два решения системы (5.5.287) и

$$\begin{cases} u(t) := \varphi_1(t, x_1, y_1, g) - \varphi_1(t, x_2, y_2, g) \\ v(t) := \varphi_2(t, x_1, y_1, g) - \varphi_2(t, x_2, y_2, g). \end{cases}$$

Функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u - 2Dv - [\psi_2(\varphi_1(t, x_1, y_1, g)) - \psi_2(\varphi_1(t, x_2, y_2, g))] - \\ \quad [\psi_1(\varphi_1(t, x_1, y_1, g))\varphi_2(t, x_1, y_1, g) - \\ \quad \psi_1(\varphi_1(t, x_2, y_2, g))\varphi_2(t, x_2, y_2, g)]. \end{cases}$$

Также, как и в [76], показывается, что

$$(5.5.289) \quad \begin{cases} |u(t)| < (1 + \frac{c_1}{m})\alpha[\exp(-(D - \frac{c}{m})t) + \exp(-Dt)] \\ |v(t)| < (1 + c_1)(1 + \frac{c_1}{m})\alpha[\exp(-(D - \frac{c}{m})t) \\ \quad + \exp(-Dt)], \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{|u(0)|^2 + 2D|u(0)||v(0)| + |v(0)|^2} \leq \frac{1}{m}\sqrt{1 + D}\sqrt{|u(0)|^2 + |v(0)|^2}.$$

Из (5.5.289) следует, что

$$\begin{aligned} \sqrt{|u(t)|^2 + |v(t)|^2} &\leq \\ &\mathcal{N} \exp(-(D - \frac{c}{m})t) \sqrt{|u(0)|^2 + |v(0)|^2}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{N} > 0$  – некоторая константа, зависящая только от  $c_1, c_2$  и  $D$ . Теперь для заверения доказательства теоремы 5.5.110 достаточно сослаться на теорему 2.5.39 и следствие 15.

**Замечание 5.5.35.** Все утверждения, приведенные в этом параграфе, в периодическом случае, совпадают с хорошо известными фактами (см. [21], [74], [76]).

**Диссипативность некоторых классов  
дифференциальных, разностных, импульсных,  
функционально-  
дифференциальных и эволюционных уравнений**

**6.1. Разностные уравнения, обладающие свойством  
диссипативности**

Все результаты для дифференциальных уравнений, приведенные в предыдущих главах, имеют место и для разностных уравнений, так как наши основные результаты были сформулированы и доказаны для общих неавтономных динамических систем как с непрерывным, так и дискретным временем. Ниже мы приведем те из них, которые нам понадобятся при изучении периодических диссипативных систем с импульсами.

Рассмотрим разностное уравнение

$$(6.1.290) \quad u(k+1) = \Phi(k, u(k)) \quad (\Phi \in C(\mathbb{Z} \times E^n, E^n)).$$

Обозначим через  $\varphi(\cdot, u, \Phi)$  решение уравнения (6.1.290), проходящее через точку  $u$  при  $k = 0$ . Предположим, что  $\Phi$  является  $p$ -периодическим по  $k \in \mathbb{Z}$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ . Положим  $H(\Phi) := \{\Phi_m = \sigma(\Phi, m) : 0 \leq m \leq p-1\}$ , а через  $(Y, \mathbb{Z}, \sigma)$  обозначим динамическую систему сдвигов на  $Y := H(\Phi)$ , индуцированную системой  $(C(\mathbb{Z} \times E^n, E^n), \mathbb{Z}, \sigma)$ . Далее положим  $X := E^n \times Y$  и определим отображение  $\pi : X \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$  равенством  $\pi((u, \tilde{\Phi}), k) = (\varphi(k, u, \tilde{\Phi}), \tilde{\Phi}_k)$ . Из общих свойств решений разностных уравнений вида (6.1.290) следует, что  $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$  – полугрупповая динамическая система, а  $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}, \sigma), h \rangle$  ( $h = pr_2 : X \rightarrow Y$ ) есть неавтономная  $\omega$ -периодическая динамическая система. Применяя к построенной таким образом динамической системе результаты параграфа 4.6, получим ряд утверждений относительно уравнения (6.1.290). Прежде чем сформулировать некоторые утверждения такого рода, определим понятие диссипативности для уравнения (6.1.290).

Как и в случае дифференциальных уравнений, разностное уравнение (6.1.290) назовем диссипативным, если существует положительное число  $r$  такое, что

$$(6.1.291) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi(k, v, \tilde{\Phi})\| < r$$

при всех  $v \in E^n$  и  $\tilde{\Phi} \in H(\Phi)$ .



Определим отображение  $\mathbb{P} : E^n \rightarrow E^n$  по правилу  $\mathbb{P}(v) = \varphi(p, v, \Phi)$  и через  $(E^n, P)$  обозначим каскад, порожденный степенями  $\mathbb{P}$ .

**Теорема 6.1.111.** *Для того чтобы разностное уравнение (6.1.290) было диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы каскад  $(E^n, \mathbb{P})$  был диссипативным.*

**Теорема 6.1.112.** *Если уравнение (6.1.290) диссипативно, то:*

- (1) существует  $h > 0$  такое, что для любого  $a > 0$  найдется  $k(a) \in \mathbb{Z}_+$ , что  $\mathbb{P}^k B(0, a) \subseteq B(0, h)$  при всех  $k \geq k(a)$ ;
- (2) отображение  $\mathbb{P}$  имеет хотя бы одну неподвижную точку  $u_0 \in E^n$ , через которую проходит  $p$ -периодическое решение (6.1.290).

**Теорема 6.1.113.** *Если уравнение (6.1.290) диссипативно, то:*

- (1) существуют непустое компактное множество  $J \in E^n$ , которое обладает следующими свойствами:
  - (а)  $\mathbb{P}(J) = J$ ;
  - (б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(u, J) < \delta$  влечет  $\rho(\mathbb{P}^k u, J) < \varepsilon$  при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$ ;
- (2) множество  $M := \cup \{M_k := \varphi(k, J, \Phi) : k \in \mathbb{Z}_+\}$  непусто, компактно и обладает следующими свойствами:
  - с.  $M$  инвариантно относительно (6.1.290) в том смысле, что  $v \in M_m$  влечет  $\varphi(k, v, \Phi_m) \in M$  при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$ ;
  - д.  $M_{k+p} = M_k$  при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$ ;
  - е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$\rho(\varphi(t, u, \Phi), M_m) < \delta$$

влечет

$$\rho(\varphi(k, u, \Phi), M_k) < \varepsilon$$

при всех  $k \geq t$ .

**Теорема 6.1.114.** *Если уравнение (6.1.290) диссипативно и функция  $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  голоморфна по второй переменной, то центр Левинсона этого уравнения состоит из одной  $p$ -периодической траектории, т.е. (6.1.290) конвергентно.*

Сформулированные теоремы 6.1.111 – 6.1.114 получаются непосредственно из результатов параграфа 4.6. Что касается теоремы 6.1.114, то здесь следует добавить, что при голоморфной правой части уравнения (6.1.290) решение  $\varphi(\cdot, z, \Phi)$  ( $z \in \mathbb{C}^n$ ) также является голоморфной функцией.

Рассмотрим слабо нелинейное уравнение

$$(6.1.292) \quad u(k+1) = A(k)u(k) + F(k, u(k)),$$

где  $A(k)$  есть переменная  $n \times n$ -матрица, а  $F \in C(\mathbb{Z} \times E^n, E^n)$  удовлетворяет некоторому условию "малости".

Обозначим через  $U(k, A)$  матрицу Коши для линейного уравнения

$$(6.1.293) \quad u(k+1) = A(k)u(k).$$

**Теорема 6.1.115.** Пусть  $A(k)$  и  $F(k, u)$   $p$ -периодичны по  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Если выполнены условия:

(1) существуют положительные числа  $M$  и  $q < 1$  такие, что

$$(6.1.294) \quad \|U(k, A)U^{-1}(m, A)\| \leq Mq^{k-m} \quad (k \geq m);$$

(2)  $\|F(k, u)\| \leq C + D\|u\|$  ( $C \geq 0$ ,  $0 \leq D < (1-q)M^{-1}$ ) при всех  $u \in E^n$ ,

то уравнение (6.1.292) диссипативно.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi(\cdot, u, \Phi)$  ( $\Phi(k, u) := A(k)u + F(k, u)$ ) – решение уравнения (6.1.292), проходящее через  $u \in E^n$  при  $k = 0$ . По формуле вариации постоянных (см., например, [85]) имеем

$$\varphi(k, u, \Phi) = U(k, A) \left( u + \sum_{m=0}^{k-1} U^{-1}(m+1, A)F(m, \varphi(m, u, \Phi)) \right),$$

откуда следует, что

$$(6.1.295) \quad \|\varphi(k, u, \Phi)\| \leq Mq^k \left( \|u\| + \sum_{m=0}^{k-1} q^{-m+1} (C + D\|\varphi(m, u, \Phi)\|) \right).$$

Положим  $u(k) := q^{-k}\|\varphi(k, u, \Phi)\|$  и с учетом (6.1.295) получим

$$(6.1.296) \quad u(k) \leq M\|u\| + CMq \sum_{m=0}^{k-1} q^{-m} + DM \sum_{m=0}^{k-1} u(m).$$

Обозначим правую часть равенства (6.1.296) через  $v(k)$ . Заметим, что

$$v(k+1) - v(k) = q^{-k} \frac{CM}{q} + \frac{DM}{q} u(k) \leq \frac{DM}{q} v(k) + \frac{CM}{q} q^{-k},$$

а, значит,

$$v(k+1) \leq \left(1 + \frac{DM}{q}\right) v(k) + \frac{CM}{q} q^{-k}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$(6.1.297) \quad v(k) \leq \left(1 + \frac{DM}{q}\right)^{k-1} v(1) + \frac{CM}{q} \frac{1 - q^{k-1}}{1 - q},$$

поэтому

$$(6.1.298) \quad \|\varphi(k, u, \Phi)\| \leq (q + DM)^{k-1} qM\|u\| + \frac{CM}{q-1} (q^{k-1} - 1),$$

так как  $v(1) = M\|u\|$ . Из (6.1.298) следует, что

$$(6.1.299) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi(k, u, \Phi)\| \leq \frac{CM}{1-q}.$$

Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 50.** *В условиях теоремы 6.1.115 уравнение (6.1.292) имеет хотя бы одно  $p$ -периодическое решение.*

Сформулированное утверждение вытекает из теорем 6.1.112 и 6.1.115.

## 6.2. Периодические диссипативные уравнения с импульсами

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(6.2.300) \quad \dot{u} = f(t, u) \quad (f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)).$$

Будем предполагать, что  $f(t + \tau, u) = f(t, u)$  ( $t \in \mathbb{R}, u \in E^n$ ) и  $f$  регулярна, т.е. при любом  $g \in H(f) := \{f_\tau : \tau \in [0, \tau]\}$  для уравнения

$$(6.2.301) \quad \dot{v} = g(t, v)$$

выполнено условие существования, единственности и нелокальной продолжаемости на  $\mathbb{R}_+$ . Обозначим через  $\varphi(\cdot, v, g)$  решение (6.2.301), проходящее через  $v$  при  $t = 0$ . Заметим, что

$$(6.2.302) \quad \varphi(t + \tau, v, g) = \varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau)$$

при всех  $t, \tau \in \mathbb{R}_+, v \in E^n$  и  $g \in H(f)$ .

Пусть  $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$  ( $t_0 = 0$ ) и  $\{s_k\} \subset E^n$  такие, что при некотором  $p > 0$  ( $p \in \mathbb{Z}$ )  $t_{k+p} - t_k = \tau$  и  $s_{k+p} = s_k$  при всех  $k \in \mathbb{Z}$ . Как известно [85], эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы распределение  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k}$  было  $\tau$ -периодическим.

Рассмотрим нелинейное импульсное  $\omega$ -периодическое уравнение

$$(6.2.303) \quad \dot{u} = f(t, u) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k} = \mathfrak{F}.$$

Известно (см. [85]), что, при сделанных выше предположениях, уравнение (6.2.303) при любом  $u \in E^n$  имеет единственное обобщенное решение типа обычных функций, проходящее через точку  $u$  при  $t = 0$ , которое мы обозначим через  $\varphi(\cdot, u, \mathfrak{F})$ . Таким образом  $\lim_{t \downarrow 0} \varphi(t, u, \mathfrak{F}) = u$ . Кроме того, на каждом интервале  $]t_k, t_{k+1}[$  уравнение (6.2.303) совпадает с (6.2.300). Поэтому имеет место равенство

$$(6.2.304) \quad \varphi(t, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t - t_k, c_k, f_{t_k}),$$

где последовательность  $\{c_k\} \subset E^n$  удовлетворяет разностному уравнению

$$(6.2.305) \quad c_{k+1} = \varphi(t_{k+1} - t_k, c_k, f_{t_k}) + s_k.$$

Импульсное уравнение (6.2.303) назовем диссипативным, если существует  $r > 0$  такое, что

$$(6.2.306) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, v, \tilde{\mathfrak{F}})\| < r$$

при всех  $v \in E^n$  и  $\tilde{\mathfrak{F}} \in H(\mathfrak{F}) := \{\mathfrak{F}_s : s \in [0, \tau[ \}$ , где  $\mathfrak{F}_s$  есть  $s$ -сдвиг обобщенной функции  $\mathfrak{F}$ .

**Замечание 6.2.36.** Для периодических уравнений условие диссипативности (6.2.306) можно упростить, поскольку (6.2.306) эквивалентно следующему соотношению

$$(6.2.307) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, u, \mathfrak{F})\| < r.$$

Действительно, из (6.2.306) следует (6.2.307). Обратное. Из того, что  $\varphi(t + s, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t, \varphi(s, u, \mathfrak{F}), \mathfrak{F}_s)$  (если в точке  $s \in \mathbb{R}$  функция  $\varphi(t, u, \mathfrak{F})$  разрывна, то по определению  $\varphi(s, u, \mathfrak{F}) := \varphi(s + 0, u, \mathfrak{F})$ ) при всех  $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ . Поэтому

$$(6.2.308) \quad \varphi(t, v, \tilde{\mathfrak{F}}) = \varphi(t - \tau + s, \varphi(\tau - s, v, \mathfrak{F}_k), \mathfrak{F})$$

при всех  $t \geq \tau - s$ , где  $s \in [0, \tau[$  и  $\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_k$ .

**Лемма 58.** Для того чтобы уравнение с импульсами (6.2.303) было диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы разностное уравнение (6.2.305) было диссипативным.

*Доказательство.* Пусть (6.2.303) диссипативно. Тогда существует такое  $r > 0$ , что выполнено (6.2.307). Если  $u \in E^n$ , то

$$(6.2.309) \quad \varphi(k, u, \Phi) = \varphi(t_k, u, \mathfrak{F})$$

и, следовательно,

$$(6.2.310) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi(k, u, \Phi)\| < r.$$

Обратно. Пусть разностное уравнение (6.2.305) диссипативно. Тогда существует такое  $r > 0$ , что выполнено (6.2.310). Следовательно, для любого  $u \in E^n$  существует такое  $k_0(u) \in \mathbb{Z}_+$ , что  $\|\varphi(k, u, \Phi)\| < r$  для всех  $k \geq k_0(u)$ . Пусть  $t \geq t_{k_0}$  и  $t \in [t_k, t_{k+1}[$   $k \geq k_0$ . Согласно (6.2.304)  $\varphi(t, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t - t_k, c_k, f_{t_k})$ , где  $c_k = \varphi(t_k, u, \mathfrak{F})$ . Положим

$$(6.2.311) \quad R_0 := \max\{\|\varphi(s, u, g)\| : s \in [0, \tau], \|u\| \leq r, g \in H(f)\}$$

и заметим, что  $\|\varphi(t, u, \mathfrak{F})\| = \|\varphi(t - t_k, c_k, f_{t_k})\| \leq R_0$  при всех  $t \geq t_{k_0}$  и, следовательно,

$$(6.2.312) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, u, \mathfrak{F})\| \leq R_0,$$

причем  $R_0$  в (6.2.312) не зависит от  $u \in E^n$ . Лемма доказана.

Определим отображение  $P : E^n \rightarrow E^n$  равенством

$$(6.2.313) \quad P(u) := \varphi(\tau, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t_p, u, \mathfrak{F}) = \varphi(p, u, \Phi).$$

Из (6.2.313) и общих свойств разностных уравнений следует непрерывность отображения  $P$ .

**Теорема 6.2.116.** *Для того чтобы уравнение с импульсами (6.2.303) было диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы каскад  $(E^n, P)$ , где определено равенством (6.2.313), был диссипативным.*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает непосредственно из леммы 58 и теоремы 6.1.111.

**СЛЕДСТВИЕ 51.** *Если уравнение (6.2.303) диссипативно, то существует непустое компактное связное множество  $J \subset E^n$ , обладающее следующими свойствами:*

- (1)  $P(J)$ , где -отображение  $E^n$  в себя, определенное (6.2.313);
- (2) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\rho(u, J) < \delta$  влечет  $\rho(P^k(u), J) < \varepsilon$  при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$ ;
- (3) для любого  $u \in E^n$  имеет место равенство  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(P^k(u), J) = 0$ .

*Доказательство.* Следствие 51 вытекает из теорем 6.2.116 и 4.6.75.

**СЛЕДСТВИЕ 52.** *Если уравнение (6.2.303) диссипативно, то:*

- (1) существует  $r > 0$  и для любого  $a > 0$  существует  $k(a) \in \mathbb{Z}_+$  такое, что  $P^k B[0, a] \subseteq B[0, r]$  при всех  $k \geq k(a)$ ;
- (2) существует  $r > 0$  такое, что  $P(u_0) = u_0$  и, следовательно,  $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$  есть  $\tau$ -периодическое решение (6.2.303).

Рассмотрим слабо нелинейное импульсное уравнение

$$(6.2.314) \quad \dot{u} = A(t)u + F(t, u) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k}.$$

Имеет место

**Теорема 6.2.117.** *Пусть  $A$  и  $F$   $\tau$ -периодичны по  $t \in \mathbb{R}$ . Уравнение (6.2.314) диссипативно, если выполнены следующие условия:*

- (1) существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что

$$\|U(t, A)U^{-1}(s, A)\| \leq Ne^{-\nu(t-s)},$$

где  $U(t, A)$  матрица Коши уравнения

$$(6.2.315) \quad \dot{u} = A(t)u.$$

- (2) существует достаточно малые  $\varepsilon_0$ , что  $\|F(t, u)\| \leq C + D\|u\|$  ( $u \in E^n$ ,  $C \geq 0$  и  $0 \leq D \leq \varepsilon_0$ ).

*Доказательство.* Положим  $f(t, u) = A(t)u + F(t, u)$ . Согласно лемме 58 для доказательства теоремы 6.2.117 достаточно показать, что разностное уравнение (6.2.305) диссипативно. Перепишем уравнение (6.2.305) следующим образом

$$(6.2.316) \quad c_{k+1} = \tilde{A}(k)c_k + \tilde{F}(k, c_k),$$

где  $\tilde{A}(k) = U(t_{k+1} - t_k, A_{t_k})$  и

$$\tilde{F}(k, u) = \varphi(t_{k+1} - t_k, u, f_{t_k}) + s_k - \tilde{A}(k)u.$$

Отметим, что в условиях теоремы 6.2.117  $\tilde{A}(k)$  и  $\tilde{F}(k, u)$  являются  $p$ -периодическими по  $k \in \mathbb{Z}$ .

Покажем, что нулевое решение однородного уравнения

$$(6.2.317) \quad c_{k+1} = \tilde{A}(k)c_k$$

равномерно асимптотически устойчиво. В силу периодичности  $\tilde{A}(k)$  достаточно показать что оно асимптотически устойчиво. Заметим, что

$$U(k, \tilde{A}) = \prod_{m=0}^{k-1} U(t_{m+1} - t_m, A_{t_m}) = U(t_k - t_{p-1}, A_{t_{p-1}}),$$

поэтому,  $\|U(k, \tilde{A})\| \leq Ne^{-\nu(t_k - t_{p-1})}$ , откуда и следует асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (6.2.317).

Далее покажем, что  $\|\tilde{F}(k, u)\| \leq \tilde{C} + \tilde{D}(D)\|u\|$  при всех  $u \in E^n$ , где  $\tilde{C}$  и  $\tilde{D}(D)$  – некоторые положительные константы, причем,  $\tilde{D}(D) \rightarrow 0$  при  $D \rightarrow 0$ . Действительно, так как  $\varphi(t, u, f_l)$  есть решение уравнения

$$\dot{u} = f_l(t, u) = A_l(t)u + F_l(t, u),$$

то  $\varphi(t, u, f_l) = U(t, A)(u + \int_0^t U^{-1}(s, A_l)F_l(s, u, f_l)ds)$  и, следовательно,

$$(6.2.318) \quad \begin{aligned} \tilde{F}(k, u) &= \int_0^{t_{k+1} - t_k} U(t_{k+1} - t_k, A_{t_k})U^{-1}(s, A_{t_k}) \\ &F_{t_k}(s, \varphi(s, u, f_{t_k}))ds + s_k. \end{aligned}$$

Рассуждая как и в теореме 3.5.61 можно показать, что

$$(6.2.319) \quad \|\varphi(t, u, f_l)\| \leq N\|u\|e^{(-\nu + ND)t} + \frac{CN}{\nu - DN}$$

при всех  $t \geq 0$ ,  $l \in \mathbb{R}$  и  $u \in E^n$  ( $0 \leq D \leq \nu N^{-1}$ ). Тогда из (6.2.318) и (6.2.319) получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(k, u)\| &\leq \int_0^{t_{k+1} - t_k} Ne^{-\nu(t_{k+1} - t_k - s)}(C + D\|\varphi(s, u, f_l)\|)ds \leq \\ &Ne^{-\nu(t_{k+1} - t_k)} \int_0^{t_{k+1} - t_k} \left( Ce^{\nu s} + De^{\nu s} \left[ \frac{CN}{\nu - DN} + N\|u\|e^{-\nu + ND}s \right] \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} \left( \left[ C + D \frac{CN}{\nu - DN} \right] \frac{e^{\nu(t_{k+1}-t_k)} - 1}{\nu} + \right. \\
&+ N \|u\| D \frac{e^{ND(t_{k+1}-t_k)} - 1}{ND} \left. \right) = \frac{NC}{\nu - DN} \left( 1 - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} \right) + \\
&N \|u\| \left( e^{(ND-\nu)(t_{k+1}-t_k)} - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} \right) \leq \tilde{C} + \tilde{D}(D) \|u\|,
\end{aligned}$$

где  $\tilde{C} = NC(\nu - ND)^{-1}$  и

$$(6.2.320) \quad \tilde{D}(D) = N \sup_{0 \leq k \leq p-1} \left[ e^{(ND-\nu)(t_{k+1}-t_k)} - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} \right].$$

Из (6.2.320) следует, что  $\tilde{D}(D) \rightarrow 0$  при  $D \rightarrow 0$ , поэтому существует  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, что  $\tilde{D}(\varepsilon_0) < M^{-1}(1-q)$  (см. теорему 6.1.115). Согласно теореме 6.1.115 разностное уравнение (6.2.316) диссипативно, а следовательно, диссипативно и импульсное уравнение (6.2.314). Теорема доказана.

### 6.3. Импульсные периодические уравнения с конвергенцией

Следуя [28], [74], импульсное уравнение (6.2.303) назовем конвергентным, если (6.2.303) имеет единственное  $\omega$ -периодическое решение  $\varphi(t, u, \mathfrak{F})$ , которое является равномерно асимптотически устойчивым в целом.

Аналогичным образом определяется понятие конвергенции для разностного уравнения (6.1.290). Из приведенного определения следует, что конвергентные уравнения составляют часть диссипативных уравнений, у которых центр Левинсона состоит из единственной периодической траектории (решения) уравнения (6.2.303).

**Лемма 59.** *Для того чтобы  $\tau$ -периодическое импульсное уравнение (6.2.303) было конвергентным, необходимо и достаточно, чтобы (6.2.305) было конвергентным.*

*Доказательство.* Пусть (6.2.303) конвергентно. Тогда существует единственное  $\tau$ -периодическое решение  $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$  уравнения (6.2.303), которое равномерно асимптотически устойчиво в целом. Непосредственно из соответствующих определений следует, что  $\varphi(t, u_0, \Phi)$

$$(\Phi(k, u) := \varphi(t_{k+1} - t_k, u, f_{t_k}) + s_k)$$

есть единственное  $p$ -периодическое решение уравнения (6.2.305) и оно равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Обратно, пусть (6.2.305) конвергентно и  $\varphi(k, u_0, \Phi)$  – его единственное  $p$ -периодическое равномерно асимптотически устойчивое в целом решение. Очевидно,  $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$  есть единственное  $\omega$ -периодическое решение уравнения (6.2.303). Пусть  $k \in E^n$  и  $t \in [t_k, t_{k+1}[$ . Согласно (6.2.304)

$$(6.3.321) \quad \begin{aligned} & \|\varphi(t, u, \mathfrak{F}) - \varphi(t, u_0, \mathfrak{F})\| \\ &= \|\varphi(t - t_k, c_k, f_{\tau_k}) - \varphi(t - t_k, c_k^0, f_{t_k})\|, \end{aligned}$$

где  $c_k = \varphi(t_k, u, \mathfrak{F})$  и  $c_k^0 = \varphi(t_k, u_0, \mathfrak{F})$ . Для любого компакта  $K \subset E^n$  отображение  $\varphi : [0, \omega] \times K \times H(f) \rightarrow E^n$  ( $\varphi : (s, u, g) \rightarrow \varphi(s, u, g)$ ) равномерно непрерывно и, в частности, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что

$$(6.3.322) \quad \|\varphi(s, u_1, g) - \varphi(s, u_2, g)\| < \varepsilon,$$

при всех  $s \in [0, \omega]$ ,  $\|u_1 - u_2\| < \delta$ ,  $u_1, u_2 \in K$  и  $g \in H(f)$ .

Из (6.3.321) и (6.3.322) и равномерной асимптотической устойчивости в целом  $\varphi(k, u_0, \Phi) = c_k^0$  следует аналогичное свойство для  $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$ . Лемма доказана.

**Теорема 6.3.118.** Пусть  $A(k)$  и  $F(k, u)$  периодичны по  $k \in \mathbb{Z}$  и выполнены условия:

- (1) существуют положительные числа  $M$  и  $q < 1$ , что имеет место неравенство (6.1.294);
- (2)  $\|F(k, u_1) - F(k, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|$  ( $0 \leq L < M^{-1}(1 - q)$ ) при всех  $k \in \mathbb{Z}$  и  $u_1, u_2 \in E^n$ .

Тогда уравнение (6.1.292) конвергентно.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi(k, u, \Phi)$  ( $\Phi(k, u) = A(k)u = A(k)u + F(k, u)$ ) – решение уравнения (6.1.292), проходящее через  $u$  при  $k = 0$ . По формуле вариации постоянных имеем

$$\varphi(k, u, \Phi) = U(k, A) \left( u + \sum_{m=0}^{k-1} U^{-1}(m+1, A) F(m, \varphi(m, u, \Phi)) \right),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(k, u_1, \Phi) - \varphi(k, u_2, \Phi) &= U(k, A) \left( u_1 - u_2 + \right. \\ &\left. \sum_{m=1}^{k-1} U^{-1}(m+1, A) [F(m, \varphi(m, u_1, \Phi)) - F(m, \varphi(m, u_2, \Phi))] \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(6.3.323) \quad \begin{aligned} \|\varphi(k, u_1, \Phi) - \varphi(k, u_2, \Phi)\| &\leq Mq^k \left( \|u_1 - u_2\| \right. \\ &\left. + Lq^{-1} \sum_{m=0}^{k-1} q^{-m} \|\varphi(k, u_1, \Phi) - \varphi(k, u_2, \Phi)\| \right). \end{aligned}$$

Положим  $u(k) := \|\varphi(k, u_1, \Phi) - \varphi(k, u_2, \Phi)\|q^{-k}$ . Из (6.3.323) следует, что

$$(6.3.324) \quad u(k) \leq M \left( \|u_1 - u_2\| + Lq^{-1} \sum_{m=0}^{k-1} u(m) \right).$$

Обозначим через  $v(k)$  правую часть (6.3.324). Имеет место неравенство

$$(6.3.325) \quad v(k+1) - v(k) = LMq^{-1}u(k) \leq LMq^{-1}v(k).$$



Из (6.3.325) получаем

$$(6.3.326) \quad v(k) \leq (1 + LMq^{-1})^{k-1}v(1)$$

и, следовательно,

$$(6.3.327) \quad u(k) \leq (1 + LMq^{-1})M\|u_1 - u_2\|,$$

так как  $v(1) = M\|u_1 - u_2\|$ . Из (6.3.327) получаем

$$(6.3.328) \quad \|\varphi(k, u_1, \Phi) - \Phi(k, u_2, \Phi)\| \leq (q + LM)^{k-1}qM\|u_1 - u_2\|$$

при всех  $u_1, u_2 \in E^n$  и  $k \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что в условиях теоремы 6.3.118 применима теорема 6.1.115 и, следовательно уравнение (6.1.292) имеет хотя бы одно  $p$ -периодическое решение  $\varphi(k, u_0, \Phi)$  (см. также следствие 50). Из (6.3.328) следует асимптотическая устойчивость в целом решения  $\varphi(k, u_0, \Phi)$  и в силу периодичности уравнения (6.3.321) решение  $\varphi(k, u_0, \Phi)$  будет равномерно асимптотически устойчивым в целом. Теорема доказана.

**Теорема 6.3.119.** Пусть  $A(t)$  и  $F(t, u)$   $\tau$ -периодичны по  $t \in \mathbb{R}$ . Уравнение (6.2.314) конвергентно, если выполнены следующие условия:

- (1) существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что

$$\|U(t, A)U^{-1}(s, A)\| \leq Ne^{-\nu(t-s)} \quad (t \geq s);$$

- (2) существует достаточно малые  $\varepsilon_0$  такое, что

$$\|F(t, u_1) - F(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|$$

$$(u_1, u_2 \in E^n, t \in \mathbb{R} \text{ и } 0 \leq L \leq \varepsilon_0).$$

*Доказательство.* Согласно лемме 59 для доказательства конвергентности (6.2.314) достаточно установить, что в условиях теоремы 6.3.119 этим свойством обладает разностное уравнение (6.2.305). Как и при доказательстве теоремы 6.2.117, представим уравнение (6.2.305) в виде (6.2.316). В условиях теоремы 6.3.119 нулевое решение уравнения (6.2.317) равномерно асимптотически устойчиво. Далее, из (6.2.318) следует, что

$$(6.3.329) \quad \begin{aligned} \|\tilde{F}(k, u_1) - \tilde{F}(k, u_2)\| &= \left\| \int_0^{t_{k+1}-t_k} U(t_{k+1}-t_k, A_{t_k})U^{-1}(s, A_{t_k}) \times \right. \\ &\quad \left. [F_{t_k}(s, \varphi(s, u_1, f_{t_k}) - F_{t_k}(s, \varphi(s, u_2, f_{t_k}))] ds \leq \right. \\ &\quad \left. \int_0^{t_{k+1}-t_k} Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k-s)} L \|\varphi(s, u_1, f_{t_k} - \varphi(s, u_2, f_{t_k})\| ds. \end{aligned}$$

Рассуждая как и в теореме 5.4.102, получим

$$(6.3.330) \quad \|\varphi(t, u_1, f_{t_k} - \varphi(t, u_2, f_{t_k})\| \leq N\|u_1 - u_2\|e^{-(\nu-LN)t}$$

при всех  $u_1, u_2 \in E^n$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ , где  $f_{t_k}(t, u) = A_{t_k}(t)u + F_{t_k}(t, u)$ . Из (6.3.329) и (6.3.330) получаем

$$(6.3.331) \quad \begin{aligned} & \|\tilde{F}(k, u_1) - \tilde{F}(k, u_2)\| \leq N e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} L \\ & \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{LN^2 s} N \|u_1 - u_2\| ds \leq \tilde{L}(L) \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

где

$$(6.3.332) \quad \tilde{L}(L) := \sup_{0 \leq k \leq p-1} \left[ e^{(-\nu+LN^2)(t_{k+1}-t_k)} - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} \right].$$

Из (6.3.332) следует, что  $\tilde{L}(L) \rightarrow 0$  при  $L \rightarrow 0$ , поэтому найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $\tilde{L}(L) < M^{-1}(1-q)$  при  $0 \leq L \leq \varepsilon_0$ . Согласно теореме 6.3.118 уравнение (6.2.317) конвергентно и для завершения доказательства теоремы 6.3.119 достаточно сослаться на лемму 59.

**Замечание 6.3.37.** *а. Утверждение, близкое к теореме 6.3.119, доказано также в работе [65].*

*б. Вопросы диссипативности и конвергентности уравнений с импульсами изучались в работах [65], [120], [121].*

#### 6.4. Асимптотическая устойчивость линейных функционально-дифференциальных уравнений

Используя некоторые идеи и методы, развитые для изучения диссипативных динамических систем, можно получить ряд условий, эквивалентных асимптотической устойчивости линейных неавтономных динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. В качестве приложения можно получить соответствующие утверждения для линейных функционально-дифференциальных уравнений.

Пусть  $(X, h, Y)$  – векторное расслоение со слоем  $E$  ( $E$  – банахово пространство) и  $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$  – норма на  $X$ , согласованная с метрикой  $X$ , т.е.  $|\cdot|$  непрерывна и  $|x| = \rho(x, \theta_y)$ , где  $x \in X_y$ ,  $\theta_y$  – нулевой элемент  $X_y$  и  $\rho$  – метрика на  $X$ .

Динамическая система  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  называется локально-компактной (вполне непрерывной), если для любого  $x \in X$  существуют  $\delta_x > 0$  и  $l_x > 0$  такие, что  $\pi^t B(x, \delta_x)$  ( $t \geq l_x$ ) относительно компактно.

**Теорема 6.4.120.** *Если система  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  локально-компактна и  $Y$  компактно, то следующие условия эквивалентны:*

- (1)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |xt| = 0$  при всех  $x \in X$ ;
- (2) все движения в  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  относительно компактны и в системе  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  нет нетривиальных компактных продолжаемых на  $\mathbb{S}$  движений;
- (3) существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что  $|xt| \leq N e^{-\nu t} |x|$  при всех  $x \in X$  и  $t \in \mathbb{S}_+$ .

*Доказательство.* Из равенства  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |xt| = 0$  следует, что  $\Sigma_x^+$  относительно компактно и

$$\omega_x \subseteq \Theta = \{\theta_y : y \in J_Y, \text{ где } \theta_y - \text{ нулевой элемент } X_y\}.$$

Таким образом, динамическая система  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  поточечно диссипативна и согласно теореме 1.4.7 является компактно диссипативной. Обозначим через  $J_X$  центр Левинсона динамической системы  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  и покажем, что  $J_X = \Theta$ . Очевидно,  $\Theta$  является компактным и инвариантным ( $\pi^t \Theta = \Theta$  при всех  $t \in \mathbb{S}_+$ ) множеством и, следовательно,  $\Theta \subseteq J_X$ . Из последнего включения следует, что  $h(J_X) = J_Y$ . Покажем теперь, что  $J_X = \Theta$ . Если допустить, что это не так, то  $J_X \setminus \Theta \neq \emptyset$  и, следовательно, найдется  $x_0 \in J_X \setminus \Theta$ . Так как в  $J_X$  все движения продолжаемы на  $\mathbb{S}$  (см. теорему 1.3.6), то существует непрерывное отображение  $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow J_X$  такое, что  $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$  при всех  $s \in \mathbb{S}$  и  $t \in \mathbb{S}_+$ . С другой стороны, в силу линейности системы  $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}_+, \sigma), h \rangle$  наряду с точкой  $x_0$  множеству  $J_X$  принадлежат и все точки  $\lambda x_0$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), так как  $J_X$  есть максимальное компактное инвариантное множество в  $X$ . Но включение  $\lambda x_0 \in J$  может иметь место при всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда  $x_0 \in \Theta$ . Последнее противоречит выбору  $x_0$ . Полученное противоречие показывает, что  $J_X = \Theta$ .

Покажем теперь, что в  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  нет нетривиальных компактных продолжаемых на  $\mathbb{S}$  движений. Действительно, пусть  $x \in X$  таково, что существует  $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow X$ , обладающее следующими свойствами:  $\varphi(\mathbb{S})$  относительно компактно,  $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$  ( $t \in \mathbb{S}_+, s \in \mathbb{S}$ ) и  $\varphi(0) = x_0$ . Так как  $J_X$  — максимальное компактное инвариантное множество, то  $\overline{\varphi(\mathbb{S})} \subseteq J_X$  и, в частности,  $x_0 \in J_X \subseteq \Theta$ , поэтому  $|x_0| = 0$ . Таким образом мы показали, что из 1. следует 2.. Обратная импликация очевидна.

Докажем, что из 1. следует 3.. Действительно, так как в условиях теоремы 6.4.120 из 1. следует, что  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  поточечно диссипативна, то согласно теореме 1.4.7 она является локально диссипативной. В силу компактности  $Y$  и локальной диссипативности  $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$  найдется  $\delta > 0$  такое, что

$$(6.4.333) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup\{||xt|| : ||x|| < \delta\} = 0.$$

Из (6.4.333) стандартными рассуждениями (см., например, [180], [194], а также теорему 2.7.46) можно показать, что найдутся  $N, \nu > 0$  такие, что  $||xt|| \leq N e^{-\nu t} ||x||$  при всех  $x \in X$  и  $t \geq 0$ . Наконец, очевидно, из 3. следует 1.. Теорема доказана.

**Замечание 6.4.38.** *а. Условие локальной вполне непрерывности в теореме 6.4.120 является существенным. Для подтверждения сказанного достаточно рассмотреть пример 8, в котором все движения стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , но нет экспоненциальной устойчивости. Нетрудно убедиться, что динамическая система из примера 8 не является локально вполне непрерывной.*

*b. Теорема 6.4.120 остается справедливой и в том случае, если  $Y$  не являются метрическими, но являются псевдометрическими пространствами.*

Важным классом линейных неавтономных систем с бесконечномерным фазовым пространством, удовлетворяющих условию локальной вполне непрерывности, являются линейные неавтономные функционально-дифференциальные уравнения [88]. Напомним некоторые понятия и обозначения из [88]. Пусть  $r > 0$ ,  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$  – банахово пространство всех непрерывных функций  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\sup$ . Если  $[a, b] = [-r, 0]$ , то положим  $C := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Пусть  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$  и  $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ . Для любого  $t \in [\sigma, \sigma + A]$  определим  $u_t \in C$  соотношением  $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ ,  $-r \leq \theta \leq 0$ . Обозначим через  $D = D(C, \mathbb{R}^n)$  банахово пространство всех линейных непрерывных операторов действующих из  $C$  в  $\mathbb{R}^n$ , наделенное операторной нормой. Рассмотрим линейное уравнение

$$(6.4.334) \quad \dot{u} = A(t, u_t),$$

$A : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно и по второй переменной линейно, т.е. при каждом  $t \in \mathbb{R}$   $A(t, \cdot) \in D$ . Положим  $H(A) := \{A_s : s \in \mathbb{R}\}$ , где  $A_s(t, \cdot) = A(t + s, \cdot)$  и чертой обозначено замыкание в топологии равномерной сходимости на компактах из  $\mathbb{R} \times C$ .

Наряду с уравнением (6.4.334) рассмотрим семейство уравнений

$$(6.4.335) \quad \dot{v} = B(t, v_t),$$

где  $B \in H(A)$ . Пусть  $\varphi(\cdot, \phi, B)$  – решение уравнения (6.4.335), проходящее через точку  $\phi \in C$  при  $t = 0$ , определенное при всех  $t \geq 0$ .

Положим  $Y := H(A)$  и через  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$  обозначим динамическую систему сдвигов на  $H(A)$ . Пусть  $X := C \times Y$ , а  $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$  динамическая система (полугрупповая) на  $X$  определенная по следующему правилу:

$$\pi((\phi, B), \tau) = (\varphi(\tau, \phi, B), B_\tau).$$

Система  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \sigma), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$  является линейной. Отметим одно важное свойство построенной неавтономной динамической системы. Имеет место следующая

**Лемма 60.** *Пусть  $H(A)$  компактно. Тогда какова бы ни была точка  $x \in X := C \times H(A)$  существует окрестность  $U_x$  точки  $x$  и число  $l_x > 0$  такие, что  $\pi^t U_x$  относительно компактно при всех  $t \geq l_x$ , т.е. динамическая система  $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$  локально вполне непрерывна (локально-компактна).*

*Доказательство.* Сформулированное утверждение вытекает из лемм 2.2.3 и 3.6.1 из [88] и компактности  $Y$ .

Применяя к построенной неавтономной динамической системе теорему 6.4.120 (см. также замечание 6.4.38) и учитывая лемму 60, получим следующее утверждение.

**Теорема 6.4.121.** Пусть  $H(A)$  компактно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) нулевое решение уравнения (6.4.334) равномерно экспоненциально устойчиво, т.е. существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что  $\|\varphi(t, \phi, B)\| \leq Ne^{-\nu t}\|\phi\|$  при всех  $B \in H(A)$  и  $t \geq 0$ ;
- (2) какого бы ни было  $B \in H(A)$  нулевое решение уравнения (6.4.335) равномерно асимптотически устойчиво.

### 6.5. Конвергентность эволюционного уравнения с равномерно положительным оператором

Обозначим через  $L_{loc}^p(\mathbb{R}, H)$  пространство всех локально суммируемых вместе с  $p$ -ой степенью функций  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow H$ , т.е. таких, что

$$\int_{|t| \leq k} |\varphi(t)|^p dt < +\infty \quad (p > 1, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Топологию на  $L_{loc}^p(\mathbb{R}, H)$  определим при помощи системы полунорм  $|\cdot|_k$ :

$$|\varphi|_k := \left( \int_{|t| \leq k} |\varphi(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и через  $(L_{loc}^p(\mathbb{R}, H), \mathbb{R}, \sigma)$  обозначим динамическую систему сдвигов на  $L_{loc}^p(\mathbb{R}, H)$  (см. [189]).

Напомним [142], что оператор  $A : D(A) \rightarrow H$  ( $D(A) \subseteq H$  область определения  $A$  и  $H$ —вещественное гильбертово пространство) называется:

- a. монотонным, если для любых  $u_1, u_2 \in D(A) : \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0$ ;
- b. полунепрерывным, если функция  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная равенством  $\varphi(\lambda) := \langle A(u + \lambda v), w \rangle$ , непрерывна;
- c. равномерно монотонным, если существует положительное число  $\alpha > 0$  такое, что  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2$  при всех  $u, v \in D(A)$ .

Заметим, что семейство монотонных операторов можно частично упорядочить по включению графиков. Монотонный оператор называется максимальным, если он является максимальным среди монотонных операторов.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$(6.5.336) \quad \dot{x} + Ax = f,$$

где  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, H)$  и  $A$  — максимальный монотонный оператор с областью определения  $D(A)$ . Согласно [189], какого бы ни было  $x_0 \in \overline{D(A)}$  существует единственное слабое решение  $\varphi(t, x_0, f)$  уравнения (6.5.336), удовлетворяющее условию  $\varphi(0, x_0, f) = x_0$  и определенное на  $\mathbb{R}_+$ .

Пусть  $Y := H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ , где чертой обозначено замыкание в  $L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$ , и через  $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$  обозначим динамическую систему сдвигов на  $Y$ , индуцированную динамической системой  $(L^1_{loc}(\mathbb{R}, H), \mathbb{R}, \sigma)$ . Положим  $X := \overline{D(A)} \times Y$  и определим  $\pi : \mathbb{R}_+ \times \overline{D(A)} \times Y \rightarrow \overline{D(A)} \times Y$  равенством  $\pi((v, g), t) := (\varphi(t, v, g), g_t)$  и  $h := pr_2 : X \rightarrow Y$ . Как показано в работе [189], тройка  $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$  является неавтономной динамической системой. Применяя к ней полученные ранее результаты, получим соответствующие утверждения для уравнения (6.5.336). Приведем одно из утверждений такого рода.

**Теорема 6.5.122.** Пусть  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$  таково, что  $H(f)$  компактно. Если  $A$  – максимальный монотонный оператор, который является полунепрерывным и равномерно монотонным, то (6.5.336) конвергентно, т.е. уравнение (6.5.336) имеет единственное компактное равномерно согласованное решение  $\varphi(t, u_f, f)$  ( $u_f \in \overline{D(A)}$ ), определенное на  $\mathbb{R}$  и оно равномерно асимптотически устойчиво в целом. Более того, существуют положительные числа  $N$  и  $\nu$  такие, что, каково бы ни было  $g \in H(f)$ , уравнение

$$(6.5.337) \quad \dot{v} + Av = g$$

имеет единственное компактное равномерно согласованное решение

$$\varphi(t, v_g, g) \quad (v_g \in D(A)),$$

определенное на  $\mathbb{R}$  и такое, что

$$(6.5.338) \quad |\varphi(t, v, g) - \varphi(t, v_g, g)| \leq Ne^{-\nu t} |v - v_g|$$

при всех  $v \in \overline{D(A)}$  и  $t \geq 0$ .

*Доказательство.* Сформулированное утверждение непосредственно получается из теоремы 2.5.39, если ее применить к построенной выше неавтономной динамической системе. При этом надо учесть, что согласно результатам работы [189] из равномерной монотонности оператора  $A$  следует существование положительных чисел  $N$  и  $\nu$  таких, что

$$(6.5.339) \quad |\varphi(t, v_1, g) - \varphi(t, v_2, g)| \leq Ne^{-\nu t} |v_1 - v_2|$$

при всех  $v_1, v_2 \in D(A)$  и  $g \in H(A)$ . Соотношение (6.5.339) гарантирует выполнение условия г. теоремы 2.5.39, если в качестве  $V : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , взять, например, функцию  $V((v_1, g), (v_2, g)) := |v_1 - v_2|$   $g \in H(f)$ ,  $v_1, v_2 \in \overline{D(A)}$ .

**СЛЕДСТВИЕ 53.** Пусть  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$  рекуррентна (почти периодична,  $\tau$ -периодична) и выполнены условия теоремы 6.5.122. Тогда уравнение (6.5.336) имеет единственное рекуррентное (почти периодическое,  $\tau$ -периодическое) решение, которое равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Отметим, что в почти периодическом случае следствие 53 уточняет и усиливает один результат из [56, с.164].

В заключении приведем пример уравнения вида (6.5.336).

Рассмотрим уравнение

$$(6.5.340) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \phi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + f(t)$$

в открытой ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с граничным условием  $u = 0$  на  $\partial\Omega$ . Предположим, что функция  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяют условиям:  $\phi(0) = 0$  и  $0 < c_1 \leq \phi'(\xi) \leq c_2$  ( $\xi \in \mathbb{R}$ ). Тогда уравнение (6.5.340) эквивалентно системе

$$(6.5.341) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta u - \phi(v) + f(t). \end{cases}$$

Наконец, положим  $H := W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$  и определим на  $H$  скалярное произведение

$$\langle (u, v), (u^*, v^*) \rangle := \int_{\Omega} [vv^* + uv + \lambda uv^* + \lambda u^*v] dx,$$

где  $\lambda$  – некоторая положительная константа, зависящая только от  $c_1$  и  $c_2$ . Можно проверить (см., например, [154]), что при сделанных предположениях все условия теоремы 6.5.122 выполнены, если  $H(f) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  компактно.

## Литература

- [1] В. М. Алексеев. *Символическая динамика*. Киев, Наукова думка, 1986. Одиннадцатая математическая школа.
- [2] В. М. Алексеев и М. В. Якобсон. *Символическая динамика и гиперболические динамические системы*. Р.Боуэн. Методы символической динамики, 196–240. М., Мир, 1979.
- [3] А. С. Андреев. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы. *Прикладная математика и механика*, 48(2):1225–1232, 1984.
- [4] В. И. Арнольд. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М., Наука, 1978.
- [5] П. В. Атрашенко. Некоторые вопросы устойчивости движения. *Вестник ЛГУ, математика*, (8):79–106, 1954.
- [6] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их размерности. *УМН*, 38(4(232)):133–187, 1983.
- [7] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Оценка сверху и снизу размерности аттракторов эволюционных уравнений с частными производными. *Сибирский математический журнал*, 24(5):15–30, 1983.
- [8] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Аттракторы параболических уравнений и системы Навье–Стокса и оценка их размерности. В сб. *Общая теория граничных задач*. Киев, 1983. Стр. 14–25.
- [9] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения. *УМН*, 41(4(250)):3–34, 1986.
- [10] А. В. Бабин и М. И. Вишик. О неустойчивых множествах эволюционных уравнений в окрестности критических точек стационарной кривой. *Известия АН СССР, Математика*, 51(1):44–78, 1987.
- [11] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Полугруппы, зависящие от параметра, их аттракторы и асимптотическое поведение. В сб. *Глобальный анализ и нелинейные уравнения*. Из-во ВГУ, 1988.
- [12] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Аттракторы параболических и гиперболических уравнений, характер их компактности и притяжения к ним. *Вестник МГУ, серия I, Математика, Механика*, (3):71–73, 1988.



- [13] А. В. Бабин и М. И. Вишик. *Аттракторы эволюционных уравнений*. М., Наука, 1989.
- [14] Е. А. Барбашин. *Введение в теорию устойчивости*. М., Наука, 1967.
- [15] И. У. Бронштейн. *Расширение минимальных групп преобразований*. Кишинев, Штиинца, 1975.
- [16] И. У. Бронштейн и А. И. Герко. *О вложении некоторых топологических полугрупп преобразований в топологические группы преобразований*. *Известия АН Молдавской ССР, серия физ.-тех. и матем. наук*, 3:18-24, 1970.
- [17] И. У. Бронштейн. *Неавтономные динамические системы*. Кишинев, Штиинца, 1984.
- [18] Н. Бурбаки. *Топологические векторные пространства*. М., Мир, 1959.
- [19] Р. Ганнинг и Х. Росси. *Аналитические функции многих переменных*. М., Мир, 1969.
- [20] В. М. Герштейн и М. А. Красносельский. Структура множества решений диссипативных уравнений. *Доклады АН СССР*, 183(2):267–269, 1968.
- [21] В. М. Герштейн. О диссипативности одной двумерной системы. *Дифференциальные уравнения*, 5(8):1438–1444, 1969.
- [22] В. М. Герштейн. Замечание о диссипативных потоках. *Труды математического факультета воронежского госуниверситета*, (1):26–34, 1970.
- [23] В. М. Герштейн. К теории диссипативных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. *Функциональный анализ и его приложения*, 4(3):99–100, 1970.
- [24] В. М. Герштейн. О непериодических диссипативных системах. *Труды математического факультета воронежского госуниверситета*, (6):12–20, 1972.
- [25] Ю. Л. Далецкий и М. Г. Крейн. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. М., Наука, 1970.
- [26] Б. П. Демидович. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I. *Вестник МГУ*, (6):19–27, 1961.
- [27] Б. П. Демидович. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, II. *Вестник МГУ*, (1):3–8, 1962.
- [28] Б. П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости*. М., Наука, 1967.
- [29] В. В. Жиков. К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений. *Научные труды ВВПИ, математика*, (8):94–188, 1969.
- [30] В. В. Жиков. Об устойчивости и неустойчивости центра Левинсона. *Дифференциальные уравнения*, 8(12):2167–2170, 1972.

- [31] В. Г. Задорожный. О нелокальных решениях  $V$ -диссипативных дифференциальных уравнений. *Украинский математический журнал*, 35(3):303–308, 1983.
- [32] И. Л. Зинченко. О структуре асимптотически устойчивых инвариантных множеств периодических комплексных аналитических систем дифференциальных уравнений. *Вестник ЛГУ, математика, механика, астрономия*, 1(1):23–25, 1980.
- [33] И. Л. Зинченко. Теорема о конвергенции комплексных аналитических систем. *Дифференциальные уравнения*, 25(10):1809–1810, 1989.
- [34] В. И. Zubov. *Методы А.М.Ляпунова и их приложения*. Л., ЛГУ, 1957.
- [35] В. И. Zubov. *Устойчивость движения*. М., Высшая школа, 1973.
- [36] В. И. Zubov. *Теория колебаний*. М., Наука, 1979.
- [37] А. О. Игнатъев. Некоторые обобщения теорем Барбашина–Красовского. *Математическая физика*, 34:19–22, 1983.
- [38] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнения Навье–Стокса. *УМН*, 36(3):243–244, 1981.
- [39] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие динамические системы и аттракторы. *УМН*, 37(1):166, 1982.
- [40] Ю. С. Ильяшенко и А. И. Четаев. О размерности аттракторов для одного класса диссипативных систем. *Прикладная математика и механика*, 46(3):374–381, 1982.
- [41] Ю. С. Ильяшенко. О размерности аттракторов  $k$ -сжимающих систем в бесконечномерном пространстве. *Вестник МГУ, серия I, математика, механика*, 3:52–59, 1983.
- [42] Л. В. Капитанский и И. Н. Костин. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимация. *Алгебра и Анализ*, 2(1):114–140, 1990.
- [43] А. Картан. *Элементарная теория аналитических функций одной и нескольких комплексных переменных*. М., Мир, 1963, стр. 296.
- [44] А. Б. Каток. *Динамические системы с гиперболической структурой*. Киев, Наукова думка, 1972, стр. 125–211. Девятая математическая школа.
- [45] Дж. Л. Келли. *Общая топология*. М., Наука, 1981.
- [46] Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*. М., Мир, 1958.
- [47] М. А. Красносельский и П. П. Забрейко. *Геометрические методы нелинейного анализа*. М., Наука, 1975.
- [48] К. Куратовский. *Топология*. М., Мир, 1966 В 2-х томах, том 1.
- [49] К. Куратовский. *Топология*. М., Мир, 1969 В 2-х томах, том 2.
- [50] Н. Н. Ладис. Асимптотика решений квазиоднородных систем. *Дифференциальные уравнения*, 9(12):2257–2260, 1973.

- [51] О. А. Ладыженская. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 27:911–115, 1972.
- [52] О. А. Ладыженская. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье–Стокса и других диссипативных систем. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 112:137–155, 1982.
- [53] О. А. Ладыженская. Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 152:72–85, 1986.
- [54] О. А. Ладыженская. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными. *УМН*, 42(6(258)):25–60, 1987.
- [55] О. А. Ладыженская. Некоторые дополнения и уточнения к моим публикациям по теории аттракторов для абстрактных полугрупп. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 182:102–112, 1990.
- [56] Б. М. Левитан и В. В. Жиков. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*. М., МГУ, 1978.
- [57] А. Лихтенберг и Н. Либерман. *Регулярная и стохастическая динамика*. М., Мир, 1984.
- [58] Ю. И. Любич. Замечание об устойчивости комплексных динамических систем. *Известия ВУЗов, математика*, (10(257)):49–50, 1983.
- [59] Х. Массера и Х. Шеффер. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*. М., Мир, 1970.
- [60] А. А. Мартынюк, Д. Като и А. А. Шестаков. *Устойчивость движения: метод предельных уравнений* Киев, Наукова думка, 1990.
- [61] В. М. Матросов. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 5(12):2129–2143, 1969.
- [62] В. М. Миллионщиков. Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР*, 161(1):43–44, 1965.
- [63] В. М. Миллионщиков. О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем. *Дифференциальные уравнения*, 4(9):1555–1559, 1968.
- [64] В. М. Миллионщиков. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 7(3):387–390, 1971.
- [65] Ю. А. Митропольский, Н. А. Перестюк и О. С. Черникова. Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. *Доклады АН УССР*, А(11):11–15, 1983.
- [66] Ю. А. Митропольский и В. Л. Кулик. Ограниченные решения нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Украинский математический журнал*, 36(6):720–729, 1984.
- [67] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. М., Наука, 1949.

- [68] В. В. Немыцкий. О некоторых методах качественного исследования в "большом" многомерных автономных систем. *Труды ММО*, 5:455–482, 1956.
- [69] В. В. Немыцкий. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. *УМН*, 22(4):3–36, 1965.
- [70] З. Нитецки. *Введение в дифференциальную динамику*. М., Мир, 1975.
- [71] А. И. Перов и Ю. В. Трубников. Монотонные дифференциальные уравнения, I. *Дифференциальные уравнения*, 10(5):804–815, 1974.
- [72] А. И. Перов и Ю. В. Трубников. Монотонные дифференциальные уравнения, II. *Дифференциальные уравнения*, 12(7):1223–1237, 1976.
- [73] С. Ю. Пилюгин. *Структура притягивающих множеств гиперболических систем дифференциальных уравнений*. Докт. дисс., Л., 1983.
- [74] В. А. Плисс. *Нелокальные проблемы теории колебаний*. М., Наука, 1964.
- [75] В. А. Плисс. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*. М., Наука, 1977.
- [76] Р. Рейсиг, Г. Сансоне и Р. Конти. *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений*. М., Наука, 1974.
- [77] У. Рудин. *Функциональный анализ*. М., Мир, 1975.
- [78] Н. Руш, П. Абетс и М. Лалуа. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*. М., Мир, 1980.
- [79] Б. Н. Садовский. Предельно компактные и уплотняющие операторы. *УМН*, 27(1(163)):81–146, 1972.
- [80] *Странные аттракторы*. Сборник статей. М., Мир, 1981, стр. 253.
- [81] К. С. Сибирский. *Введение в топологическую динамику*. Кишинев, РИО АН МССР, 1970.
- [82] К. С. Сибирский и А. С. Шубэ *Полудинамические системы (топологическая теория)*. Кишинев, Штиинца, 1970.
- [83] Ю. В. Трубников, А. И. Перов *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*. Минск, Наука и техника, 1986.
- [84] Д. С. Факих. Центр Левинсона дисперсных диссипативных динамических систем. *Известия АН ССРМ*, (3):55–59, 1990.
- [85] А. Халанай и Д. Векслер. *Качественная теория импульсных систем*. М., Мир, 1971.
- [86] П. Халмош. *Гильбертово пространство в задачах*. Мир, М., Мир, 1970.
- [87] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Мир, 1970.
- [88] Дж. Хейл. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. М., Мир, 1984.
- [89] Д. Хьюзмоллер. *Расслоенные пространства*. М., Мир, 1970.

- [90] Д. Н. Чебан. Асимптотически устойчивые по Пуассону решения операторных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 13(8):1411–1417, 1977.
- [91] Д. Н. Чебан. О сравнимости точек динамических систем по характеру возвращаемости в пределе. *Математические науки*, Кишинев, Штиинца, 1:66–71, 1977.
- [92] Д. Н. Чебан. *Теория линейных дифференциальных уравнений (избранные главы)*. Кишинев, Штиинца, 1980.
- [93] Д. Н. Чебан. Об устойчивости центра Левинсона неавтономных диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 20(11):2016–2018, 1984.
- [94] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. *Дифференциальные уравнения*, 21(5):913–914, 1985.
- [95] Д. Н. Чебан. С-аналитические диссипативные динамические системы. *Тезисы докладов 3-ей конференции по дифференциальным уравнениям и приложениям*, стр. 141. Русе, НРБ, 1985.
- [96] Д. Н. Чебан. Диссипативные динамические системы. *Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н.Векуа*, 1(3):154–157, 1985.
- [97] Д. Н. Чебан. О втором методе Ляпунова в теории устойчивости динамических систем. *Дифференциальные уравнения и динамические системы*. Математические исследования, 80:139–147, Кишинев, 1985.
- [98] Д. Н. Чебан. Квазипериодические решения диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*, 22(2):267–278, 1986.
- [99] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. *Доклады АН СССР*, 28(4):824–827, 1986.
- [100] Д. Н. Чебан. Один признак конвергентности нелинейных систем в гильбертовом пространстве. *Дифференциальные уравнения и их инварианты* Математические исследования, 88:136–143, Кишинев, Штиинца, 1986.
- [101] Д. Н. Чебан. Признак конвергентности нелинейных систем по первому приближению. *Дифференциальные уравнения и их инварианты* Математические исследования, 88:144–150, Кишинев, Штиинца, 1986.
- [102] Д. Н. Чебан. Неавтономные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Тезисы докладов 6-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, стр. 197–198. Иркутск, 1986.
- [103] Д. Н. Чебан. С-аналитические диссипативные динамические системы. *Дифференциальные уравнения*, 22(11):1915–1922, 1986.
- [104] Д. Н. Чебан. О неавтономных диссипативных динамических системах. *УМН*, 41(4(250)):169, 1986.

- [105] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 23(3):464–474, 1987.
- [106] Д. Н. Чебан. Ограниченность, диссипативность и почти периодичность решений линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Динамические системы и краевые задачи*, Кишинев, Штиинца, стр. 143–159, 1987.
- [107] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 56–54, 1988.
- [108] Д. Н. Чебан. Импульсные и разностные диссипативные системы с периодическими коэффициентами. *Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому анализу*, Кишинев, Штиинца, 127–142, 1988.
- [109] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 24(6):1086, 1988.
- [110] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы. *Дифференциальные уравнения*, 24(9):1564–1576, 1988.
- [111] Д. Н. Чебан. Принцип усреднения на полуоси для диссипативных систем. *Динамические системы и уравнения математической физики* Математические исследования, 99:149–161, Кишинев, Штиинца, 1988.
- [112] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы с гиперболическим подмножеством центра (одномерный случай). *Математические заметки*, 45(6):93–98, 1989.
- [113] Д. Н. Чебан. Об одной проблеме Дж.Хейла. *Тезисы докладов 7-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, Рига, стр. 227, 1989.
- [114] Д. Н. Чебан. *Некоторые вопросы теории диссипативных динамических систем, I*, Дифференциальные уравнения и математическая физика, стр. 147–163. Математические Исследования. Кишинев, Штиинца, 1989. Выпуск 106.
- [115] Д. Н. Чебан. Об одной проблеме Дж.Хейла. *Математические заметки*, 46(1):120–121, 1989.
- [116] Д. Н. Чебан. Неавтономные динамические системы с конвергенцией. *Дифференциальные уравнения*, 25(9):1633–1635, 1989.
- [117] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. *Дифференциальные уравнения*, 26(5):913–914, 1990.
- [118] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. *Известия АН ССРМ, Математика*, (2):34–43, 1990.

- [119] В. В. Чепыжов. Неограниченные аттракторы некоторых параболических систем дифференциальных уравнений и оценка их размерности. *ДАН СССР*, 301(1):46-49, 1988.
- [120] О. С. Черникова. О диссипативности систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. *Украинский математический журнал*, 35(5):656-660, 1983.
- [121] О. С. Черникова. К вопросу об ограниченности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. *Украинский математический журнал*, 38(1):124-127, 1986.
- [122] И. Д. Чуешов. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек. *Математический сборник*, 133(4):419-428, 1989.
- [123] И. Д. Чуешов. Сильные решения и аттрактор системы уравнений Карамана. *Математический сборник*, 181(1):25-36, 1990.
- [124] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ*. М., Наука, 1969.
- [125] А. Н. Шарковский. Аттракторы некоторых нелинейных краевых задач. *Тезисы докладов 6-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, стр. 205, Иркутск, 1986.
- [126] А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко и Е. Ю. Романенко. *Разностные уравнения и их приложения*. Киев, Наукова думка, 1986.
- [127] Л. Шварц. *Анализ*, том 1. М., Мир, 1972. В 2-х томах.
- [128] Л. Шварц. *Анализ*, том 2. М., Мир, 1972. В 2-х томах.
- [129] А. А. Шестаков. Обобщенный метод Ляпунова для абстрактных полудинамических процессов, I. Полудинамические процессы как полудинамические системы. Локализация предельного множества автономных и асимптотически автономных полудинамических процессов. *Дифференциальные уравнения*, 22(9):1475-1490, 1986.
- [130] В. Н. Щенников. Исследование конвергенции в неавтономной дифференциальной системе с помощью вектор-функции Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 19(11):1902-1907, 1983.
- [131] В. Н. Щенников. Явление конвергенции сложных систем дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 19(11):1568-1571, 1984.
- [132] Б. А. Щербаков. *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений*. Кишинев, Штиинца, 1972.
- [133] Б. А. Щербаков и Д. Н. Чебан. Асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем и сравнимость их возвращаемости в пределе. *Дифференциальные уравнения*, 13(5):898-906, 1977.
- [134] Б. А. Щербаков. *Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений*. Кишинев, Штиинца, 1985.

- [135] F. Abergel. Existence and Finite Dimensionality of the Global Attractor for Evolution Equations and Unbounded Domains. *Journal of Differential Equations*, 83(11):85–108, 1990.
- [136] Z. Artstein. Uniform Asymptotic Stability via the Limiting Equations. *Journal of Differential Equations*, 27(2):172–189, 1978.
- [137] J. Auslander and P. Seifert. Prolongation Stability in Dynamical Systems. *ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 14(2):237–268, 1964.
- [138] A. V. Babin and M. I. Vishik. Regular Attractor of Semigroups and Evolutional Equations. *Journal Math. Pures et Appl.*, 62:172–189, 1983.
- [139] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
- [140] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Local Semi-Dynamical Systems*. Lecture Notes in Mathematics, v.90. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
- [141] J. E. Billotti and J. P. LaSalle. Dissipative Periodic Process. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77(6):1082–1088, 1971.
- [142] H. Brezis. *Operateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, volume 5 of *Math. Studies*. North Holland, 1973.
- [143] F. E. Browder. Some New Asymptotic Fixed Point Theorems. *Proc. Acad. Sci.*, 71:2734–2735, 1974.
- [144] R. H. Cameron. Almost Periodic Properties of Bounded Solutions of Linear Differential Equation with Almost Periodic Coefficients. *J. Math. Phys.*, 15:73–81, 1936.
- [145] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. On Non-linear Differential Equations of the Second Order, I. The Equation  $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)k$  large. *J. Math. Soc.*, 20:180–189, 1945.
- [146] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. On Non-linear Differential Equations of the Second Order, II. The Equation  $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)k$  for large  $k$  and its generalizations. *Acta Math.*, 97:3–4, 1957.
- [147] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. On Non-linear Differential Equations of the Second Order, III. The General Equation. *Acta Math.*, 98:1–2, 1957.
- [148] C. C. Conley and R. K. Miller. Asymptotic Stability without Uniform Stability: Almost Periodic Coefficients. *Journal of Differential Equations*, 1:333–336, 1965.
- [149] G. D. Cooperman.  $\alpha$ -condensing Maps and Dissipative Systems. PhD thesis, Brown University, 1978.
- [150] C. Corduneanu. Systems Differentiels Admettant des Solutions Bornées. *C.R. Acad. Sci., Ser. A–B.*, 245:21–24, 1957.
- [151] C. M. Dafermos. An Invariance Principle for Compact Processes. *Journal of Differential Equations*, (9):239–252, 1971.
- [152] C. M. Dafermos. Uniform Processes and semicontinuous Lyapunov Functionals. *Journal of Differential Equations*, (11):401–415, 1972.



- [153] C. M. Dafermos. Semiflows Associated with Compact and Uniform Processes. *Math. Syst. Theory*, 8(2):142–149, 1974.
- [154] C. M. Dafermos. Almost Periodic Process and Almost Periodic Solutions of Evolution Equations. *Dynamical Systems. Proceedings of a University of Florida international symposium*, 43–58, 1977.
- [155] A. Denjoy. Sur les Courbes Définies par les Equations Differentielles a la Surface du Tore. *Journal Math. Pures et Appll (Ser. 9)*, (11):333–375, 1932.
- [156] L. G. Deyseach and G. R. Sell. On the Existence of Almost Periodic Motions. *Michigan Mathematic Journal*, 12(1):87–95, 1965.
- [157] J. P. Eskman. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. *Rev. Mod. Phys*, 53:643–654, 1981.
- [158] A. M. Fink and P. O. Fredericson. Ultimate Boundness does not Imply Almost Periodicity. *Journal of Differential Equations*, (9):280–284, 1971.
- [159] C. Foias, G. R. Sell and R. Temam. Inertial Manifolds of Nonlinear Evolutionary Equations. *Journal of Differential Equations*, 73(4):309–353, 1988.
- [160] G. Fusco and M. Oliva. Dissipative Systems with Constraints. *Journal of Differential Equations*, 63:362–388, 1986.
- [161] J. M. Ghidaglia and R. Temam. Attractor for Damped Nonlinear Hiperboliv Equations. *J. Pures et Appl.*, 66:273–319, 1987.
- [162] J. K. Hale, J. P. LaSalle and M. Slemrod. Theory of a General Class of Dissipative Processes. *Journal Math. Appl.*, 39:177–191, 1972.
- [163] J. K. Hale and O. F. Lopes. Fixed Point Theorems and Dissipative Process. *Journal of Differential Equations*, 13:391–402, 1973.
- [164] J. K. Hale and G. Raugel. Upper Semicontinuity for a Singularly Perturbed Hyperbolic Equation. *Journal of Differential Equations*, 73(2):197–214, 1988.
- [165] J. K. Hale and G. Raugel. Lower Semicontinuity of Attractors of Gradient Systems and Applications. *Ann. Math. Pura Appl.*, 4(154):281–326, 1989.
- [166] J. K. Hale.  $\alpha$ -contraction and Differential Equations. *Actes de la Conference Internationale "Equa-Difs-73"*, Actualites Scientifiques et industrielles 1361, pages 16–41, Bruxelles et Louvain, 1973. Hermann.
- [167] J. K. Hale. Some Recent Results on Dissipative Processes. *Lecture Notes in Mathematics*, pages 152–172. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
- [168] J. K. Hale. Asymptotic Behavior and Dynamics in Infinite Dimensions. *Nonlinear Differ. Equations*, 1–42. Boston e. á, 1985.
- [169] J. K. Hale. Asymptotically Smooth Semigroups and Applications. *Lecture Notes in Math.*, (1248):85–93, 1987.
- [170] J. K. Hale. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. *Mathematical surveys and Monographs*, 25, p. 198+. American Math. Soc., Providence, R.I., 1988.

- [171] J. K. Hale. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (1):175–183, 1990.
- [172] A. Haraux. Attractors of Asymptotically Compact Processes and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations. *Commun. in Partial Differ. Equat.*, 13(11):1383–1414, 1988.
- [173] A. Haraux. *Systèmes Dynamiques Dissipatifs et Applications*. Masson, Paris–Milan–Barselona–Rome, 1991.
- [174] I. Hitoshi. On the Existence of Almost Periodic Complete Trajectories for Contractive Almost Periodic Processes. *Journal of Differential Equations*, 43(1):66–72, 1982.
- [175] V. Iftode. A-Dissipativity for Periodic Solutions in Ordinary Differential Equations. *Rev. Roum. Pures et Appl.*, 23(6):513–521, 1983.
- [176] Ju. S. Ilyashenko. The Concept of Minimal Attractor and Maximal Attractor of Partial Differential Equations of the Kuramoto–Sivashinsky Type. *Chaos*, 1(2):168–173, 1991.
- [177] A. F. Izé and J. G. Reis. Contributions of Stability of Neutral Functional Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 29:58–65, 1978.
- [178] R. A. Johnson. On a Floquet Theory for Almost Periodic Two-Dimensional Linear Systems. *Journal of Differential Equations*, 37:184–205, 1980.
- [179] G. S. Jones. The existence of Critical Points in Generalized Dynamical Systems. Springer-Verlag, *Lecture Notes in Math.*, v. 60, p. 7–19, 1968. *Seminaire on Differential Equations and Dynamical Systems*.
- [180] J. Kato and F. Nakajima. On Sacker–Sell’s Theorem for a Linear Skew Flow. *Tôhoku Math. Journ.*, 28:79–88, 1976.
- [181] J. P. LaSalle. Dissipative Systems. In *Proceedings of the Conference on Ordinary Differential Equations*, pages 165–174, Washington, D.C., 1971. New York.
- [182] N. Levinson. Transformation Theory of Nonlinear Differential Equations of the Second Order. *Ann. Math.*, 45(4):723–737, 1944.
- [183] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1962.
- [184] J. Mallet-Paret. Morse Decomposition for Delay-Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 72(2):270–315, 1988.
- [185] P. Massat. Stability and Fixed Points of Point-Dissipative Systems. *Journal of Differential Equations*, 40:217–231, 1981.
- [186] P. Massat. On Obtaininig Ultimate Boundedness for  $\alpha$ - Contraction Volterra and Functional-Differential Equations. In *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, p. 273–280. Dekker, New York, 1983.
- [187] P. Massat. Attractivity Properties of  $\alpha$ -Contractions. *Journal of Differential Equations*, 48:326–333, 1983.
- [188] R. K. Miller. Almost Periodic Differential Equations as Dynamical System with Applications to the Existence of Almost Periodic Solutions. *Journal of Differential Equations*, 1:337–345, 1965.

- [189] H. Nacer. Systems Dynamiques Nonautonomes Contractants et leur Applications. Thèse de magister. Algerie, USTHB, 1983.
- [190] Z. Opial. Sur une Equation Differentielle Presque-Periodique sans Solution Presque-periodique. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. Phys.*, 9:673–676, 1961.
- [191] N. Pavel. On Dissipative Systems. *Bolletino Un. Mat. Ital.*, 4(5):701–707, 1971.
- [192] N. Pavel. A Generalization of Ultimately Bounded Systems. *An. Sti. Uni. "Al.I.Cuza", Iași. Sect. I.a, Mat.*, 18:81–86, 1972.
- [193] N. Pavel. On the Boundedness of Solutions of Systems of Differential Equations. *Tohoku Math. Journal*, 24:21–32, 1972.
- [194] R. J. Sacker and G. R. Sell. Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems, I. *Journal of Differential Equations*, 15:429–458, 1974.
- [195] G. Seifert. Almost Periodic Solutions for Almost Periodic System of Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 2:305–319, 1966.
- [196] G. R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I. The Basic Theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:241–262, 1967.
- [197] G. R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I. Limiting Equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:263–283, 1967.
- [198] G. R. Sell. Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations, *Van Nostrand-Reinbold, London*, 1971.
- [199] Zhang Shunian. Functional Differential Equations and Topological Dynamics. *Chinese Science Bulletin*, 35(17):1441–1448, 1990.
- [200] J. Skovronski and S. Ziemba. The Problem of Vibrations of Nonautonomic Systems with Strong Nonlinearity. *Arch. Mech. Stosowanej*, 10(4):517–523, 1958.
- [201] P. Talpalaru. Sur les Systems dissipatifs. *Ann. Stiint. Univ. Iasi, Sec. I.a*, 13(1):43–47, 1967.
- [202] D. N. Tchéban. Systemes Dynamiques Dissipatifs. *II-Rencontre Nationale sur les Equations Differentielles Ordinaires. Resumes des Exposes*, p. 40–41, Alger, 1983.
- [203] R. Temam. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. *North-Holland, Amsterdam*, 1979.
- [204] R. Temam. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1988.
- [205] R. Temam. Induced Trajectories and Approximate Inertial Manifolds. *Math. Modelling. Numer. Anal.*, 23:541–561, 1989.
- [206] R. Temam. Inertial Manifolds. *Math. Intelligencer*, 12(4):68–74, 1990.
- [207] E. S. Titi. On Approximate-Inertial Manifolds to the Navier–Stokes Equations. *Journal Math. Anal. Appl.*, 149:540–557, 1990.

- [208] M. Xavier. Finite-Dimensional Attracting Manifolds in Reaction-Diffusion Equations. *Contemp. Math.*, 17:540–557, 1983.
- [209] T. Yoshizawa. Note on the Boundedness and the Ultimate Boundedness of Solutions  $x' = f(t, x)$ . *Memoirs of the College of Science. University of Kyoto, Serie A*, 29(3):275–291, 1955.
- [210] T. Yoshizawa. Lyapunov's Function and Boundedness of Solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2:95–142, 1959.
- [211] T. Yoshizawa. Stability Theory by Lyapunov's Second Method. *The Mathematical Series of Japan. Tokyo*, 1966.

