Д.Н.Чебан

Асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений

Молдавский государственный университет

Кафедра математического анализа
и дифференциальных уравнений

Д.Н.Чебан

Асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений

Монография

Утверждено Советом
факультета математики
и информатики

Кишинев-2002

Издательский центр
Молдавского госуниверситета

УДК 517.925
Ч33

Книга посвящена асимптотически почти периодическим решениям дифференциальных уравнений с асимптотически почти периодической правой частью. Изучение переходных и предельных режимов динамических систем занимает важное место в качественной теории дифференциальных уравнений. В книге вводятся и изучаются различные классы асимптотически устойчивых по Пуассону (асимптотическая периодичность, асимптотическая почти периодичность, асимптотическая рекуррентность и т. д.) движений динамических систем и устанавливаются связи между ними. Приводятся признаки существования асимптотически устойчивых по Пуассону решений операторных уравнений с приложениями к различным классам дифференциальных уравнений.

Монография предназначена для специалистов по теории дифференциальных уравнений, динамических систем и их приложений, а также для преподавателей и студентов старших курсов математических факультетов университетов.

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Чебан Д.Н.

Асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений Монография/ Д.Н.Чебан; Молд. гос. ун-т. Кафедра математ. анализа и дифференц. уравнений. – Ch.: Centrul editoria al USM, 2002. – 223 p.

ISBN 9975-70-095-0

100 ex.

517.925

Оглавление

Введение [1]

В качественной теории дифференциальных уравнений важную роль играют нелокальные проблемы, касающиеся условий существования тех или иных классов решений. Сюда относятся вопросы ограниченности, периодичности, почти периодичности, устойчивости по Пуассону, вопросы существования различного рода предельных режимов, конвергентность, диссипативность и т.д. Этому направлению принадлежит и настоящая работа, которая посвящена изучению асимптотически устойчивых по Пуассону (в частности, асимптотически почти периодических) движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений.

Задаче об асимптотической устойчивости по Пуассону посвящен ряд работ известных авторов.

Впервые понятие асимптотической почти периодичности функций было введен и изучено в работах М. Фреше. Позднее эти результаты обобщались на асимптотически почти периодические последовательности в работах Фан Ку и А. Прекупану и на абстрактные асимптотически почти периодические функции в работах Б.Г. Араркцяна и А. Прекупану.

Другой цикл работ (И. Георгиу, И. Барбалат, Г. Кордуняну, В. А. Коппель, Т. Йошизава, А. М. Финк, Р. К. Миллер, Дж. Сейферт и др.) посвящен задаче об асимптотической почти периодичности решений дифференциальных уравнений.

---

[1]Настоящая работа написана при частичной финансовой поддержке Молдавской Ассоциации Поддержки Исследований и Американского Фонда Поддержки Исследований и Развития для Государств Бывшего Советского Союза (грант No. MM1-3016).

Наконец, в ряде работ В. В. Немыцкого, К. С. Сибирского, И. У. Бронштейна, В. Ф. Черния, А. И. Герко, Н. П. Бхатия, С. Н. Чоу и других изучаются движения динамических систем по своим свойствам, близким к асимптотически почти периодическим.

Из вышеприведенного явствует, что задача об асимптотической устойчивости по Пуассону ранее изучалась в основном для асимптотической периодичности и асимптотической почти периодичности движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений. В этом направлении получен ряд важных результатов, однако указанная задача не была изучена достаточно полно .

В настоящей работе изучается общая задача об асимптотической устойчивости по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уруавнений.

С прикладной точки зрения движения динамических систем естественно разделяются на переходные (неустановившиеся) и установившиеся. Под переходными понимают такие движения, которые при неограниченном возрастании времени асимптотически приближаются к некоторому установившемуся движению, т.е. движению, которое обладает некоторым свойством повторяемости и устойчивости.

При попытке более точного определения неустановившегося движения мы приходим к понятию асимптотически устойчивого по Пуассону движения. Такие движения представляют особый интерес для приложений и наблюдаются, например, в системах, обладающих устойчивым колебательным режимом (например, при явлении конвергенции).

Применяемый в настоящей работе метод исследования основан на результатах топологической теории динамических систем и приложим для разнообразных типов асимптотической устойчивости по Пуассону. Идея применения методов теории динамических систем к изучению неавтономных дифференциальных уравнений сама по себе не нова. Она уже более трех десятилетий успешно применяется для решения различных задач в теории линейных и нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Впервые такой подход к неавтономным дифференциальным уравнениям был применен в работах В. М. Миллионщикова, Б. А. Щербакова, Л. Г. Дейсача и Дж. Селла, Р. К. Миллера, Дж. Сейферта, Дж. Селла, позднее в работах В. В. Жикова, И. У. Бронштейна, а затем и многих других авторов. Этот подход состоит в том, что с каждым неавтономным уравнением естественным образом связывается пара динамических систем и гомоморфизм первой на вторую. При этом в одну динамическую систему, грубо говоря, закладывается информация о правой части уравнения, а во вторую – информация о решениях этого уравнения.

Предлагаемая работа состоит из пяти глав.

В первой главе вводятся и изучаются асимптотически почти периодические движения абстрактных динамических систем. Приводятся различные критерии асимптотической периодичности и асимптотической почти периодичности движений. Применяя полученные результаты к динамической системе сдвигов (системе Бебутова) в пространстве непрерывных функций, мы получаем известные результаты М. Фреше. Рассматриваются также система сдвигов в пространстве локально-суммируемых функций, S^p-асимптотически почти периодические функции и устанавливается ряд их важнейших свойств.

Вторая глава посвящена асимптотически почти периодическим решениям операторных уравнений. Понятие сравнимости по характеру возвращаемости движений, введенное Б. А. Щербаковым для устойчивых по Пуассону движений, распространяется на асимптотически устойчивые по Пуассону движения.

А именно, вводится понятие сравнимости движений по характеру возвращаемости в пределе. Устанавливается, что сравнимые по возвращаемости в пределе движения принадлежат к одним и тем же классам асимптотической устойчивости по Пуассону. Получены различные признаки асимптотической устойчивости по Пуассону решений операторных уравнений. Изучаются гомоклинические и гетероклинические траектории динамических систем. Устанавливаются признаки конвергентности асимптотически почти периодичеких систем.

В третьей главе изучаются асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений. Приводятся признаки существования согласованных в пределе решений различных классов дифференциальных уравнений. Для асимптотически почти периодических систем устанавливается аналог 2-ой теоремы Боголюбова (принцип усреднения на полуоси). Изучаются двояко асимптотически почти периодические решения некоторых классов уравнений и асимптотически почти периодические системы с конвергенцией.

Четвертая глава посвящена асимптотически почти периодическим линейным системам с обобщенными возмущениями. Изучаются обобщенные ограниченные на полуоси и обобщенные асимптотически почти периодические функции. Даются необходимые и достаточные условия разрешимости линейных асимптотически почти периодических уравнений в пространстве асимптотически почти периодических распределений. Приводятся признаки существования слабо асимптотически почти периодических решений линейных и квазилинейных уравнений.

В пятой главе изучаются асимптотически почти периодические решения функционально-дифференциальных уравнений как с конечным, так и с бесконечным запаздыванием. Устанавливаются признаки существования асимптотически почти периодических решений интегральных уравнений Вольтерра. Даются условия конвергентности некоторых эволюционных уравнений с асимптотически почти периодическими коэффициентами.

Приводимые в работе результаты принадлежат в основном автору (кроме главы 4, в которой приводятся результаты Донтви Исаака (за исключением параграфа 4.6)) и опубликованы в его работах (см. библиографию), а часть из них (параграфы 2.5 – 2.7, 3.5 – 3.8, 5.4 и 5.6 – 5.7) публикуется здесь впервые.

Для лучшего расчленения материала и подчеркивания мест той или иной степени важности, мы выделяем не только леммы и теоремы, но и большое количество следствий, замечаний и примеров. Все они нумеруются тремя цифрами, первая из которых указывает номер главы, вторая – номер параграфа, а третья – номер, теоремы, леммы и т. д. в данном параграфе. Таким же образом нумеруются и формулы.

Автор надеется, что предлагаемая книга будет полезна как начинающим, так и более опытным математикам, интересующимся динамическими системами и их приложениями.

Обозначения

В работе употребляются следующие обозначения:

$\forall$	для любого;
$\exists$	существует;
$:=$	равно (совпадает) по определению;
0	число ноль, а также нулевой элемент всякой аддитивной группы (полугруппы);
$\mathbb{N}$	множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$	множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$	множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$	множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$	множество всех комплексных чисел;
$\mathbb{S}$	одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$;
$\mathbb{S}_+(\mathbb{S}_-)$	множество всех неотрицательных (неположительных) чисел из $\mathbb{S}$;
$X \times Y$	декартово произведение двух множеств;
M^n	прямое произведение n экземпляров множества M;
E^n	вещественное или комплексное n-мерное евклидово пространство;
$\{x_n\}$	последовательность;
$x \in X$	есть элемент множества X;
∂X	граница множества X;
$X \subseteq Y$	множество X составляет часть или совпадает с множеством Y;
$X \bigcup Y$	объединение множеств X и Y;
$X \setminus Y$	дополнение множества Y в X;
$X \bigcap Y$	пересечение множеств X и Y;
$\emptyset$	пустое множество;

(X,ρ)	полное метрическое пространство с метрикой ρ;
$\overline{M}$	замыкание множества M;
f^{-1}	отображение, обратное к f;
$f(M)$	образ множества $M \subseteq X$ при отображении $f : X \to Y$, т.е. $\{y \in Y : y = f(x), x \in M\}$;
$f \circ g$	композиция отображений f и g, т.е. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$;
$f\|_M$	сужение отображения f на множество M;
$f(\cdot, x)$	частное отображение, задаваемое функцией x при значении x второго аргумента;
Id_X	тождественное отображение X в X;
$Im(f)$	область значений функции f;
$D(f)$	область определения функции f;
$\|x\|$ или $\|\|x\|\|$	норма элемента x;
(x,y)	упорядоченная пара;
$C(X,Y)$	множество всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, наделенное открыто-компактной топологией;
$C^k(U,M)$	множество всех k-раз непрерывно дифференцируемых отображений многообразия U в многообразие M;
$f : X \to Y$	отображение X в Y;
$B(M,\varepsilon)$	открытая ε-окрестность множества M в метрическом пространстве X;
$B[M,\varepsilon]$	замкнутая ε-окрестность множества M в метрическом пространстве X;
$\{x, y, ..., z\}$	множество, состоящее из $x, y, ..., z$;
$\overline{1,n}$	множество, состоящее из $1, 2, ..., n$;
$\{x \in X \| \mathfrak{R}(x)\}$	множество всех элементов из X, обладающих свойством $\mathfrak{R}$;
$f^{-1}(M)$	прообраз множества $M \subseteq Y$ при отображении $f : X \to Y$, т.е. $\{x \in X : f(x) \in M\}$;
$F(t,\cdot) := f^t$	частное отображение, задаваемое функцией f при значении t первого аргумента;
$\rho(\xi,\eta)$	расстояние в метрическом пространстве X;
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$	предел последовательности;

$\varepsilon_k \downarrow 0$	монотонно убывающая к 0 последовательность;
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	предел отображения f при $x \to a$;
$\bigcup\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$	объединение семейства множеств $\{M_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$;
$\bigcap\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$	пересечение семейства множеств $\{M_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$;
$(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$	гильбертово пространсво со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$;
$C(X)$	семейство всех компактов из X;
$(X, \mathbb{T}, \pi)$	динамическся система;
(X, P)	каскад, порожденный положительными степенями P;
$\omega_x(\alpha_x)$	$\omega(\alpha)$-предельное множество точки x;
α_{φ_x}	α-предельное множество целой траектории $\varphi_x \in \Phi_x$;
Φ_x	множество всех целых траекторий динами–ческой системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, выходящих из точки x при $t = 0$.
$W^s(M)$	устойчивое многообразие (область притяжения) множества M;
M уст. L^+	множество M устойчиво по Лагранжу в положительном направлении;
D_x^+ (J_x^+)	положительное (положительное предельное) продолжение точки x;
$xt = \pi^t x = \pi(x,t)$	положение точки x в момент времени t;
$pr_i : X_1 \times X_2 \to X_i$	проекция $X_1 \times X_2$ на i-ую $(i = 1, 2)$ компоненту X_i;
$D^+(M) = \bigcup\{D_x^+ \vert x \in M\}$	положительное продолжение множества M;
$J^+(M) = \bigcup\{J_x^+ \vert x \in M\}$	положительное предельное продолжение множества M;
$\Sigma_x^+ := \{xt \mid t \in \mathbb{S}_+\}$	положительная полутректория точки x;
$\Sigma^+(M) := \cup\{\Sigma_x \mid x \in M\}$	положительная полутраектория множества M;

$H^+(x) := \overline{\Sigma_x^+}$	замыкание положительной полутраектории точки x;
$\Sigma_x := \{xt \mid t \in \mathbb{S}\}$	траектория точки x;
$H(x) := \overline{\Sigma_x}$	замыкание траектории точки x;
$\Omega := \overline{\cup\{\omega_x \mid x \in X\}}$	замыкание объединения всех ω - предельных точек $(X, \mathbb{T}, \pi)$;
$\mathfrak{M}_x$	множество всех направляющих последовательностей точки x;
$\mathfrak{N}_x$	множество всех собственных последоательностей точки x;
$\mathfrak{L}_x$	множество все последователь–ностей $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_x$, удовлетворя–ющих условию $\|t_n\| \to +\infty$;
$\beta(A, B)$	полуотклонение множества A от множества B $(A, B \in 2^X)$;
$D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, $m = 2, 3, \dots$	пространства функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to E^n$, обладающих $m-1$ обычными производными, причем $D^{m-1}\varphi$ абсолютно непрерывна, а $D^j\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $0 \le j \le m$;
$D^\infty_{L_1}(\mathbb{R}_+)$	пространство бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+)$.
$\mathcal{D}(Q)$	пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : Q \to E^n$ с компактным носителем;
$\mathcal{D}^m(Q)$	пространство функций $\varphi : Q \to E^n$ с m непрерывными производными и с компактным носителем;
$C^m(Q)$	совокупность всех функций $\varphi : Q \to E^n$, обладающих непрерывными производными до m-го порядка включительно;
$C^m(\overline{Q})$	совокупность всех функций φ из $C^m(Q)$, для которых все производные $D^m\varphi$ допускают непрерывное продолжение на $\overline{Q}$;
$\mathcal{D}'(Q)$	пространство сопряженное к $\mathcal{D}(Q)$;
$\beta'^m(\mathbb{R}_+)$	пространство сопряженное к $\mathcal{D}^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ $(0 \le m < +\infty)$;

$\beta^m(\mathbb{R}_+)$	множество всех мультипликаторов в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$;
$\beta^m_{app}(\mathbb{R}_+)$	пространство всех асимптотически почти периодических функций $\varphi \in \beta^m(\mathbb{R}_+)$;
$\beta^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$	пространство всех функций, асимптотически почти периодических вместе со всеми своими производными;
$\beta'^m_{app}(\mathbb{R}_+)$	пространство распределений $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$, сдвиги которых $\{\tau_n f \mid h \in \mathbb{R}_+\}$ образуют относительно компактное множество в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$;
$AP(\mathbb{R}_+)$	обозначают множество всех асимптотически почти периодических функций из $C(\mathbb{R}_+, E^n)$;
AP^m	множество всех m-раз непрерывно дифференцируемых функций из $C(\mathbb{R}_+, E^n)$, являющихся асимптотически почти периодическими вместе со своими производными до порядка m включительно;
$(X', \mathbb{R}, \pi')$	динамическая система сопряженная к $(X, \mathbb{R}, \pi)$;
$D = D(\mathbb{R})$	пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$;
X'	пространство всех линейных непрерывных функционалов на X;
$C_b(\mathbb{T}, E^n)$	банахово пространство всех непрерывных и ограниченных функций $f : \mathbb{T} \to E^n$ с нормой sup;
$(C^*_b(\mathbb{T}, E^n))^n$	пространство, сопряженное к $(C_b(\mathbb{T}, E^n))^n$;
$U(t, A)$	оператор Коши;
$G_A(t, \tau)$	функция Грина;
$D(A)$	область определения оператора A.

Глава 1

Асимптотически почти периодические движения

1.1. Некоторые понятия и обозначения

Приведем некоторые понятия и обозначения, принятые в теории динамических систем **[2]**,**[4]**,**[34]**,**[43]**,**[75]**, **[79]**, которые мы будем использовать в настоящей работе.

Пусть X – топологическое пространство, $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$) – группа действительных (целых) чисел, $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{Z}_+$) – полугруппа неотрицательных действительных (целых) чисел, $\mathbb{S}$ – одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$ ($\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}$, где $\mathbb{S}_+ = \{s | s \in \mathbb{S},\ s \geq 0\}$) – подполугруппа аддитивной группы S.

Тройку $(X, \mathbb{T}, \pi)$, где $\pi : X \times \mathbb{T} \to X$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

$$\pi(x, 0) = x \quad (x \in X,\ 0 \in \mathbb{T})$$

и

$$\pi(\pi(x, t), \tau) = \pi(x, t + \tau) \quad (x \in X;\ t, \tau \in \mathbb{T})$$

называют динамической системой. При этом, если $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$) или $\mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}$), то система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется полугрупповой (групповой). В случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$) динамическая система называется потоком, а если $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется каскадом. Для краткости будем писать вместо $\pi(x, t)$ просто xt или $\pi^t x$.

В дальнейшем, как правило, X – полное метрическое пространство с метрикой ρ.

Функцию $\pi(x, \cdot) : \mathbb{T} \to X$ при фиксированном $x \in X$ называют движением точки x, а множество $\pi(x, \mathbb{T}) = \Sigma_x$ траекторией этого движения или точки x.

Непустое множество $M \subseteq X$ называют полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным, если $\pi(M,t) \subseteq M$ ($\pi(M,t) \supseteq M$, $\pi(M,t) = M$) при всех $t \in \mathbb{T}$.

Отметим, что введенные понятия инвариантности различны для полугрупповых систем и эквивалентны для групповых систем.

Замкнутое инвариантное множество, не содержащее собственного подмножества, являющегося замкнутым и инвариантным, называется минимальным.

Точка $p \in X$ называется ω-предельной точкой движения $\pi(x,\cdot)$ и точки $x \in X$, если существует последовательность $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ такая, что $t_n \to +\infty$ и $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(x,t_n)$.

Совокупность всех ω-предельных точек движения $\pi(x,\cdot)$ обозначают через ω_x и называют ω-предельным множеством этого движения.

Точку x и движение $\pi(x,\cdot)$ называют устойчивым по Лагранжу в положительном направлении и обозначают уст. L^+, если $H^+(x) = \overline{\Sigma}_x^+$ является компактом, где $\Sigma_x^+ = \pi(x,\mathbb{T}_+)$ и $\mathbb{T}_+ = \{t | t \in \mathbb{T},\ t \geq 0\}$.

Точку x и движение $\pi(x,\cdot)$ называют устойчивым по Лагранжу и обозначают уст. L, если $H(x) = \overline{\Sigma}_x$ является компактом, где $\Sigma_x = \pi(x,\mathbb{T})$.

Точку $x \in X$ называют постоянной или точкой покоя, если $xt = x$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и τ-периодической, если $x\tau = x$ ($\tau > 0,\ \tau \in \mathbb{T}$).

Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\tau \in \mathbb{T}$ называют ε-смещением (ε-почти периодом) точки x, если $\rho(x\tau, x) < \varepsilon$ ($\rho(x(t+\tau), xt) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}$). Точка $x \in X$ называется почти рекуррентной (почти периодической), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что на любом отрезке из $\mathbb{T}$ длины l, найдется ε-смещение (ε-почти период) точки x.

Если точка $x \in X$ почти рекуррентна и множество $H(x) = \overline{\Sigma}_x$ компактно, то точку x называют рекуррентной.

Говорят, что точка $x \in X$ устойчива по Пуассону в положительном направлении, если $x \in \omega_x$.

Движение $\pi(x,\cdot):\mathbb{T}\to X$ полугрупповой динамической системы $(X,\mathbb{T},\pi)$ называют продолжаемым на $\mathbb{S}$, если существует непрерывное отображение $\varphi:\mathbb{S}\to X$ такое, что $\pi^t\varphi(s)=\varphi(t+s)$ при всех $t\in\mathbb{T}$ и $s\in\mathbb{S}$. При этом через α_x^φ обозначим $\{y|\exists t_n\to-\infty,\ t_n\in\mathbb{S}_-\ \varphi(t_n)\to y\}$, где φ продолжение на $\mathbb{S}$ движения $\pi(x,\cdot)$. Множество α_x^φ назовем α-предельным множеством движения φ, а его точки – α-предельными для движения φ.

Наряду с динамической системой $(X,\mathbb{T},\pi)$ рассмотрим систему $(Y,\mathbb{T},\sigma)$, где Y – полное метрическое пространство с метрикой α.

Говорят [**79**], что последовательность $\{t_n\}\subset\mathbb{T}$ направляет точку $x\in X$ к точке $p\in X$, если $p=\lim\limits_{n\to+\infty}xt_n$. Последовательность $\{t_n\}$ называют собственной последовательностью точки x, если $x=\lim\limits_{n\to+\infty}xt_n$.

Через $\mathfrak{M}_{x,p}$ обозначают множество всех последовательностей, направляющих x к p, через $\mathfrak{N}_x$ – множество всех собственных последовательностей точки x (т.е. $\mathfrak{N}_x=\mathfrak{M}_{x,x}$) и $\mathfrak{M}_x=\cup\{\mathfrak{M}_{x,p}:p\in X\}$.

Точку $x\in X$ называют [**79**] сравнимой по характеру возвращаемости с $y\in Y$ или, короче, сравнимой с y, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что всякое δ-смещение точки y есть ε-смещение для $x\in X$. В работе [**79**] показано, что точка $x\in X$ сравнима с $y\in Y$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_y\subseteq\mathfrak{N}_x$.

Точку $x\in X$ называют [**79**] равномерно сравнимой по характеру возвращаемости с $y\in Y$ или, короче, равномерно сравнимой с y, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что каково бы ни было $t\in\mathbb{T}$, всякое δ-смещение точки yt есть ε-смещение для xt, т.е. такое $\delta>0$, что для всяких двух чисел $t_1,t_2\in\mathbb{T}$, для которых $d(yt_1,yt_2)<\delta$, выполняется неравенство $\rho(xt_1,xt_2)<\varepsilon$. В случае, когда $y\in Y$ устойчива по Лагранжу (т.е. Σ_y относительно компактно) в [**79**] доказано, что $x\in X$ равномерно сравнима с $y\in Y$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_y\subseteq\mathfrak{M}_x$.

Точки x_1 и x_2 из X называют проксимальными (дистальными) в положительном направлении, если

$$\inf\{\rho(x_1 t, x_2 t) : t \in \mathbb{T}_+\} = 0 \quad (\inf\{\rho(x_1 t, x_2 t) : t \in \mathbb{T}_+\} > 0).$$

Множество $A \subseteq X$ называется равномерно устойчивым по Ляпунову в положительном направлении относительно множества $B \subseteq X$ (обозначение – р. уст. $\text{Л}^+ B$), если $A \subseteq \overline{B}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $\rho(p, r) < \delta$ $(p \in A,\ r \in B)$ влечет неравенство $\rho(pt, rt) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$.

Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ $(\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \subseteq \mathbb{S})$ – две динамические системы. Отображение $h : X \to Y$ называется гомоморфизмом (соответственно изоморфизмом) динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, если отображение h непрерывно (соответственно гомеоморфно) и $h(\pi(x, t)) = \sigma(h(x), t)$ при всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{T}_1$. При этом говорят, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ есть расширение динамической системы $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, а $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ – фактор динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ при гомоморфизме h. Динамическую систему $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ называют также базой расширения $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Тройку $((X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h)$, где h – гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1,$
$\pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, будем называть неавтономной динамической системой.

Пусть $t \in \mathbb{T}$. Определим отображение $\pi^t : X \to X$ равенством $\pi^t(x) = \pi(x, t)$. Если $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{T}$ и $M \subseteq X$, то положим $E^*(M, \mathcal{F}) = \overline{\{\pi^t | M : t \in \mathcal{F}\}}$, где чертой обозначено замыкание в X^M, и $E(M, \mathcal{F}) = \{\xi | \xi \in E^*(M, S),\ \xi(M) \subseteq M\}$.

Прямым произведением динамических систем $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ называют динамическую систему $(X \times Y, \mathbb{T}, \lambda)$, в которой действие задается покоординатно, т. е. $\lambda((x, y), t) = (\pi(x, t), \sigma(y, t))$ при всех $(x, y) \in X \times Y$ и $t \in \mathbb{T}$.

1.2. Асимптотически устойчивые по Пуассону движения

Движение $\pi(x,\cdot)$ назовем асимптотически постоянным (асимптотически τ-периодическим, асимптотически почти периодическим, асимптотически рекуррентным, асимптотически устойчивым по Пуассону), если существует постоянное (τ-периодическое, почти периодическое, рекуррентное, устойчивое по Пуассону) движение $\pi(p,\cdot)$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(xt,pt)=0. \tag{1.2.1}$$

Обозначим через $P_x=\{p \mid p\in\omega_x\cap\omega_p, \lim\limits_{t\to+\infty}\rho(xt,pt)=0\}$. Очевидно, движение $\pi(t,\cdot)$ асимптотически устойчиво по Пуассону, тогда и только тогда, когда $P_x\neq\emptyset$. Из определения асимптотической устойчивости по Пуассону, вообще говоря, не следует, что P_x состоит из одной точки. Ниже приводимая лемма указывает простое условие, при котором P_x состоит ровно из одной точки.

Лемма 1.2.1. *Пусть $x\in X$ асимптотически устойчива по Пуассону. Если точки из ω_x попарно дистальны в положительном направлении, то P_x состоит из одной точки.*

Доказательство. В силу асимптотической устойчивости по Пуассону движения $\pi(x,\cdot)$ множество P_x непусто. Допустим, что в P_x имеются две различные точки p_1 и p_2. По условию леммы p_1 и p_2 положительно дистальны. С другой стороны, для каждой из точек p_1 и p_2 выполнено равенство (1.2.1) и, следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(p_1t,p_2t)=0. \tag{1.2.2}$$

Равенство (1.2.2) противоречит положительной дистальности точек p_1 и p_2. Лемма доказана.

Лемма 1.2.2. *Пусть $x\in X$ почти периодична, тогда:*

1) *для любого $\varepsilon>0$ существует $l=l(\varepsilon)>0$ такое, что на любом отрезке из $\mathbb{T}$ длины l найдется число τ такое, что $\rho(p(t+\tau),pt)<\varepsilon$ при всех $p\in H(x)$.*

2) *$H(x)$ равномерно устойчиво по Ляпунову (в положительном направлении) относительно $H(x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ почти периодична, $p \in H^+(x)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $l = l(\varepsilon/2) > 0$ такое, что на любом отрезке из $\mathbb{T}$ длины l найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t+\tau), xt) < \varepsilon/2 \tag{1.2.3}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$. Для $p \in H(x)$ существует последовательность $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ такая, что $p = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$. Из (1.2.3) следует

$$\rho(x(t+\tau+t_n), x(t+t_n)) < \varepsilon/2 \tag{1.2.4}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$ и $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу в (1.2.4), когда $n \to +\infty$, получим

$$\rho(p(t+\tau), pt) < \varepsilon$$

при всех $t \in \mathbb{T}$ и $p \in H(x)$. Утверждение 1) доказано.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\varepsilon > 0$ и $l = l(\varepsilon/2)$ – что и в доказательстве первого утверждения леммы. В силу компактности $H(x)$ на $H(x)$ выполняется условие равномерной интегральной непрерывности и, в частности, для $\frac{\varepsilon}{3}$ и $l(\varepsilon/3)$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(pt, qt) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.2.5}$$

при всех $t \in [0, l]$ как только $\rho(p, q) < \delta$ $(p, q \in H(x))$. Пусть теперь $t \geq l$, p и $q \in H(x)$ и $\rho(p, q) < \delta$, тогда на отрезке $[t - l, t] \subset \mathbb{T}$ найдется число τ такое, что

$$\rho(r(t+\tau), rt) < \varepsilon/3 \tag{1.2.6}$$

при всех $r \in H(x)$ и $t \in \mathbb{T}$. Представим число t в виде $s + \tau$, где $s \in [0, l]$, тогда для $\bar{t} = s + \tau$

$$\begin{aligned}
&\rho(p\bar{t}, q\bar{t}) = \rho(p(s+\tau), q(s+\tau)) \\
&\leq \rho(p(s+\tau), ps) + \rho(ps, qs) + \rho(qs, q(s+\tau)).
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и неравенств (1.2.5) и (1.2.6) следует

$$\rho(pt, qt) < \varepsilon \tag{1.2.7}$$

при всех $t \geq l$. Из (1.2.5) и (1.2.7) следует второе утверждение леммы.

Лемма 1.2.3. *Пусть точка $x \in X$ почти периодична, тогда на ω_x динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ дистальна, т.е.*

$$\inf\{\rho(pt, qt) : t \in \mathbb{T}\} > 0$$

для любых $p, q \in H(x)$ $(p \neq q)$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не имеет места, тогда найдутся $p, q \in \omega_x = H(x)$ $(p \neq q)$ и $t_n \in \mathbb{T}$ такие, что

$$\rho(pt_n, qt_n) \to 0 \tag{1.2.8}$$

при $n \to +\infty$. Согласно лемме 1.2.2 $H(x)$ р. уст. Л относительно $H(x)$ и, следовательно, для числа $0 < \varepsilon < \rho(p, q)$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon/3)$ такое, что

$$\rho(pt, qt) < \frac{\varepsilon}{3}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$, как только $\rho(p, q) < \delta$ $(p, q \in H(x))$. Из неравенства (1.2.8) следует, что для достаточно больших n $\rho(pt_n, qt_n) < \delta$ и, следовательно,

$$\rho(p(t_n + t), q(t_n + t)) < \varepsilon/3 \tag{1.2.9}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$. По числу $\frac{\varepsilon}{3}$ и $t_n \in \mathbb{T}$ выберем $\tau \geq t_n$ такое, что

$$\rho(r\tau, r) < \varepsilon/3 \tag{1.2.10}$$

при всех $r \in H(x)$ (согласно лемме 1.2.2 такое τ существует). Тогда

$$\rho(p, q) \leq \rho(p\tau, p) + \rho(p\tau, q\tau) + \rho(q\tau, q)$$

и согласно (1.2.9) и (1.2.10) $\rho(p, q) < \varepsilon$. Последнее противоречит выбору ε. Лемма доказана.

Следствие 1.2.4. *Если движение $\pi(t, \cdot)$ асимптотически почти периодично, то P_x состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из лемм 1.2.1 и 1.2.3.

Таким образом, в случае асимптотической почти периодичности точка p, участвующая в определении асимптотической почти периодичности, определяется однозначно.

В случае, когда движение асимптотически рекуррентно, но не асимптотически почти периодично, сформулированное выше утверждение (следствие 1.2.4), вообще говоря, не имеет места.

1.3. Критерий асимптотической почти периодичности

Теорема 1.3.1. *Для того чтобы точка $x \in X$ (и движение $\pi(x, \cdot)$) была асимптотически постоянной (асимптотически τ-периодической, асимптотически почти периодической), необходимо и достаточно, чтобы точка x была уст. L^+, Σ_x^+ р. уст. $Л^+\Sigma_x^+$ и ω_x совпадало с точкой покоя (τ-периодической траекторией, замыканием почти периодической траектории).*

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична). Тогда существует постоянная (τ-периодическая, почти периодическая) точка p такая, что имеет место равенство (1.2.1). Из равенства (1.2.1) следует, что x уст. L^+ (т. к. почти периодическая точка уст. L^+) и $\omega_x = \omega_p = H(p)$. Таким образом, осталось показать, что Σ_x^+ р. уст. $Л^+\Sigma_x^+$. Из равенства (1.2.1) и почти периодичности точки p следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$ такие, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t + \tau), xt) < \varepsilon \tag{1.3.1}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из вышесказанного следует, что для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ найдется пара чисел $\beta(\frac{\varepsilon}{3})$ и $l(\frac{\varepsilon}{3})$ такие, что на любом отрезке длины $l(\frac{\varepsilon}{3})$ найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t + \tau), xt) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.3.2}$$

при всех $t \geq \beta$ и $t + \tau \geq \beta$. В компактном множестве Σ_x^+ интегральная непрерывность осуществляется равномерно, поэтому найдется такое $\gamma(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x_1, x_2 \in \Sigma_x^+$ из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \gamma$ следует

$$\rho(x_1 t, x_2 t) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.3.3}$$

при всех $t \in [\beta, \beta + l]$. Заметим, что γ может быть выбрано меньше ε. Пусть x_1 и x_2 из Σ_x^+, то есть $x_i = xt_i$ ($t_i \in \mathbb{T}_+$, $i = 1, 2$), тогда $\rho(x_1 t, x_2 t) \leq \rho(x_1(t+\tau), x_1 t) + \rho(x_1(t+\tau), x_2(t+\tau)) + \rho(x_2(t+\tau), x_2 t)$. Выберем $\tau \in [\beta - t, \beta - t + l] \subset \mathbb{T}_+$, тогда из последнего неравенства и неравенств (1.3.2) и (1.3.3) следует

$$\rho(x_1 t, x_2 t) < \gamma$$

при всех $t \geq \beta$. В силу равномерной интегральной непрерывности на Σ_x^+ для чисел β и γ ($\gamma < \varepsilon$) можно выбрать $\delta < \gamma$ так, чтобы из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ($x_1, x_2 \in \Sigma_x^+$) следовало $\rho(x_1 t, x_2 t) < \gamma$ при всех $t \in [0, \beta]$. Пусть теперь $\rho(x_1, x_2) < \delta$, ($x_1, x_2 \in \Sigma_x^+$, $\delta < \gamma < \varepsilon$) и $t \in \mathbb{T}_+$, тогда $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть x уст. L^+, Σ_x^+ р. уст.Л$^+\Sigma_x^+$ и ω_x совпадает с точкой покоя (τ-периодической траекторией, замыканием почти периодической траектории). Для любого натурального n, согласно условию теоремы, найдутся $\beta_n \geq 0$, $l_n > 0$ и $\tau_n \in [n, n + l_n]$ такие, что

$$\rho(x(t + \tau_n), xt) < \frac{1}{n}$$

при всех $t \geq \beta_n$ и $t + \tau_n \geq \beta_n$. В силу уст. L^+ точки x последовательность $\{x\tau_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n \to +\infty} x\tau_n$, тогда $p \in \omega_x$ и согласно лемме 1.2.2 точка p является почти периодической.

Покажем, что последовательность $\{x\tau_n\}$ сходится к p равномерно на $\mathbb{T}_+$, т.е.

$$\lim_{n \to +\infty} \sup\{\rho(x(t + \tau_n), pt) : t \in \mathbb{T}_+\} = 0. \tag{1.3.4}$$

Действительно, так как $\{x\tau_n\}$ сходится, то она является фундаментальной. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ выбрано из условия р.

уст. Л$^+\Sigma_x^+$ множества Σ_x^+. Тогда найдется $N(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x\tau_n, x\tau_m) < \delta$ при всех $n, m \geq N(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$\rho(x(t+\tau_n), x(t+\tau_m)) < \varepsilon \tag{1.3.5}$$

при всех $t \in \mathbb{T}_+$. Переходя в неравенстве (1.3.5) к пределу, когда $m \to +\infty$ (при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{T}_+$), получим

$$\rho(x(t+\tau_n), pt) \leq \varepsilon$$

при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и $n \geq N(\varepsilon)$. Покажем теперь, что $p \in P_x$. Действительно,

$$\rho(xt, pt) \leq \rho(xt, x(t+\tau_n)) + \rho(x(t+\tau_n), pt) \leq \frac{1}{n} + \varepsilon$$

при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $t \geq \beta_n$ и, следовательно, $p \in P_x$. Теорема доказана.

Лемма 1.3.2. [**43**] *Если множество A р. уст. Л^+B, то $\overline{A}$ р. уст. Л$^+\overline{B}$.*

Лемма 1.3.3. [**43**] *Если Σ_x^+ р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$, а $\omega_x \neq \emptyset$, то ω_x является минимальным множеством.*

Замечание 1.3.4. *Утверждения лемм* 1.3.2 *и* 1.3.3 *в* [**43**] *доказаны для групповых систем в случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Однако, нетрудно проверить, что имеющиеся в* [**43**] *рассуждения, позволяют доказать эти утверждения и в случае $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{Z}_+$.*

Следствие 1.3.5. *Если точка x уст. L^+ и Σ_x^+ р. уст. $L^+\Sigma_x^+$, то ω_x – непустое компактное минимальное множество, состоящее из почти периодических движений.*

Лемма 1.3.6. *Если x уст. L^+ и $t_n \to t_0$ $(t_0 \in \mathbb{T})$, то*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{\rho(x(t+t_n), x(t+t_0)) : t \in \mathbb{T}\} = 0. \tag{1.3.6}$$

Доказательство. Пусть x уст. L^+ и $t_n \to t_0$. Допустим, что равенство (1.3.6) не имеет места. Тогда существуют последовательность $\{\bar{t}_n\}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\rho(x(t_n + \bar{t}_n), x(t_0 + \bar{t}_n)) \geq \varepsilon$$

В силу уст. L^+ точки x последовательность $\{\pi(x, \bar{t}_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} x\bar{t}_n$, тогда

$$\varepsilon_0 \le \rho(x(t_n + \bar{t}_n), x(t_0 + \bar{t}_n)) = \rho((x\bar{t}_n)t_n, (x\bar{t}_n)t_0). \qquad (1.3.7)$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.3.7), когда $n \to +\infty$ получим неравенство $\varepsilon_0 \le 0$, которое противоречит выбору числа ε_0. Лемма доказана.

Замечание 1.3.7. *Если динамическая система* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *является групповой, то в условиях теоремы* 1.3.1 *множество* ω_x *является замыканием траектории некоторой почти периодической точки* $p \in X$ *в динамической системе* $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$*. На самом деле, используя леммы* 1.3.3, 1.3.6 *и некоторые результаты работы* [**3**]*, можно показать, что упомянутая точка* p *будет почти периодической и в групповой системе* $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Теорема 1.3.8. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Точка* $x \in X$ *асимптотически почти периодична.*
2) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие числа* $\beta \ge 0$ *и* $l > 0$*, что на любом отрезке длины* l *найдется число* τ*, для которого неравенство* (1.3.1) *выполняется при всех* $t \ge \beta$ *и* $t + \tau \ge \beta$.
3) *Точка* x *уст.* L^+ *и* Σ_x^+ *р. уст.* $Л^+\Sigma_x^+$.
4) *Какова бы ни была последовательность* $t_n \to +\infty$ *из нее можно выделить подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что* $\{\pi(x, t_{k_n})\}$ *сходится равномерно по* $t \in \mathbb{T}_+$*, т.е. существует* $p \in X$ *такая, что выполнено* (1.3.4).

Доказательство. Заметим, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из определения асимптотической почти периодичности (см. доказательство теоремы 1.3.1).

Покажем, что из 2) следует 3). Из условия 2) следует, что точка x уст. L^+. В самом деле. Пусть $\varepsilon > 0$. Для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существуют такие числа $\beta \ge 0$ и $l > 0$, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого

$$\rho(x(t + \tau), xt) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.3.8)$$

при всех $t \geq \beta$ и $t+\tau \geq \beta$. Покажем, что $M = \pi([\beta, \beta + l], x)$ аппроксимирует $Q = \{\pi(t, x) : t \geq \beta\}$ с точностью до $\varepsilon/2$. В самом деле, если $t \geq \beta$, то существует $\tau \in [\beta - t, \beta - t + l]$, что выполняется (1.3.6) и следовательно $Q \subseteq S(M, \frac{\varepsilon}{2})$. Поскольку множество M замкнуто и компактно, то оно обладает конечной $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью, которая в силу включения $\overline{Q} \subseteq \overline{S}(M, \frac{\varepsilon}{2})$ является $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью множества Q. В силу полноты пространства X множество Q компактно. Остается заметить, что $\Sigma_x^+ = \pi([0, \beta], x) \cup Q$. Наконец, из доказательства необходимости теоремы 1.3.1 следует, что условие 2) и уст. L^+ точки x дают р. уст. $\text{Л}^+\Sigma_x^+$ множества Σ_x^+.

Пусть x уст. L^+, Σ_x^+ р. уст. $\text{Л}^+\Sigma_x^+$ и $t_n \to +\infty$. В силу уст.L^+ точки x из $\{t_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $xt_{k_n} \to P$. В силу р. уст. $\text{Л}^+\Sigma_x^+$ множества Σ_x^+, рассуждая также, как и при доказательстве достаточности теоремы 1.3.1, получим равенство (1.3.4).

Покажем,что из 4) следует 3). Допустим противное, то есть существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $\delta_n \downarrow 0$, $\{t_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ и $\{\bar{t}_n\}$ такие, что

$$\rho(xt_n^{(1)}, xt_n^{(2)}) < \delta_n \text{ и } \rho(x(t_n^{(1)} + \bar{t}_n), x(t_n^{(2)} + \bar{t}_n)) \geq \varepsilon_0. \qquad (1.3.9)$$

Очевидно, из 4) следует, что x уст. L^+, поэтому последовательность $\{xt_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{x}_i = \lim\limits_{n \to +\infty} xt_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Из неравенства (1.3.9) следует, что $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$. Покажем, что последовательность $\{xt_n^{(i)}\}$ сходится к $\bar{x}$ равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$. Логически возможны два случая:

а. Последовательность $\{t_n^{(i)}\}$ ограничена и тогда, не умаляя об

щности рассуждений, можно считать ečц сходящейся. И тогда требуемое утверждение вытекает из леммы 1.3.6.

б. Последовательность $\{t_n^{(i)}\}$ неограничена. Согласно 4) последовательность $\{xt_n^{(i)}\}$ можно считать сходящейся равномерно $t \in \mathbb{T}_+$. Итак, мы показали, что $\bar{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} xt_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, причем сходимость в последнем равенстве равномерная по $t \in \mathbb{T}_+$. Тогда для числа $\frac{\varepsilon_0}{2}$ найдется натуральное число n_0 такое,

что
$$\rho(x(t_n^{(1)}+t), x(t_n^{(2)}+t)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$
при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и $n \geq n_0$. В частности, при $t = t_n$,
$$\rho(x(t_n^{(1)}+t_n), x(t_n^{(2)}+t_n)) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.3.10}$$
Неравенство (1.3.10) противоречит неравенству (1.3.9). Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Наконец, покажем что из 3) следует 1). Пусть точка $x \in X$ уст. L^+ и Σ_x^+ р. уст. $\text{Л}^+\Sigma_x^+$. Тогда согласно следствию 1.3.5 множество ω_x является непустым компактным минимальным множеством, состоящим из почти периодических движений. Согласно теореме 1.3.1 точка x асимптотически почти периодична. Теорема полностью доказана.

1.4. Асимптотически периодические движения

Теорема 1.4.1. *Для того чтобы точка $x \in X$ была асимптотически τ-периодической, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\pi(x, k\tau)\}_{k=0}^{+\infty}$ сходилась.*

Доказательство. Необходимость. Пусть точка $x \in X$ асимптотически τ-периодична, то есть существует τ-периодическая точка p такая, что имеет место равенство (1.2.1). Тогда
$$\rho(x(k\tau), p(k\tau)) = \rho(x(k\tau), p). \tag{1.4.1}$$
Переходя к пределу в (1.4.1), когда $k \to +\infty$, и учитывая (1.2.1), получим требуемый результат.

Достаточность. Пусть $\{\pi(x, k\tau)\}_{k=0}^{+\infty}$ сходится. Положим $p = \lim\limits_{k\to+\infty} \pi(x, k\tau)$. Заметим, что
$$p\tau = (\lim_{k\to+\infty} x(k\tau))\tau = \lim_{k\to+\infty}[x(k\tau)]\tau = \lim_{k\to+\infty} x(k+1)\tau = p.$$
Таким образом, точка p является τ-периодической. Покажем, что x уст. L^+. В самом деле. Пусть $\{t_n\} \subset \mathbb{T}_+$, тогда $t_k = m_k\tau + \bar{t}_k$ (m_k, $\bar{t}_k \in \mathbb{T}_+$, $\tau > 0$ и $\bar{t}_k \in [0, \tau]$). Последовательность $\{\bar{t}_k\}$ можно считать сходящейся и пусть $t_0 = \lim\limits_{k\to+\infty} \bar{t}_k$. Тогда $\lim\limits_{k\to+\infty} xt_k = \lim\limits_{k\to+\infty} x(m_k\tau + \bar{t}_k) = \lim\limits_{k\to+\infty}[x(m_k\tau)]\bar{t}_k = pt_0$.

В силу уст. L^+ точки x на множестве $H^+(x)$ интегральная непрерывность осуществляется равномерно. Так как имеет место равномерная интегральная непрерывность и $\lim\limits_{k\to+\infty} x(k\tau) = p$, то

$$\lim_{k\to+\infty} \sup\{\rho(x(k\tau+t),pt) : t\in[0,\tau]\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\rho(xt,pt) = \rho(x(k\tau+\tilde t),p\tilde t) \le \\ \sup\{\rho(x(k\tau+\tilde t),p\tilde t) \mid \tilde t\in[0,\tau]\},\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

где $t = k\tau + \tilde t$ ($k = [t]$, $\tilde t \in [0,\tau]$). Переходя к пределу в (1.4.2), когда $t\to+\infty$ ($k = [t]\to+\infty$, когда $t\to+\infty$), получим равенство (1.2.1). Теорема доказана.

Следствие 1.4.2. *Для того чтобы точка x была асимптотически постоянной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x(k\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ сходилась при каждом $\tau\in\mathbb{T}_+$.*

Теорема 1.4.3. *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$. Для того чтобы точка x была асимптотически постоянной в динамической системе $(X,\mathbb{T},\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\pi(x,t_n)\}$ сходилась, где $t_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть точка $x\in X$ такова, что последовательность $\{xt_n\}$, где $t_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, является сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$ и покажем, что

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(xt,p) = 0. \tag{1.4.3}$$

Очевидно, для доказательства (1.4.3) достаточно доказать, что для любой последовательности $\{t'_k\}\subset\mathbb{T}$, $t'_k\to+\infty$, имеет место

$$\lim_{k\to+\infty}\rho(xt'_k,p) = 0. \tag{1.4.4}$$

По последовательности $\{t'_k\}$ определим последовательность

$$t_{n_k} = \max\{t_n \mid t_n \le t'_k\}. \tag{1.4.5}$$

Определенная равенством (1.4.5) последовательность $\{t_{n_k}\}$ обладает следующим свойством:

$$t_{n_k} \le t'_k < t_{n_k+1}. \tag{1.4.6}$$

Из (1.4.6) следует, что $0 \le t'_k - t_{n_k} < t_{n_k+1} - t_{n_k} = \frac{1}{n_k+1}$. Из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{k\to+\infty}(t'_k - t_{n_k}) = 0$. Остается заметить, что $\pi(x, t'_k) = \pi(\pi(x, t_{n_k}), t'_k - t_{n_k})$. Так как $\{xt_{n_k}\}$ и $\{t'_k - t_{n_k}\}$ сходятся, то сходящейся является и последовательность $\{xt'_k\}$ и, очевидно, $\lim\limits_{k\to+\infty} xt'_k = p$. Теорема доказана.

Замечание 1.4.4. *Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{Z}$, то есть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является каскадом, и $p \in X$ является m-периодической, то, очевидно, ећ траекторией является множество $\{p, \pi(p,1), \dots, \pi(p,(m-1))\}$, состоящее ровно из m различных точек.*

Лемма 1.4.5. [**72**] *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{Z}$ и $x \in X$ – уст. L^+ точка. Для того чтобы множество ω_x состояло из конечного числа точек необходимо и достаточно, чтобы существовала m-периодическая точка $p \in X$ такая, что $\omega_x = \{p, \pi(p,1), \dots, \pi(p,m-1)\}$.*

Теорема 1.4.6. *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$ или $\mathbb{Z}$. Для того чтобы точка x была асимптотически m-периодической необходимо и достаточно, чтобы точка x была уст. L^+ и ећ ω-предельное множество ω_x состояло ровно из m различных точек.*

Доказательство. Необходимость сформулированного утверждения вытекает непосредственно из определения асимптотической m-периодичности и замечания 1.4.4.

Достаточность. Пусть точка $x \in X$ уст. L^+ и $\omega_x = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1,m}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(xn, \omega_x) = 0. \tag{1.4.7}$$

Из равенства (1.4.7) следует, что

$$\delta(n) = \min\{\rho(xn, p_j n) : 1 \le j \le m\} \to 0 \tag{1.4.8}$$

при $n \to +\infty$. Пусть $\rho > 0$ таково, что

$$\rho(p_i n, p_j n) \ge 0$$

при всех $n \in \mathbb{T}$ и $i, j = \overline{1,m}$, $i \neq j$. В силу уст. L^+ точки x на множестве $H^+(x)$ выполнено условие равномерной интегральной непрерывности. Выберем для числа $\frac{\rho}{3}$ число $\gamma(\frac{\rho}{3}) > 0$,

$\gamma(\frac{\rho}{3}) < \frac{\rho}{3}$, из условия равномерной интегральной непрерывности. Тогда

$$\rho(\pi(\overline{x},1),\pi(p,1)) < \frac{\rho}{3} \quad (\overline{x},p \in H^+(x)),$$

как только $\rho(\overline{x},p) < \gamma$. Из (1.4.8) следует, что для $\gamma(\frac{\rho}{5})$ найдется n_0 такое, что $\delta(n) < \gamma(\frac{\rho}{5})$ при всех $n \geq n_0$. Тогда найдется $j_0 \in [1,m] \subset \mathbb{T}$ такой, что

$$\rho(xn_0, p_{j_0}n_0) < \gamma(\frac{\rho}{5}).$$

Положим

$$\Delta = \sup\{\tilde{\Delta} \mid \rho(xn, p_{j_0}n) < \gamma(\frac{\rho}{5}), \quad n \in [n_0, n_0 + \tilde{\Delta}]\}. \qquad (1.4.9)$$

а. Если $\Delta = +\infty$, то $\rho(xn, p_{j_0}n) < \gamma(\frac{\rho}{5})$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, при всех $j \neq j_0$

$$\rho(xn, p_jn) \geq \rho(p_jn, p_{j_0}n) - \rho(xn, p_{j_0}n) \geq \rho - \frac{\rho}{3} = \frac{2\rho}{3} > \gamma(\frac{\rho}{5}).$$

Откуда следует, что

$$\rho(xn, p_{j_0}n) \min_{1\leq j\leq m} \rho(xn, p_jn) = \delta(n) \to 0$$

при $n \to +\infty$. И в этом случае теорема докаана.

б. Покажем, что случай $\Delta < +\infty$ невозможен. Действительно, если допустить, что $\Delta < +\infty$ и положить $n_0' = n_0 + \Delta$, то будем иметь

$$\rho(xn_0', p_{j_0}n') < \gamma(\frac{\rho}{5}),$$

$$\rho(x(n'+1), p_{j_0}(n'+1)) \geq \gamma(\frac{\rho}{5})$$

и

$$\rho(x(n'+1), p_{j_0}(n'+1)) < \frac{\rho}{5}.$$

Так как $\delta(n'+1) < \gamma(\frac{\rho}{5})$, то существует $p_{i_0} \neq p_{j_0}$, такое что

$$\rho(x(n'+1), p_{i_0}(n'+1)) \geq \gamma(\frac{\rho}{5})$$

и, следовательно,

$$\rho(p_{j_0}(n'+1), p_{i_0}(n'+1)) \leq \rho(p_{j_0}(n'+1), x(n'+1)) +$$
$$\rho(x(n'+1), p_{i_0}(n'+1)) < \gamma + \frac{\rho}{5} < \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{5} < \rho.$$

Последнее противоречит выбору числа ρ. Теорема полностью доказана.

Замечание 1.4.7. *Аналог теоремы* 1.4.3 *для потоков не имеет места.*

Сказанное подтверждается следующим примером. Рассмотрим динамическую систему, заданную на единичном круге по следующему правилу. Центр круга пусть будет точкой покоя, граница круга – траекторией периодического движения периода $\tau = 1$. Все остальные движения пусть будут неособыми. Кроме того, считаем, что любая полутраектория Σ_x^+ не р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ для любой внутренней точки x круга, отличной от центра. Описанная выше динамическая система задается системой дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах записывается следующим образом

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = (r-1)^2 \\ \frac{d\varphi}{dt} = r. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что ω-предельное множество точки x является траекторией 1-периодической точки, но сама точка x не является асимптотически 1-периодической, так как Σ_x^+ не является р. уст. Л$^+\Sigma_x^+$ (см. теорему 1.3.1).

1.5. Асимптотически почти периодические функции

1. **Динамические системы сдвигов в пространствах непрерывных функций**. В этом пункте указывается один общий способ построения динамических систем в пространствах непрерывных функций. Указанным способом получаются многие известные динамические системы в функциональных пространствах (см., например, [**2**], [**75**], [**79**]).

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ – динамическая система на X, Y – полное псевдометрическое пространство и $\mathcal{P}$ – его комплект псевдометрик. Через $C(X,Y)$ обозначим семейство всех непрерывных функций $f : X \to Y$, наделенное открыто-компактной топологией, которая задается следующим семейством псевдометрик

$$d_K^p(f,g) = \sup_{x \in K} p(f(x), g(x)) \quad (p \in \mathcal{P},\ K \in \mathcal{K}(X)),$$

где $\mathcal{K}(X)$ – семейство всех компактных подмножеств X. Определим при каждом $\tau \in \mathbb{T}$ отображение $\sigma_\tau : C(X,Y) \to C(X,Y)$ по следующему правилу: $(\sigma_\tau f)(x) = f(\pi(x,\tau))$ $(x \in X)$. Отметим следующие свойства отображений σ_τ:

а. $\sigma_0 = id_{C(X,Y)}$;

б. $\sigma_{\tau_1} \circ \sigma_{\tau_1} = \sigma_{\tau_1+\tau_2}$;

в. σ_τ непрерывно.

Как правило, в дальнейшем используем обозначение $\sigma_\tau f = f^{(\tau)}$.

Лемма 1.5.1. *Отображение* $\sigma : C(X,Y) \times \mathbb{T} \to C(X,Y)$, *определенное равенством* $\sigma(f,\tau) = \sigma_\tau f$ $(f \in C(X,Y),\ \tau \in \mathbb{T})$, *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f \in C(X,Y)$, $\tau \in \mathbb{T}$ и $\{f_\nu\}$, $\{\tau_\nu\}$ – произвольные направленности, сходящиеся к f и τ соответственно. Тогда для $K \in \mathcal{K}(X)$

$$d^p_K(\sigma(f_\nu,\tau_\nu),\sigma(f,\tau)) = \sup_{x\in K} p(\sigma(f_\nu,\tau_\nu)(x),\ \sigma(f,\tau)(x)) =$$
$$\sup_{x\in K} p(f_\nu(\pi(x,\tau_\nu)),\ f(\pi(x,\tau)))\} \leq$$
$$\sup_{x\in K} p(f_\nu(\pi(x,\tau_\nu)),\ f(\pi(x,\tau_\nu))) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(x,\tau_\nu)),\ f(\pi(x,\tau))) \leq$$
$$\sup_{x\in K,\ s\in Q} p(f_\nu(\pi(x,s)),\ f(\pi(x,s))) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(x,\tau_\nu)),\ f(\pi(x,\tau)))$$
$$\leq \sup_{m\in\pi(K,Q)} p(f_\nu(m), f(m)) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(x,\tau_\nu)),\ f(\pi(x,\tau,))) =$$
$$d^p_{\pi(K,Q)}(f_\nu, f) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(x,\tau_\nu)),\ f(\pi(x,\tau))), \tag{1.5.1}$$

где $Q = \overline{\{\tau_\nu\}}$. Переходя к пределу в неравенстве (1.5.1), получим требуемое утверждение.

Следствие 1.5.2. $(C(X,Y),\mathbb{T},\sigma)$ – *динамическая система.*

Динамическую систему $(C(X,Y),\mathbb{T},\sigma)$ назовем динамической системой сдвигов в пространстве непрерывных функций $C(X,Y)$.

Приведем некоторые примеры динамических систем вида $(C(X,Y),\mathbb{T},\sigma)$, встречающиеся в приложениях.

Пример 1.5.3. Положим $X = \mathbb{T}$ и через $(X, \mathbb{T}, \pi)$ обозначим динамическую систему на $\mathbb{T}$, где $\pi(x,t) = x + t$. Динамическая система $(C(\mathbb{T}, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ называется динамической системой Бебутова [**2**],[**34**], [**43**], [**75**], [**79**]. Динамическая система Бебутова является удобным средством исследования общих свойств непрерывных функций. Ниже мы еҷ используем для установления ряда свойств асимптотически почти периодических функций.

Пример 1.5.4. Положим $X = \mathbb{T} \times W$, где W – некоторое метрическое пространство, и через $(X, \mathbb{T}, \pi)$ обозначим динамическую систему на $\mathbb{T} \times W$, определенную по следующему правилу $\pi((s,w),t) = (s+t, w)$. Приведҷнная выше конструкция, позволяет естественным образом определить на $C(\mathbb{T} \times W, Y)$ динамическую систему сдвигов $(C(\mathbb{T} \times W, Y), \mathbb{T}, \sigma)$.

Пример 1.5.5. Пусть $W = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$ и $\mathcal{A}(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ – множество всех функций $f \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, голоморфных по второму аргументу. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{A}(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ является замкнутым инвариантным множеством динамической системы $(C(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), \mathbb{T}, \sigma)$ и, следовательно, на $\mathcal{A}(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ индуцируется динамическая система $(\mathcal{A}(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), \mathbb{T}, \sigma)$.

2. **Асимптотически почти периодические функции Фреше**. В этом пункте приведем определение асимптотической почти периодичности непрерывных функций, принадлежащее М. Фреше [**90**], а также некоторые их свойства. Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство с нормой $|\cdot|$. В пространстве $C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ открыто-компактную топологию можно задать с помощью метрики Бебутова

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{L>0} \min\{\max_{|t|\le L} |\varphi(t) - \psi(t)|;\ L^{-1}\}.$$

Рассмотрим динамическую систему Бебутова $(C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}), \mathbb{R}, \sigma)$. Будем говорить, что функция $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ обладает свойством A, если этим свойством обладает движение $\sigma(\varphi, \cdot)$ в динамической системе $(C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}), \mathbb{R}, \sigma)$, порожденное функцией φ. В качестве свойства A может быть уст. L^+, р. уст. Л^+, периодичность, почти периодичность, асимптотическая почти периодичность и т. д.

Заметим, что равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\sigma(\varphi,t),\sigma(p,t)) = 0$$

эквивалентно равенству

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t) - p(t)| = 0,$$

где φ, $p \in C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$.

Из сделанных выше замечаний следует, что функция $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) тогда и только тогда, когда существуют функции p и ω из $C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ такие, что

а. $\varphi(t) = p(t) + \omega(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

б. $\lim\limits_{t\to+\infty} |\omega(t)| = 0$;

в. p постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна).

При этом p называется главной частью φ, а ω – поправкой.

Замечание 1.5.6. *Из следствия* 1.2.4 *вытекает, что функции p и ω, фигурирующие в условиях а., б. и в., определяются однозначно, если φ асимптотически почти периодична.*

Из сказанного выше и теорем 1.3.1,1.3.8, 1.4.1, 1.4.3 получаем следующие утверждения.

Теорема 1.5.7. *Для того чтобы функция $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ была асимптотически постоянной (асимптотически τ-периодической, асимптотически почти периодической) необходимо и достаточно, чтобы функция φ была уст. L^+, множество Σ_φ^+ р. уст. Л$^+\Sigma_\varphi^+$ и ω_φ состояло из постоянной функции (траектории τ-периодической функции, замыкания траектории почти периодической функции).*

Теорема 1.5.8. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Функция φ асимптотически почти периодична.*
2) *φ уст. L^+ и Σ_φ^+ р. уст. Л$^+\Sigma_\varphi^+$.*

3) *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\beta \geq 0$ и $l > 0$ такие, что на любом отрезке длины l найдется число τ, для которого выполнено неравенство $|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geq \beta$ и $t+\tau \geq \beta$.*
4) *Из любой последовательности $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, можно выделить подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такую, что последовательность $\{\varphi^{(t_{n_k})}\}$, где ($\varphi^{(t_{n_k})}(t) = \varphi(t+t_{n_k})$ при всех $t \in \mathbb{R}$), сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.*

Теорема 1.5.9. *Функция $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ асимптотически τ-периодична (асимптотически постоянна) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\varphi^{(t_n)}\}$ сходится в $C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, где $t_n = n\tau$ ($t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$).*

Лемма 1.5.10. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *Функция φ уст. L^+.*
2) *Функция φ компактнозначна на $\mathbb{R}_+$ (то есть $\varphi(\mathbb{R}_+)$ относительно компактно) и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

Следствие 1.5.11. *Всякая асимптотически почти периодическая функция компактнозначна на $\mathbb{R}_+$ и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Говорят, что функция φ имеет среднее значение $M\{\varphi\}$ на $\mathbb{R}_+$, если существует предел при $L \to +\infty$ выражения $\frac{1}{L}\int_0^L \varphi(t)dt$. Таким образом,

$$M\{\varphi\} = \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(t)dt. \qquad (1.5.2)$$

Лемма 1.5.12. *Пусть $\omega \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} |\omega(t)| = 0$, тогда $M\{\omega\} = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует $A > 0$ такое, что $|\omega(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geq A$ и, следовательно, для

$L > A$

$$|\frac{1}{L}\int_0^L \omega(t)dt| = |\frac{1}{L}\int_0^A \omega(t)dt + \frac{1}{L}\int_A^L \omega(t)dt| \leq$$
$$\frac{1}{L}\int_0^A |\omega(t)|dt + \frac{\varepsilon}{L}|L-A|. \tag{1.5.3}$$

Переходя в неравенстве (1.5.3) к пределу, когда $L \to +\infty$, получим

$$\overline{\lim_{L\to+\infty}}|\frac{1}{L}\int_0^L \omega(t)dt| \leq \varepsilon. \tag{1.5.4}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из неравенства (1.5.4) следует существование среднего значения на $\mathbb{R}_+$ функции ω и его равенство нулю. Лемма доказана.

Следствие 1.5.13. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ асимптотически почти периодична. Тогда φ имеет среднее значение на $\mathbb{R}_+$ и $M\{\varphi\} = M\{p\}$, где p – главная часть φ.*

Теорема 1.5.14. *Если для любого $k = \overline{1,m}$ $\varphi_k \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_k)$ – асимптотически почти периодическая функция, то асимптотически почти периодической является и функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) \times C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_2) \times \cdots \times C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_m)$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1.5.7. Действительно, положим $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_m$ и норму $x \in \mathfrak{B}$ определим равенством $\|x\| = \sum_{k=1}^m |x_k|_k$, где $|\cdot|_k$ – норма на $\mathfrak{B}_k$ ($k = \overline{1,m}$), тогда $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Пусть $\varphi_k \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_k)$ ($k = \overline{1,m}$) асимптотически почти периодична и $t_n \to +\infty$, тогда существует подпоследовательность t_{l_n} такая, что $\{\varphi_k^{(t_{l_n})}\}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_+$ к некоторой функции $\tilde{\varphi}_k$ ($k = \overline{1,m}$) и, следовательно, $\varphi^{(t_{l_n})} = (\varphi_1^{(t_{l_n})}, \varphi_2^{(t_{l_n})}, \ldots, \varphi_m^{(t_{l_n})})$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_+$ к функции $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_m) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Следствие 1.5.15. *Пусть $\varphi_k \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ($k = \overline{1,m}$) асимптотически почти периодична, тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ также асимптотически почти периодична.*

Доказательство. Согласно теореме 1.5.14 функция $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^m)$ асимптотически почти периодична, то есть существуют функции $\tilde{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^m)$ и $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^m)$ такие, что $(p_1, p_2, \dots, p_m) \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^m)$ почти периодична, $\lim\limits_{t\to+\infty}(|\omega_1(t)| + |\omega_2(t)| + \cdots + |\omega_m(t)|) = 0$ и $\tilde{\varphi} = \tilde{p} + \tilde{\omega}$. Тогда функцию $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m$ можно представить в виде $\varphi = p + \omega$, где $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_m$ и $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$. Функция p почти периодична в силу совместной почти периодичности функций p_1, p_2, $\dots$, p_m и $|\omega(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$ и, следовательно, φ асимптотически почти периодична.

Теорема 1.5.16. *Пусть $\{\varphi_k\} \subset C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – последовательность асимптотически почти периодических функций и $\varphi_k \to \varphi$, при $k \to +\infty$, равномерно на $\mathbb{R}_+$, то есть $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\{|\varphi_k(t) - \varphi(t)| \mid t \in \mathbb{R}_+\} = 0$. Тогда φ также асимптотически почти периодична.*

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таково, что

$$|\varphi_k(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.5.5}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $k \geq k(\varepsilon)$. Для числа $\frac{\varepsilon}{3}$, в силу асимптотической почти периодичности функции $\varphi_{k(\varepsilon)}$, найдутся числа $\beta(\varepsilon) \geq 0$ и $l(\varepsilon) > 0$ такие, что на любом отрезке из $\mathbb{R}$ длины $l(\varepsilon)$ найдется число τ такое, что

$$|\varphi_{k(\varepsilon)}(t + \tau) - \varphi_{k(\varepsilon)}(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.5.6}$$

при всех $t \geq \beta(\varepsilon)$ и $t + \tau \geq \beta(\varepsilon)$. Из неравенств (1.5.5) и (1.5.6) следует, что

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leq |\varphi(t+\tau) - \varphi_{k(\varepsilon)}(t+\tau)| +$$
$$|\varphi_{k(\varepsilon)}(t+\tau) - \varphi_{k(\varepsilon)}(t)| + |\varphi_{k(\varepsilon)}(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

при всех $t \geq \beta(\varepsilon)$ и $t + \tau \geq \beta(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Следствие 1.5.17. *Пусть* $\{\varphi_k\} \subset C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – *последовательность асимптотически почти периодических функций и ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k$ *сходится равномерно по* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $S \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – *сумма этого ряда. Тогда* S – *асимптотически почти периодическая функция.*

Пусть $\mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}) = \{\varphi \mid \varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}),$ φ – асимптотически почти периодична$\}$ и

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t) : t \in \mathbb{R}_+\}. \tag{1.5.7}$$

Теорема 1.5.18. $\mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$ – *линейное пространство и равенством* (1.5.7) *определяется полная норма на* $\mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$, *то есть* $(\mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}), \| \ \|)$ *является банаховым пространством.*

Доказательство. Линейность пространства $\mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$ вытекает из следствия 1.5.15. Из следствия 1.5.11 вытекает, что правая часть равенства (1.5.7) конечна для любой функции $\varphi \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$. Наконец покажем, что норма (1.5.7) является полной. Пусть $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{A}P(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$ – фундаментальная последовательность. Тогда она является фундаментальной и в пространстве $C(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$ (относительно метрики Бебутова) и, следовательно, $\{\varphi_k\}$ является сходящейся в $C(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$. Таким образом существует функция $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B})$ такая, что $\varphi_k \to \varphi$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}_+$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности $\{\varphi_k\}$ относительно нормы (1.5.7) существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon \tag{1.5.8}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $m, n \geq N(\varepsilon)$. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}_+$, $n \geq N(\varepsilon)$ и перейдем в неравенстве (1.5.8) к пределу при $m \to +\infty$. Тогда мы получим

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq \varepsilon$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $n \geq N(\varepsilon)$. Таким образом $\varphi_n \to \varphi$ равномерно на $\mathbb{R}_+$ и согласно теореме 1.5.16 функция φ асимптотически почти периодична. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ банахово пространство всех почти периодических функций из $C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

и через $C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – банахово пространство всех функций $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t)| = 0$ и снабженное нормой (1.5.7).

Теорема 1.5.19. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемая асимптотически почти периодическая функция $\varphi \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ имела асимптотически почти периодическую производную φ', необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 1.5.11.

Достаточность. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ непрерывно дифференцируема и φ' равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, определенную равенством

$$\varphi_n(t) = n[\varphi(t + \frac{1}{n}) - \varphi(t)] = n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi'(t + \tau) d\tau. \tag{1.5.9}$$

Заметим, что

$$|\varphi_n(t) - \varphi'(t)| = |n \int_0^{\frac{1}{n}} [\varphi'(t + \tau) - \varphi'(t)] d\tau| \leq$$
$$\max_{0 \leq \tau \leq \frac{1}{n}} |\varphi'(t + \tau) - \varphi'(t)|, \tag{1.5.10}$$

и, следовательно, $\varphi_n \to \varphi'$ равномерно на $\mathbb{R}_+$, ибо φ' равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Согласно теореме 1.5.16 $\varphi' \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Что и требовалось доказать.

Лемма 1.5.20. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ непрерывно дифференцируема, имеет равномерно непрерывную производную φ' и $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t)| = 0$. Тогда $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi'(t)| = 0$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – последовательность, определенная равенством (1.5.9). Из неравенства (1.5.10) следует, что $\varphi_n \to \varphi'$ равномерно на $\mathbb{R}_+$. Кроме того, из равенства (1.5.9) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi_n(t)| = 0 \tag{1.5.11}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует число $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|\varphi'(t) - \varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $n \geq n(\varepsilon)$. Из (1.5.11) следует, что для $n(\varepsilon)$ найдется $L(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\varphi_{n(\varepsilon)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Тогда

$$|\varphi'(t)| \leq |\varphi'(t) - \varphi_{n(\varepsilon)}(t)| + |\varphi_{n(\varepsilon)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5.21. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ асимптотически почти периодична (т. е. $\varphi = p + \omega$, где $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ и $\omega \in C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Тогда p и ω непрерывно дифференцируемы, $p' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\omega' \in C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) и $\varphi' = p' + \omega'$.*

Доказательство. В условиях леммы 1.5.21, наряду с функцией φ, согласно теореме 1.5.19, является асимптотически почти периодичной и ец производная φ'. Пусть $\{\tau_n\}$ такова, что $\tau_n \to +\infty$ и $\varphi^{(\tau_n)} \to p$. Так как φ асимптотически почти периодична, то последовательность $\{\varphi'(t + \tau_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\tilde{p}(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi'(t + \tau_n)$ и заметим, что

$$\varphi(t + \tau_n) = \varphi(\tau_n) + \int_0^t \varphi'(\tau + \tau_n) d\tau. \tag{1.5.12}$$

Переходя к пределу в равенстве (1.5.12), когда $n \to +\infty$, получим

$$p(t) = p(0) + \int_0^t \tilde{p}(\tau) d\tau. \tag{1.5.13}$$

Из равенства (1.5.13) следует, что p непрерывно дифференцируема и $p' = \tilde{p}$. Так как $\tilde{p} \in \omega_{\varphi'}$ и φ' асимптотически почти периодична, то $p' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Поэтому $\omega = \varphi - p$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$ вместе со своей производной $\omega' = \varphi' - p'$ и согласно лемме 1.5.20 $\omega' \in C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Лемма доказана.

Теорема 1.5.22. *Пусть $\varphi \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ (т.е. $\varphi = p + \omega$, где $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ и $\omega \in C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) и $F(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$. Для того чтобы функция F была асимптотически почти периодической, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_0^{+\infty} \omega(\tau)d\tau$ сходился, то есть чтобы существовал конечный предел*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \omega(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Пусть $\varphi, F \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, где $F(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$, и $\Phi = P + \Omega$ ($P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ и $\Omega \in C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$). Так как $\Phi' = \varphi$, то согласно лемме 1.5.21 $P' = p$, $\Omega' = \omega$ и, следовательно, $\Omega(t) = \Omega(0) + \int_0^t \omega(\tau)d\tau$. Так как $|\Omega(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \omega(\tau)d\tau = -\Omega(0)$.

Обратно. Предположим, что существует конечный предел $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \omega(\tau)d\tau = c$. Выберем последовательность $\{\tau_n\} \to +\infty$ такую, что $\varphi^{(\tau_n)} \to p$, и рассмотрим последовательность F_n, определенную следующим образом

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi(t + \tau)d\tau + \Phi(\tau_n). \tag{1.5.14}$$

Так как функция Φ компактнозначна на $\mathbb{R}$, то последовательность $\{\Phi(\tau_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим

$$A = \lim_{n \to +\infty} \Phi(\tau_n).$$

Переходя к пределу в равенстве (1.5.14), когда $n \to +\infty$, получим $\tilde{\Phi}(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau + A$. Кроме того, заметим, что $\Phi_n(t) \in \overline{\Phi(\mathbb{R}_+)}$ при всех $t \geq -\tau_n$, то есть функция Φ_n компактнозначна на $[-\tau_n, +\infty[$ и, следовательно, $\tilde{\Phi}$ компактнозначна на $\mathbb{R}$ ($\tilde{\Phi}(t) \in \overline{\Phi(\mathbb{R}_+)}$ при всех $t \in \mathbb{R}$). Поэтому $P(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau = \tilde{\Phi}(t) - A$ компактнозначна и, следовательно **[2]**,**[75]**,**[79]** почти периодична. Функция $\Phi(t)=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau$ представима в виде

$$\Phi(t)=P(t)+c+[\int_0^t\omega(\tau)d\tau-c].$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}[\int_0^t\omega(\tau)d\tau-c]=0$ и $P+c$ почти периодична, то Φ асимптотически почти периодична.

Лемма 1.5.23. *Пусть $\varphi_k\in\mathcal{A}P(\mathbb{R},\mathfrak{B}_k)$ $(k=\overline{1,m})$ и $\Phi\in C(Q,\mathfrak{B})$, где $Q=\overline{\varphi_1(\mathbb{R})}\times\overline{\varphi_2(\mathbb{R})}\times\dots\times\overline{\varphi_m(\mathbb{R})}$, тогда функция φ, определенная равенством*

$$\varphi(t)=\Phi(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_m(t)),$$

асимптотически почти периодична.

Доказательство. В силу асимптотической почти периодичности функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_m$ множество $Q_+=\overline{\varphi_1(\mathbb{R}_+)}\times\overline{\varphi_2(\mathbb{R}_+)}\times\dots\times\overline{\varphi_m(\mathbb{R}_+)}$ компактно и, следовательно, функция $\Phi\in C(Q,\mathfrak{B})$ равномерно непрерывна на Q_+. Пусть p_k – почти периодическая функция, такая что $\varphi_k=p_k+\omega_k$ для $\omega_k\in C_0(\mathbb{R},\mathfrak{B}_k)$ $(k=\overline{1,m})$. Тогда $\overline{p_k(\mathbb{R})}\subset\overline{\varphi_k(\mathbb{R}_+)}$ и, следовательно, $\tilde{Q}=\overline{p_1(\mathbb{R})}\times\overline{p_2(\mathbb{R})}\times\dots\times\overline{p_m(\mathbb{R})}\subset Q_+$ компактно.

Пусть $\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)$ выбрано из условия равномерной непрерывности функции Φ на Q_+ и $L(\varepsilon)>0$ таково, что

$$|\varphi_k(t)-p_k(t)|<\delta(\varepsilon)$$

при всех $t\geq L(\varepsilon)$ и $k=\overline{1,m}$. Положим $p(t)=\Phi(p_1(t),p_2(t),\dots,p_m(t))$ и $\omega(t):=\varphi(t)-p(t)$. Заметим, что функция $p\in C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ почти периодична, ибо функции $p_k\in C(\mathbb{R},\mathfrak{B}_k)$ $(k=\overline{1,m})$ почти периодичны и Φ равномерно непрерывна на $Q_+\supset\tilde{Q}=\overline{p_1(\mathbb{R})}\times\overline{p_2(\mathbb{R})}\times\dots\times\overline{p_m(\mathbb{R})}$. Кроме того

$$|\omega(t)|=|\Phi(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t))-\Phi(p_1(t),\dots,p_m(t))|<\varepsilon$$

при всех $t\geq L(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5.24. *Пусть $\{\varphi_k\}\subset\mathcal{A}P(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ и $\varphi=\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi_k$ в $\mathcal{A}P(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Тогда $M\{\varphi\}=\lim\limits_{k\to+\infty}M(\varphi_k)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $k(\varepsilon) > 0$ таково, что

$$|\varphi_k(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \tag{1.5.15}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $k \geq k(\varepsilon)$. Так как

$$|M\{\varphi_k\} - M\{\varphi\}| \leq M\{|\varphi_k(t) - \varphi(t)|\},$$

то из (1.5.15) вытекает неравенство

$$|M\{\varphi_k\} - M\{\varphi\}| \leq \varepsilon$$

при всех $k \geq k(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5.25. *Если $\varphi \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, то*

$$M\{\varphi\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \varphi(s)ds. \tag{1.5.16}$$

Причем предел (1.5.16) *существует равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}P(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ и $\omega \in C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ такие, что $\varphi = p + \omega$. Тогда имеет место равенство

$$M\{p\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(s)ds \tag{1.5.17}$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для ω найдется $L(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\omega(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$|\frac{1}{T}\int_0^T \omega(s+t)ds| \leq \frac{1}{T}\int_0^{L(\varepsilon)} |\omega(s+t)|ds + \frac{1}{T}\int_{L(\varepsilon)}^T |\omega(s+t)|ds \leq \frac{\|\omega\|}{T}L(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-L(\varepsilon)}{T} \tag{1.5.18}$$

при всех $t \geq 0$, где $\|\omega\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}$. Из (1.5.18) следует, что

$$|\frac{1}{T}\int_0^T \omega(s+t)ds| < \varepsilon \tag{1.5.19}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $T > \frac{2L(\varepsilon)\|\omega\|}{\varepsilon}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для ω из (1.5.17) и (1.5.19) следует (1.5.16). Лемма доказана.

1.6. Асимптотически S^p-почти периодические функции

1. **Динамические системы сдвигов в пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$.** Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$, $(S,\mathfrak{B};\mu)$ – пространство с мерой и μ – мера Радона, $\mathfrak{B}$ – банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Функцию $f : S \to \mathfrak{B}$ называют [**73**] этажной, если она принимает не более конечного числа различных значений. При этом ее называют измеримой, если $f^{-1}(\{x\}) \in B$ для любого $x \in \mathfrak{B}$, и интегрируемой, если, сверх того, $\mu(f^{-1}(\{x\}) < +\infty$. Тогда определяют

$$\int f d\mu = \sum_{x\in\mathfrak{B}} \mu(f^{-1}(\{x\})x. \qquad (1.6.1)$$

Сумма в правой части равенства (1.6.1) конечна по предположению.

Говорят, что функция $f : S \to \mathfrak{B}$ измерима если существует последовательность $\{f_n\}$ этажных измеримых функций таких, что $f_n(s) \to f(s)$ почти всюду по мере μ.

Функция $f : S \to \mathfrak{B}$ называется интегрируемой, если существует последовательность $\{f_n\}$ этажных интегрируемых функций таких, что для любого n функция $\varphi_n(s) = |f_n(s) - f(s)|$ интегрируема и

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n(s) - f(s)| d\mu(s) = 0.$$

Тогда $\int f_n d\mu$ сходится в пространстве $\mathfrak{B}$ и его предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n\}$ с перечисленными выше свойствами. Этот предел обозначают $\int f d\mu$ или $\int f(s)d\mu(s)$.

Пусть $1 \le p \le +\infty$. Через $L^p(S;\mathfrak{B},\mu)$ обозначают пространство всех измеримых функций (классов функций) $f : S \to \mathfrak{B}$ таких, что $|f| \in L^p(S;\mathbb{R};\mu)$, где $|f|(s) = |f(s)|$. Пространство $L^p(S;\mathfrak{B};\mu)$ снабжено нормой

$$||f||_{L^p} = |\int |f(s)|^p d\mu(s)|^{1/p} \quad \text{и} \quad ||f||_\infty = supess|f(s)|. \quad (1.6.2)$$

Пространство $L^p(S;\mathfrak{B};\mu)$ с нормой (1.6.2) является банаховым.

Обозначим через $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ множество всех функций $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{B}$ таких, что $f_l \in L^p([-l,l];\mathfrak{B};\mu)$ при любых $l>0$, где f_l – сужение функции f на $[-l,l]$.

Функцию $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{B}$ называют разложимой, если для произвольного $s\in\mathbb{R}$ $f(s)=\sum_{i=1}^N \varphi_i(s)g_i$, где $g_i\in\mathfrak{B}$ и а φ_i – скалярная непрерывная функция с компактным носителем $(i=1,2,\dots,N)$.

Лемма 1.6.1. **[73]** *Имеют место утверждения.*

1) *Всякая непрерывная функция $f:S\to\mathfrak{B}$ с компактным носителем интегрируема.*
2) *В пространстве $L^p(\mathbb{R};\mu;\mathfrak{B})$ множество этажных функций с компактным носителем или множество непрерывных разложимых функции с компактным носителем плотны.*

В пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ определим семейство полунорм $||\cdot||_{l,p}$ по следующему правилу:

$$||f||_{l,p}=||f_l||_{L^p([-l,l];\mathfrak{B};\mu)}\quad (l>0). \tag{1.6.3}$$

Семейство полунорм (1.6.3) определяет метризуемую топологию на $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Метрика, задающая эту топологию, может быть определена, например, равенством

$$d_p(\varphi,\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{||\varphi-\psi||_{n,p}}{1+||\varphi-\psi||_{n,p}}.$$

Определим отображение $\sigma: L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)\times\mathbb{R}\to L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ следующим образом: $\sigma(f,\tau)=f^{(\tau)}$ при любых $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ и $\tau\in\mathbb{R}$, где $f^{(\tau)}(s)=f(s+\tau)$ $(s\in\mathbb{R})$.

Лемма 1.6.2. $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$ *– динамическая система.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность отображения σ. Пусть $f_n\to f$ в пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ и $t_n\to t$. Покажем, что $\sigma(f_n,t_n)\to\sigma(f,t)$, когда $n\to+\infty$, т.е.

$$\left[\int_{|t|\le l}|f_n(t_n+s)-f(t+s)|^p d\mu(s)\right]^{1/p}\to 0,$$

когда $n \to +\infty$ при каждом $l > 0$.

Заметим, что

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l} |f_n(t_n+s)-f(t+s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l} |f_n(t_n+s)-f(t_n+s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} +$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l} |f_n(t_n+s)-f(s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.6.4)$$

Кроме того, так как $t_n \to t$, то существует $l_0 > 0$ такое, что $|t_n| \le |t| + l_0$ и $|t_n + s| \le |t_n| + |s| \le |t| + l_0 + l = L$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\Big[\int\limits_{|t|\le l} |f_n(t_n+s)-f(t_n+s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le \\ &\le \Big[\int\limits_{|t|\le L} |f_n(t)-f(t)|^p d\mu(t)\Big]^{\frac{1}{p}} \to 0 \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

при $n \to +\infty$, ибо $f_n \to f$ в $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$.

Для оценки второго интеграла в правой части неравенства (1.6.4) воспользуемся леммой 1.6.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{B}$ – непрерывная функция с компактным носителем такая, что

$$\Big[\int\limits_{|S|\le l+l_0} |g(s)-f(s)|^p d\mu(s)\Big]^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon.$$

Тогда

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l} |f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le \Big[\int\limits_{|t|\le l} |f(t+t_n)-g(t+t_n)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} +$$

$$\Big[\int\limits_{|t|\le l} |g(t+t_n)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int\limits_{|t|\le l} |f(t)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$2\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(s)-g(s)|^p ds\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$2\varepsilon + \max_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)|\cdot 2l$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le 2\varepsilon$$

(так как $\max\limits_{|t|\le l}|g(t+t_n)-g(t)| \to 0$, когда $n \to +\infty$). В силу произвольности ε из последнего соотношения получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\int\limits_{|t|\le l}|f(t+t_n)-f(t)|^p dt\Big]^{\frac{1}{p}} = 0 \tag{1.6.6}$$

Из (1.6.4) – (1.6.6) и следует непрерывность отображения σ. Лемма доказана.

2. **Асимптотически почти периодические функции Степанова**. Пусть $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Будем говорить, что функция φ S^p-почти периодична (почти периодична по Степанову [**28**]), если движение $\sigma(\varphi,\cdot)$ почти периодично в динамической системе $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$. Аналогично определяется асимптотическая S^p-почти периодичность функции.

Теорема 1.6.3. *Пусть $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *φ S^p-почти периодична.*
2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $l > 0$ такое, что на любом отрезке длины l в $\mathbb{R}$ найдется число τ, для которого*

$$\int\limits_t^{t+1}|\varphi(s+\tau)-\varphi(s)|^p ds < \varepsilon^p$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

3) *φ уст. L и Σ_φ р. уст. $Л^+\Sigma_\varphi$ в динамической системе $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$.*

4) *Из произвольной последовательности* $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ *можно извлечь подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что последовательность* $\{\varphi^{(t_{k_n})}\}$ *сходится равномерно в пространстве* $L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$, *т.е. существует функция* $\tilde{\varphi} \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ *такая, что*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |\varphi(s+t_{k_n}) - \tilde{\varphi}|^p ds = 0.$$

Замечание 1.6.4. *В случае конечномерности пространства* $\mathfrak{B}$ *устойчивость по Лагранжу функции* $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ *эквивалентна следующим двум условиям:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |\varphi(s)|^p ds < +\infty \ \text{ и } \ \lim_{h\to 0} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |\varphi(s+h) - \varphi(s)|^p ds = 0.$$

Теорема 1.6.5. *Пусть* $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Функция* φ *является асимптотически* S^p*-почти периодической, т.е. движение* $\sigma(\varphi,\cdot)$ *асимптотически почти периодично в динамической системе* $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$.
2) *Существуют* S^p*-почти периодическая функция* p *и функция* $\omega \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$ *такие, что* $p \in L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu)$, $\varphi = p + \omega$ *и* $\lim\limits_{t+\infty} \int\limits_t^{t+1} |\omega(s)|^p ds = 0$.
3) *Функция* φ *уст.* L^+ *и* Σ^+_φ *р. уст.* $Л^+\Sigma^+_\varphi$ *в динамической системе* $(L^p_{loc}(\mathbb{R};\mathfrak{B};\mu),\mathbb{R},\sigma)$.
4) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $\beta \geq 0$ *и* $l > 0$ *такие, что на любом отрезке длины* l *найдется число* τ, *для которого*

$$\int\limits_t^{t+1} |\varphi(\tau+s) - \varphi(s)|^p ds < \varepsilon^p$$

при всех $t \geq \beta$ *и* $t+\tau \geq \beta$.

5) *Из любой последовательности* $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, *можно выделить подпоследовательность* $\{t_{k_n}\}$ *такую, что последовательность* $\{\varphi^{(t_{k_n})}\}$ *сходится равномерно по* $t \in \mathbb{R}_+$ *в пространстве* $L^p_{loc}(\mathbb{R}; \mathfrak{B}; \mu)$, *т.е. существует функция* $\tilde{\varphi} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}; \mathfrak{B}; \mu)$ *такая, что*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int\limits_t^{t+1} |\varphi(s+t_{k_n}) - \tilde{\varphi}(s)|^p ds = 0.$$

Глава 2

Асимптотически почти периодические решения операторных уравнений

2.1. Сравнимость движений по характеру возвращаемости

В этом параграфе вводится понятие сравнимости движений динамических систем по характеру их возвращаемости в пределе. Это понятие при изучении асимптотически устойчивых по Пуассону движений играет такую же роль, как и понятие сравнимости по характеру возвращаемости устойчивых по Пуассону движений, введенных Б. А. Щербаковым (см., например, [**75**], [**79**]).

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ – динамические системы, $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначим через $\mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$ множество всех последовательностей $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_{x,p}$ таких, что $t_n \to +\infty$. Положим $\mathfrak{L}_x^{+\infty}(M) = \cup\{\mathfrak{L}_{x,p} : p \in M\}$ и $\mathfrak{L}_x^{+\infty} = \mathfrak{L}_x^{+\infty}(X)$.

Точку $x \in X$ назовчм сравнимой по характеру возвращаемости с $y \in Y$ относительно $M \subset Y$ или, короче, сравнимой с y относительно множества M, если $\mathfrak{L}_y^{+\infty}(M) \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$.

Обозначим через $H(M) = \overline{\{\pi(x,t) : x \in M, t \in \mathbb{T}\}}$. Пусть $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ – групповая динамическая система.

Лемма 2.1.1. *Если* $\mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$, *то* $\mathfrak{L}_{y,\sigma(q,t)}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,\pi(p,t)}^{+\infty}$ *при всех* $t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{T}$ и $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_{y,\sigma(q,t)}^{+\infty}$, тогда $t_n \to +\infty$ и $\sigma(y, t_n) \to \sigma(q,t)$ при $n \to +\infty$ и, следовательно, $\{t_n - t\} \subset \mathbb{T}$ и $\{t_n - t\} \in \mathfrak{L}_{y,q}^{+\infty}$. Действительно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(y, t_n - t) = \sigma(\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(y,t_n), -t) = \sigma(\sigma(q,t), -t) = q$. Таким образом, $\{t_n -$

$t\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{y,p}$ и, следовательно, $\{t_n - t\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$. Повторяя приведчнные выше рассуждения, легко показать, что $\{t_n\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,\pi(p,t)}$. Лемма доказана.

Следствие 2.1.2. *В условиях леммы* 2.1.1, *если* $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y}(M) \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$, *то* $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y}(\Sigma_M) \subset \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$, *где* $\Sigma_M = \{\pi(x,t) : x \in M,\, t \in \mathbb{T}\}$.

Лемма 2.1.3. *Если* $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$, *то существует единственная точка* $p \in \omega_x$ *такая, что* $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$.

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q}$, тогда $yt_n \to q$. Согласно условию леммы существует точка $p \in \omega_x$ такая, что $xt_n \to p$. Покажем, что $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$. Допустим, что существует $\{t'_n\} \in \mathfrak{L}_{y,q} \setminus \mathfrak{L}_{x,p}$, тогда найдется точка $\bar{p} \in \omega_x \quad (\bar{p} \neq p)$ такая, что $\{xt'_n\}$ сходится к $\bar{p}$. Составим последовательность $\{\bar{t}_k\}$ следующим правилом

$$\bar{t}_k = \begin{cases} t_n, \text{ если } k = 2n-1 \\ t'_n, \text{ если } k = 2n. \end{cases}$$

Из определения последовательности $\{\bar{t}_k\}$ следует, что $\bar{t}_k \to +\infty$ и $y\bar{t}_k \to q$. По условию леммы $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$ и, следовательно, $\{\bar{t}_k\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$, т.е. $\{x\bar{t}_k\}$ сходится. С другой стороны, она должна иметь две различные предельные точки p и $\overline{p}$. Полученное противоречие доказывает включение $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что точка p в лемме определяется однозначно, ибо для различных точек p_1 и p_2 имеет место равенство $\mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p_1} \cap \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p_2} = \emptyset$.

Теорема 2.1.4. *Если точка x сравнима с y относительно множества M, то существует непрерывное отображение $h : \sigma(\Sigma_M, \mathbb{T}) \to \omega_x$, удовлетворяющее условию*

$$h(\sigma(q,t)) = \pi(h(q),t) \tag{2.1.1}$$

при всех $q \in \sigma(\Sigma_M, \mathbb{T})$ и $t \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Пусть точка x сравнима с y относительно множества M. По следствию 2.1.2 $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y}(\Sigma_M) \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$. Пусть $q \in \Sigma_M$. Согласно лемме 2.1.3 существует единственная точка $p \in$

ω_x такая, что $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$. Положим $h(p) = q$. Таким образом корректно определено отображение $h : \Sigma_M \to \omega_x$. Из леммы 2.1.1 следует, что h удовлетворяет условию (2.1.1). Покажем, что отображение h непрерывно. Пусть $\{q_k\} \to q$ $(q_k, q \in \Sigma_M)$. Покажем, что $\{p_k\} = \{h(q_k)\}$ сходится к $p = h(q)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $\{t^{(k)}_n\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q_k}$, тогда $p_k = h(q_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} xt^{(k)}_n$. Пусть $\varepsilon_k \downarrow 0$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho(xt^{(k)}_{n_k}, p_k) < \varepsilon_k \quad \text{и} \quad d(yt^{(k)}_{n_k}, q_k) < \varepsilon_k$$

одновременно (очевидно, такие n_k существуют). Положим $t'_k = t^{(k)}_{n_k}$ и покажем, что последовательность $\{t'_k\}$ принадлежит $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q}$. Для этого заметим, что

$$d(yt'_k, q) \leq d(yt'_k, q_k) + d(q_k, q) < \varepsilon_k + d(q_k, q). \tag{2.1.2}$$

Переходя к пределу в неравенству (2.1.2), когда $k \to +\infty$, получим $\{t'_k\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q}$. Так как $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$, то $\{t'_k\} \in \mathfrak{L}_{x,p}$. Поскольку

$$\rho(p_k, p) \leq \rho(p_k, xt'_k) + \rho(xt'_k, p) < \varepsilon_k + \rho(xt'_k, p), \tag{2.1.3}$$

то, переходя к пределу в (2.1.3), и учитывая, что $\{t'_k\} \in \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,p}$, получим $p_k \to p$. Теорема доказана.

Пусть точка x сравнима с y относительно множества M. Отметим, что наиболее важными с точки зрения приложений (см., например, [**2**], [**75**],[**79**]) является следующие случаи.

1. $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$. Как показано в [**77**],[**79**], включение $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_y \subseteq \mathfrak{N}_x$. Как было отмечено в § 1.2 главы I, включение $\mathfrak{N}_y \subseteq \mathfrak{N}_x$ имеет место тогда и только тогда, когда x сравнима по возвращаемости с y.

2. $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$ и $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$. Положим $\mathfrak{M}^{+}_y = \{\{t_n\} : \{t_n\} \in \mathfrak{M}_y, t_n \in \mathbb{T}_+\}$. Точку x назовчм сильно сравнимой (в положительном направлении) с y, если $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y,y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x,x}$ и $\mathfrak{L}^{+\infty}_{y} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{x}$. Имеет место следующая

Теорема 2.1.5. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Точка x сильно сравнима с y.*

2) *Существует непрерывное отображение* $h : H^+(y) \to H^+(x)$, *удовлетворяющее условию* (2.1.1) *при всех* $q \in H^+(y)$ *и* $t \in \mathbb{T}_+$, *и, кроме того,* $h(y) = x$.
3) $\mathfrak{M}_y^+ \subseteq \mathfrak{M}_x^+$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Действительно, согласно теореме 2.1.4 существует непрерывное отображение $h : H^+(y) \to H^+(x)$ с нужными свойствами.

Предположим, что выполнено условие 2). И пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_y^+$, тогда существует точка $q \in H^+(y)$ такая, что $yt_n \to q$. В силу условия

$$\{h(yt_n)\} = \{h(y)t_n\} = \{xt_n\} \to h(q)$$

и, следовательно, $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_x^+$.

Наконец, покажем, что из 3) следует 1). Очевидно, для доказательства 1) достаточно показать, что $\mathfrak{L}_{y,y}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,x}^{+\infty}$. Доказательство последнего включения проведчм методом от противного. Если допустить, что включение $\mathfrak{L}_{y,y}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x,x}^{+\infty}$, не имеет место, то существует $\{\bar{t}_n\} \in \mathfrak{L}_{y,y}^{+\infty} \setminus \mathfrak{L}_{x,x}^{+\infty}$. Так как $\mathfrak{L}_{y,y}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{y}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{x}^{+\infty}$, то существует точка $p \neq x$ такая, что $\{\bar{t}_n\} \in \mathfrak{L}_{x,p}^{+\infty}$. Построим последовательность $\{t'_k\}$ следующим условием

$$t'_k = \begin{cases} \bar{t}_n, \text{ при } k = 2n - 1 \\ t'_n, \text{ при } k = 2n \end{cases}$$

при каждом $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $\{t'_k\} \in \mathfrak{M}_{y,y}^+$ и, следовательно, $\{t'_k\} \in \mathfrak{M}_x^+$. Таким образом, последовательность $\{xt'_k\}$ сходится. Откуда следует, что $x = p$. Последнее равенство противоречит выбору p $(p \neq x)$. Теорема доказана.

Замечание 2.1.6. *Из теоремы* 2.1.5 *и результатов работ* [**77**], [**79**] *следует, что сильная сравнимость точки* x *с* y *эквивалентна их равномерной сравнимости, если точка* y *уст.* L^+. *В общем случае эти понятия, видимо, различны* (*хотя нам соответствующий пример неизвестен*).

3. $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$. В этом случае мы будем говорить, что точка x сравнима в пределе (в положительном направлении) с точкой y.

2.2. Сравнимость в пределе асимптотически устойчивых по Пуассону движений

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ – динамические системы, $x \in X$ и $y \in Y$.

Теорема 2.2.1. *Пусть точка y асимптотически устойчива по Пуассону. Для того чтобы x была сравнимой в пределе с y необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям*

$$h(\sigma(q,t) = \pi(h(q), t) \tag{2.2.1}$$

при всех $q \in \omega_y$, $t \in \mathbb{T}$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(\pi(x, t_n), \pi(h(\tilde{q}), t_n)) = 0 \tag{2.2.2}$$

при каждом $\tilde{q} \in P_y$ и $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x была сравнимой в пределе с y. Согласно теореме 2.1.4 существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условию (2.2.1). Покажем, что имеет место и равенство (2.2.2). Пусть $\tilde{q} \in P_y$ и $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Тогда найдется точка $\overline{q} \in \omega_y$ такая, что $yt_n \to \overline{q}$. В силу определения отображения h имеем равенство $h(\overline{q}) = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$. С другой стороны, $\overline{q} = \lim\limits_{n\to+\infty} yt_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q\bar{t}_n$, так как $q \in P_y$. Следовательно, $h(\overline{q}) = h(\lim\limits_{n\to+\infty} y\bar{t}_n) = h(\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{q}t_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(h(q), t_n)$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} x\bar{t}_n = h(\overline{q}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(h(q), \bar{t}_n)$. Откуда и следует (2.2.2).

Достаточность. Пусть существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям (2.2.1) и (2.2.2). Возьмчм произвольную последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$, тогда существует точка $q \in \omega_y$ такая, что последовательность $\{yt_n\}$ сходится к q. Пусть $y \in P_y$. Заметим, что

$$h(q) = h(\lim_{n\to+\infty} yt_n) = h(\lim_{n\to+\infty} \sigma(q, t_n)) = \lim_{n\to+\infty} \pi(h(q), t_n) \tag{2.2.3}$$

и, следовательно,

$$\rho(xt_n, h(q)) \leq \rho(xt_n, h(q)t_n) + \rho(h(q)t_n, h(q)). \tag{2.2.4}$$

Переходя к пределу в неравенстве (2.2.4) и учитывая равенство (2.2.3) и условие (2.2.2), получим равенство $h(q) = \lim\limits_{n\to+\infty} xt_n$, то есть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_x^{+\infty}$ и $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subset \mathfrak{L}_x^{+\infty}$. Теорема доказана.

Следствие 2.2.2. *Пусть точка y уст. L^+ и асимптотически устойчива по Пуассону. Для того чтобы точка x была сравнима в пределе с y необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям* (2.2.1) *и*

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, h(q)t) = 0 \tag{2.2.5}$$

при всех $q \in P_y$.

Доказательство. Достаточность условий следствия вытекает из теоремы 2.2.1. Докажем необходимость. Пусть точка x сравнима в пределе с y. Согласно теореме 2.2.1 существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$ удовлетворяющее условиям (2.2.1) и (2.2.2). Допустим, что равенство (2.2.5) не имеет места. Тогда существуют $q \in P_y$, $t_n \to +\infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\rho(xt_n, h(q)t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{2.2.6}$$

В силу уст. L^+ точки y из последовательности $\{\bar{t}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{t_{k_n}\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Согласно теореме 2.2.1 выполнено равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(xt_{k_n}, h(q)t_{k_n}) = 0. \tag{2.2.7}$$

Переходя к пределу в неравенстве (2.2.6) по подпоследовательности $\{t_{k_n}\}$ и учитывая равенство (2.2.7), получим $\varepsilon_0 \leq 0$. Последнее противоречит выбору числа ε_0. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Приводимая ниже теорема показывает, что введенное понятие сравнимости в пределе играет такую же роль при изучении асимптотически устойчивых по Пуассону движений, какую играет понятие согласованности в смысле Б.А.Щербакова для устойчивых по Пуассону движений [**75**], [**79**].

Теорема 2.2.3. *Пусть y асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна). Если точка x сравнима в пределе с y, то точка x также асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна).*

Доказательство. Пусть x сравнима в пределе с y. Согласно следствию 2.2.2 существует непрерывное отображение $h : \omega_y \to \omega_x$, удовлетворяющее условиям (2.2.1) и (2.2.5). Так как y уст. L^+, то ω_y компактно и, следовательно, отображение h равномерно непрерывно. Пусть $q \in P_y$, тогда $p = h(q) \in P_x$ и согласно теореме 9 из [**77**] точка p постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна). Теорема доказана.

2.3. Асимптотически устойчивые по Пуассону решения

Рассмотрим вопрос о существовании асимптотически устойчивых по Пуассону решений операторных уравнений.

Пусть $h : X \to Y$ – гомоморфизм динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$h(x) = y, \tag{2.3.1}$$

где $y \in Y$. Наряду с уравнением (2.3.1) рассмотрим семейство "ω-предельных"уравнений

$$h(x) = q, \quad (q \in \omega_y). \tag{2.3.2}$$

Теорема 2.3.1. *Если решение x уравнения* (2.3.1) *уст. L^+ и каждое уравнение семейства* (2.3.2) *допускает не более одного решения из ω_x, то x сравнимо в пределе с $y \in Y$.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Тогда существует точка $q \in \omega_y$ такая, что $yt_n \to q$. В силу уст. L^+ решения x, последовательность $\{xt_n\}$ компактна. Пусть p – произвольная предельная точка последовательности $\{xt_n\}$, тогда существует подпоследовательность $\{t_{k_n}\} \subseteq \{t_n\}$ такая, что последовательность $\{xt_{k_n}\}$ сходится к p. В силу непрерывности и гомоморфности h имеет место равенство $h(p) = q$. Таким образом, p является решением уравнения (2.3.2), $p \in \omega_x$ и, следовательно, всякая предельная точка p последовательности $\{xt_n\}$ является решением уравнения (2.3.2). По условию теоремы, уравнение (2.3.2) имеет не более одного решения из ω_x. Следовательно, последовательность $\{xt_n\}$ имеет ровно одну предельную точку. Так как последовательность $\{xt_n\}$ компактна, то, в таком случае, она сходится. Таким образом последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_x^{+\infty}$ и доказано включение $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subset \mathfrak{L}_x^{+\infty}$.

Следствие 2.3.2. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1) *и y асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна). Если каждое уравнение семейства* (2.3.2) *допускает не более одного решения из ω_x, то x асимптотически постоянно (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Доказательство. Сформулированное предложение вытекает из теорем 2.2.3 и 2.3.1.

Решение $x \in M$ $(M \subseteq X)$ уравнения (2.3.1) назовем разделенным в множестве M, если x – единственное решение уравнения (2.3.1) из M или существует число $r > 0$ такое, что каково бы ни было решение $p \in M$ $(p \neq x)$ уравнения (2.3.1) $\rho(xt, pt) \geq r$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Лемма 2.3.3. *Пусть множество $M \subseteq X$ компактно. Если каждое решение $x \in M$ уравнения* (2.3.1) *разделено в M, то* (2.3.1) *имеет конечное число решений из M.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. в M существует бесконечное множество $\{x_n\}$ решений уравнения (2.3.1). В силу компактности M из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\{x_n\}$ сходится. Пусть

$p = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. В силу непрерывности h и замкнутости M $h(p) = y$ и $p \in M$. Таким образом p – решение уравнения (2.3.1), но, очевидно, оно не является разделенным в M, что противоречит условию. Лемма доказана.

Лемма 2.3.4. *Пусть точка $y \in Y$ рекуррентна, $M \subseteq X$ – компактное инвариантное множество и $y \in h(M)$. Если решения из M каждого уравнения семейства* (2.3.2) *разделены в множестве M, то существует число $r > 0$ такое, что каковы бы ни были два различных решения p_1 и p_2 из M любого уравнения семейства* (2.3.2) *выполняется неравенство $\rho(p_1 t, p_2 t) \geq r > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.3.3 при каждом $q \in \omega_y$ уравнение (2.3.2) имеет конечное число решений из M. Обозначим через $n(q)$ число различных решений уравнения (2.3.2) из M. Покажем, что число $n(q)$ не зависит от точки $q \in \omega_y$. В самом деле, для точки $q \in \omega_y$ найдется последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$ такая, что последовательность $\{yt_n\}$ сходится к q. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\} \subseteq M^M$, определенную равенством $\xi_n(x) = \pi(x, t_n)$ при всех $x \in M$. Согласно теореме Тихонова [**19**] последовательность $\{\xi_n\}$ компактна в M^M. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\{\xi_n\}$ сходится в M^M. Положим $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n$. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{n(y)}$ решения из M уравнения (2.3.1) и $\bar{x}_i = \xi(x_i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n(y)$, т.е. $\bar{x}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_i t_n$. Заметим, что в силу непрерывности и гомоморфности h точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n(y)}$ являются решениями уравнения (2.3.2). Покажем, что точки $\bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n(y))$ различны. Поскольку $\xi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n(x)$ при всех $x \in M$, а M инвариантно, то, в частности,

$$
\begin{aligned}
&\xi(\pi(x_i, t)) = \lim_{n\to+\infty} \pi(\pi(x_i, t), t_n) = \\
&\lim_{n\to+\infty} \pi(\pi(x_i, t_n), t) = \pi(\bar{x}_i, t).
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

Положим $r = \inf\{\rho(\pi(x_i, t), \pi(x_j, t)) : i \neq j,\ t \in \mathbb{R}\}$. Тогда согласно условию леммы $r > 0$. Так как $\rho(\pi(x_i, t), \pi(x_j, t)) \geq$

$r > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n(y))$, то выполнено и неравенство

$$\rho(\pi(x_i, t + t_n), \pi(x_j, t + t_n)) \geq r. \tag{2.3.4}$$

Переходя к пределу в неравенстве (2.3.4) и учитывая (2.3.3), получим

$$\rho(\pi(\bar{x}_i, t), \pi(\bar{x}_j, t)) \geq r \tag{2.3.5}$$

при всех $t \in \mathbb{T}$ и $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n(y))$. Из неравенства (2.3.5) следует, что $\bar{x}_i$ различны. Таким образом $n(q) \geq n(y)$. Из рекуррентности y следует, что $y \in \omega_q$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получим неравенство $n(y) \geq n(q)$. Следовательно, $n(q) = n(y)$ при любом $q \in \omega_y$. Из неравенства (2.3.5) следует, что число $r > 0$ обладает нужными в лемме свойствами. Лемма доказана.

Лемма 2.3.5. *Пусть точка $y \in Y$ асимптотически рекуррентна и x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1). *Если при каждом $q \in \omega_y$ все решения из ω_x уравнения* (2.3.2) *разделены в ω_x, то существует единственное решение $p \in \omega_x$ уравнения* (2.3.2) *такое, что $p \in P_x$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.3.3 в условиях нашей леммы уравнение (2.3.2) имеет лишь конечное число n решений из ω_x. Обозначим их через $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Покажем, что имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \inf\{\rho(xt, p_i t) : 1 \leq i \leq n\} = 0. \tag{2.3.6}$$

Допустим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\{t_n\} \to +\infty$ такие, что

$$\rho(xt_k, p_i t_k) \geq \varepsilon_0 \tag{2.3.7}$$

при всех $i = \overline{1, n}$ и $k = 1, 2, \ldots$. В силу уст. L^+ точки x и асимптотической рекуррентности y последовательности $\{xt_k\}$, $\{p_i t_k\}$ $(i = \overline{1, n})$ и $\{yt_k\}$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{p} = \lim\limits_{k \to +\infty} xt_k$, $\bar{q} = \lim\limits_{k \to +\infty} yt_k$ и $\bar{p}_i = \lim\limits_{k \to +\infty} p_i t_k$. Из неравенства (2.3.7) следует, что $\bar{p} \neq \bar{p}_i$ $(i = \overline{1, n})$. С другой стороны, $\bar{p} \in \omega_x$ и $h(\bar{p}) = \bar{q}$, а по лемме 2.3.4 $X_{\bar{q}} \cap \omega_x = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n\}$, где $X_{\bar{q}} = h^{-1}(\bar{q})$. Таким образом $\bar{p} \in \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n\}$. Последнее противоречит условию $\bar{p}_i \neq \bar{p}$ $(i = \overline{1,n})$. Таким образом равенство (2.3.6) доказано.

Покажем, что существует число $1 \leq i_0 \leq n$, для которого $p_{i_0} \in P_x$, т.е.

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, p_{i_0}t) = 0.$$

Для числа ε, $0 < \varepsilon < \frac{r}{3}$, ($r > 0$ – число, существование которого гарантируется леммой 2.3.4) найдем $L(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\inf\{\rho(xt, p_i t) : 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Пусть $t_0 > L(\varepsilon)$, тогда существует $1 \leq i_1 \leq n$ такое, что

$$\rho(xt_0, p_{i_1}t_0) < \varepsilon.$$

Положим $\delta(t_0) = \sup\{\tilde{\delta}(t_0) : \rho(xt, p_{i_1}t) < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tilde{\delta}(t_0)]\}$. Покажем, что $\delta(t_0) = +\infty$. Допустим противное, тогда

$$\rho(xt'_0, p_{i_1}t'_0) \geq \varepsilon,$$

где $t'_0 = t_0 + \delta(t_0)$, и существует $i_2 \neq i_1$ $(1 \leq i_2 \leq n)$ такое, что

$$\rho(xt'_0, p_{i_2}t'_0) < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\rho(xt'_0, p_{i_2}t'_0) \geq \rho(p_{i_2}t'_0, p_{i_1}t'_0) - \rho(p_{i_1}t'_0, xt'_0) > r - \varepsilon > 2\varepsilon. \quad (2.3.8)$$

Неравенство (2.3.8) противоречит допущению. Таким образом мы нашли $L(\varepsilon) > 0$ и $p_{i_0} \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, что

$$\rho(xt, p_{i_0}t) < \varepsilon$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Положим $p = p_{i_0}$ и покажем, что точка p не зависит от выбора ε. В самом деле, если допустить противное, то найдутся числа ε_1 и ε_2, p_1 и p_2 $(p_1 \neq p_2)$, $L(\varepsilon_1) > 0$ и $L(\varepsilon_2) > 0$, удовлетворяющие выше перечисленным условиям. Положим $L = \max(L(\varepsilon_1), L(\varepsilon_2))$, тогда

$$\rho(p_1t, p_2t) \leq \rho(p_1t, xt) + \rho(xt, p_2t) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{2r}{3} < r. \quad (2.3.9)$$

Неравенство (2.3.9) противоречит выбору числа r (см. лемму 2.3.4). Лемма доказана.

Теорема 2.3.6. *Пусть точка $y \in Y$ асимптотически почти периодична (асимптотически рекуррентна) и x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1). *Если при каждом $q \in \omega_y$ все решения из ω_x уравнения* (2.3.2) *разделены в ω_x, то x асимптотически почти периодично (асимптотически рекуррентно).*

Доказательство. Согласно лемме 2.3.5 существует единственная точка $p \in \omega_x$ такая, что $p \in P_x$. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что в условиях теоремы множество ω_x состоит из почти периодических (рекуррентных) движений. Последнее утверждение вытекает из теоремы 3 [**27**, стр.111] (случай $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ см. в [**14**]) и теоремы 14.7 из [**2**]. Теорема доказана.

Будем говорить, что решение x уравнения (2.3.1) Σ^+-устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что если $\rho(xt_1, xt_2) < \delta$ и

$$\sup\{d(y(t+t_1), y(t+t_2)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \delta \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{T}_+),$$

то

$$\sup\{\rho(x(t+t_1), x(t+t_2)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \varepsilon.$$

Теорема 2.3.7. *Пусть точка y асимптотически почти периодична и точка x уст. L^+. Если x является Σ^+-устойчивым решением уравнения* (2.3.1)*, то оно асимптотически почти периодично.*

Доказательство. Пусть x – решение уравнения (2.3.1), удовлетворяющее перечисленным в теореме условиям, и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ из условия Σ^+-устойчивости решения x. Из теоремы 1.3.8 следует, что для асимптотической почти периодичности точки x достаточно показать, что из любой последовательности $\{t_n\} \to +\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{xt_{k_n}\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$.

Пусть $\{t_n\} \to +\infty$. В силу сделанных предположений относительно x и y, последовательности $\{xt_n\}$ и $\{yt_n\}$ можно считать сходящимися, причем вторую – равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$. Таким образом, найдется число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup\{d(y(t+t_n), y(t+t_m)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \delta \tag{2.3.10}$$

и

$$\rho(xt_n, xt_m) < \delta \qquad (2.3.11)$$

при всех $m, n \geq n_0$. В силу выбора числа δ, из неравенств (2.3.11) и (2.3.10) следует при $m, n \geq n_0$

$$\sup\{\rho(x(t+t_n), x(t+t_m)) : t \in \mathbb{T}_+\} < \varepsilon. \qquad (2.3.12)$$

Из неравенства (2.3.12) и полноты пространства X вытекает, что $\{xt_n\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}_+$. Теорема доказана.

Теорема 2.3.8. *Если точка $y \in Y$ τ-периодична, x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1) *и множество $M = \{\pi(x, n\tau) : n \in \mathbb{N}\}$ р. уст. Л^+M, то решение x асимптотически почти периодично.*

Доказательство. Рассмотрим каскад $(X_y, \bar{\pi})$, порожденный положительными степенями отображения $\bar{\pi} : X_y \to X_y$, где $X_y = h^{-1}(y)$ и $\bar{\pi}(z) = \pi(z, \tau)$ при всех $z \in X_y$. Заметим, что точка $x \in X_y$ является уст. L^+ и в дискретной динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$. Кроме того, в условиях теоремы положительная полутраектория $\{\pi(x, n\tau) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ точки $x \in X_y$ в динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$ р. уст. Л$^+$ относительно себя и согласно теореме 1.3.8 точка x асимптотически почти периодична в динамической системе $(X_y, \bar{\pi})$, т.е. существует почти периодическая в $(X_y, \bar{\pi})$ точка $p \in X_y$ такая, что

$$\lim_{k \to +\infty} \rho(\pi(x, k\tau), \pi(p, k\tau)) = 0. \qquad (2.3.13)$$

Далее докажем, что из равенства (2.3.13) следует равенство (1.2.1). Допустим противное, тогда найдется $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}_+$ ($t_n \to +\infty$) и положительное число ε_0 такие, что

$$\rho(xt_n, pt_n) \geq \varepsilon_0.$$

Обозначим через k_n целую часть t_n при делении на τ, тогда $t_n = k_n\tau + \bar{t}_n$, где $\bar{t}_n \in [0, \tau[$ и, следовательно, $\{\bar{t}_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{t} = \lim\limits_{n \to +\infty} \bar{t}_n$. В силу уст. L^+ точки x и равенства (2.3.13) последовательности $\{\pi(x, k_n\tau)\}$ и $\{\pi(p, k_n\tau)\}$ можно считать сходящимися к одной и той же точке

$\bar{p}$. Заметим, что

$$\varepsilon_0 \le \rho(\pi(x,t_n),\pi(p,t_n)) = \rho(\pi(x,k_n\tau+\bar{t}_n),\pi(p,k_n\tau+\bar{t}_n)) = \rho(\pi(\pi(x,k_n\tau,\bar{t}_n),\pi(\pi(\bar{p},k_n\tau),\bar{t}_n) \le \rho(\pi(\pi(x,k_n\tau),\bar{t}_n),\pi(\bar{p},\bar{t}))+ \rho(\pi(\bar{p},\bar{t}),\pi(\pi(p,k_n\tau),\bar{t}_n)). \tag{2.3.14}$$

Переходя в неравенстве (2.3.14) к пределу, когда $n \to +\infty$, получим $\varepsilon_0 \le 0$. Последнее противоречит выбору числа ε_0. Требуемое утверждение доказано.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что из почти периодичности точки $p \in X_y$ в дискретной динамической системе $(X_y,\overline{\pi})$, следует что она почти периодична и в динамической системе $(X,\mathbb{T},\pi)$. Действительно, как известно **[2]**,**[34]**,**[43]**, точка $p \in X$ почти периодична тогда и только тогда, когда из любой последовательности $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ можно извлечь подпоследовательность $\{t_{k_n}\}$ такую, что $\{\pi(x,t_{k_n})\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}$.

Пусть $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ – произвольная последовательность. Тогда $t_n = l_n\tau + \bar{t}_n$, где $l_n \in \mathbb{N}$ и $\bar{t}_n \in [0,\tau[$. Последовательность $\{\bar{t}_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{t} = \lim\limits_{n\to+\infty}\bar{t}_n$. Так как точка $p \in X_y$ почти периодична в $(X_y,\overline{\pi})$, то из последовательности $\{l_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{l_{k_n}\}$ такую, что

$$\lim_{n,m\to+\infty}\sup\{\rho(\pi(p,l_{k_n}\tau+s),\pi(p,l_{k_m}\tau+s)) : s \in \mathbb{Z}\} = 0. \tag{2.3.15}$$

Из равенства (2.3.15) и равномерной интегральной непрерывности на $H(p) = \overline{\{\pi(p,t) : t \in \mathbb{T}\}}$ следует равенство

$$\lim_{n,m\to+\infty}\sup\{\rho(\pi(p,l_{k_n}\tau+s),\pi(p,l_{k_m}\tau+s)) : s \in \mathbb{T}\} = 0. \tag{2.3.16}$$

Учитывая полноту пространства X и равенство (2.3.16), заключаем, что последовательность $\{\pi(p,l_{k_n}\tau)\}$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}$ и, значит, последовательность $\{\pi(p,t_{k_n})\}$ также сходится равномерно по $t \in \mathbb{T}$. Теорема полностью доказана.

2.4. Асимптотически периодические решения

Теорема 2.4.1. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения (2.3.1) с асимптотически τ-периодической точкой y и $\bar{q} = \lim\limits_{k\to+\infty} \sigma(y, k\tau)$. Если уравнение*

$$h(x) = \bar{q} \tag{2.4.1}$$

допускает не более одного решения из ω_x, то решение x асимптотически τ-периодично.

Доказательство. Докажем сходимость последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$. Так, как x уст. L^+, то для сходимости последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$ достаточно, чтобы она содержала не более одной предельной точки. Пусть x_1 и x_2 – любые две предельные точки последовательности $\{\pi(x, k\tau)\}$. Тогда существуют последовательности $\{k_n^i\}$ $(i = 1, 2)$ такие, что $x_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(x, k_n^i \tau)$ $(i = 1, 2)$. Так как $\{\sigma(y, k\tau)\} \to \bar{q}$, то $h(x_1) = h(x_2) = \bar{q}$ и $x_1, x_2 \in \omega_x$. Согласно условию теоремы $x_1 = x_2$ и, следовательно, последовательность $\{\pi(x, k\tau)\}$ сходится и по теореме 1.4.1 точка x асимптотически τ-периодична.

Следствие 2.4.2. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1) *с асимптотически постоянной точкой y и $\bar{q} = \lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(y, t)$. Если уравнение* (2.4.1) *допускает не более одного решения из ω_x, то решение x асимптотически постоянно.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 2.4.1 и следствия 1.4.2.

Теорема 2.4.3. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1) *и множество X_y гомеоморфно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$. Если точка y является τ-периодической, то решение x асимптотически τ-периодично.*

Доказательство. Пусть точка y τ-периодична. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $X_q = S$ $(S = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z})$ при каждом $q \in \omega_y$. Согласно теореме 1.4.1 для асимптотической τ-периодичности точки x достаточно показать, что

$\{\pi(x,k\tau)\}$ сходится. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \pi(x,t+\tau) - \pi(x,t)$. Логически возможны два случая:

а. существует $\bar{t} \in \mathbb{T}$ такое, что $\varphi(\bar{t}) = 0$ и, следовательно, $\pi(x,\bar{t}+\tau) = \pi(x,\bar{t})$. Откуда следует, что $\pi(\bar{x},t+\tau) = \pi(\bar{x},t)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, где $\bar{x} = \pi(x,\bar{t})$, и, следовательно, x асимптотически τ периодична.

б. функция $\varphi(t)$ сохраняет знак. Нетрудно заметить, что в этом случае последовательность $\{\pi(x,k\tau)\}$ будет монотонной, следовательно, сходящейся. Теорема доказана.

Теорема 2.4.4. *Пусть x – уст. L^+ решение уравнения* (2.3.1) *с асимптотически τ-периодической точкой y. Если все решения из ω_x уравнения* (2.4.1) *разделены в ω_x, то решение x асимптотически $m_0\tau$-периодично, где m_0 – некоторое натуральное число).*

Доказательство. Согласно лемме 2.3.3 уравнение (2.4.1) имеет лишь конечное число различных решений $p_1, p_2, \dots, p_{n_0}$ из ω_x. Рассмотрим каскад $(X,\bar{\pi})$, порожденный положительными степенями отображения $\bar{\pi} : X \to X$, определенного равенством $\bar{\pi}(x) = \pi(x,\tau)$. Так как x – уст. L^+ решение уравнения (2.3.1), то траектория $\{\bar{\pi}^k x | k \in \mathbb{N}\} = \{\pi(x,k\tau) | k \in \mathbb{N}\}$ точки $x \in X$ в динамической системе $(X,\bar{\pi})$ относительно компактна. Заметим, что каждая предельная точка последовательности $\{\pi(x,k\tau)\}$ является решением уравнения (2.4.1) и принадлежит ω_x и, в силу сказанного выше, она содержится в множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$. Отсюда следует, что ω-предельное множество $\bar{\omega}_x$ точки x в динамической системе $(X,\bar{\pi})$ состоит из конечного числа точек. Пусть $\bar{\omega}_x = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m_0}\}$ ($m_0 \le n_0$). Тогда согласно теореме 1.4.6 точка x асимптотически m_0-периодична в системе $(X,\bar{\pi})$ и, следовательно, последовательность $\{\pi(x,m_0 k\tau)\}$ сходится. Согласно теореме 1.4.1 точка x асимптотически $m_0\tau$-периодична в системе $(X,\mathbb{T},\pi)$. Теорема доказана.

2.5. Гомоклинические и гетероклинические точки

Всюду в этом параграфе мы будем считать, что $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{P}(X)$ множество всех устойчивых по Пуассону точек динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, т.е. $\mathcal{P}(X) = \{x \mid x \in X, x \in \omega_x \cap \alpha_x\}$, где $\alpha_x = \bigcap\limits_{t \le 0} \overline{\bigcup\limits_{\tau \le t} \pi(x, \tau)}$.

Точку $x \in X$ (движение $\pi(x, \cdot)$) называют гетероклинической (гетероклиническим), если существуют точки $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(X)$ такие, что $x \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$, где $W^s(p) = \{x | x \in X, \lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, pt) = 0\}$ и $W^u(p) = \{p \in X | \lim\limits_{t \to -\infty} \rho(xt, pt) = 0\}$. При этом, если $p_1 = p_2 = p$, то точку x называют гомоклинической.

Гетероклиническую (гомоклиническую) точку удобно обозначать символом $(x; p_1, p_2)$ $((x; p))$, где p_1 и p_2 $(p_1 = p_2 = p)$ – устойчивые по Пуассону точки, фигурирующие в определении гетероклинической (гомоклинической) точки x.

Отметим, что точка x является гетероклинической, если она асимптотически устойчива по Пуассону в положительном и отрицательном направлениях, т.е. двояко асимптотически устойчива по Пуассону.

Согласно следствию 1.2.4, если точки p_1 и p_2, фигурирующие в определении гетероклинической точки $(x; p_1, p_2)$, почти периодичны, то они определяются однозначно. Если же они рекуррентны, то, вообще говоря, определяются неоднозначно (см., например, [**2**], стр.157).

Обозначим через $\mathfrak{L}_{x,p}^{\pm\infty} = \{\{t_n\} \mid \{t_n\} \in \mathfrak{L}_{x,p},\ t_n \to \pm\infty\}$, $\mathfrak{L}_x^{\pm\infty} = \cup\{\mathfrak{L}_{x,p}^{\pm\infty} \mid p \in X\}$, $\mathfrak{L}_x = \{\{t_n\} \mid |t_n| \to +\infty,\ \{t_n\} \in \mathfrak{M}_X\}$ и $\mathfrak{L}_{x_0}^{\infty} = \mathfrak{L}_x^{+\infty} \cup \mathfrak{L}_x^{-\infty}$.

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ – динамические системы, $x \in X$, $y \in Y$. Будем говорить, что точка x сравнима в пределе по характеру возвращаемости в положительном (отрицательном) направлении с точкой y, если $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$ $(\mathfrak{L}_y^{-\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{-\infty})$. Если x сравнима в пределе с y как в положительном, так и в отрицательном направлении, то скажем, что x сравнима в пределе с y по характеру возвращаемости. Наконец, если $\mathfrak{L}_y \subseteq \mathfrak{L}_x$, то будем говорить, что x сильно сравнима в пределе с y.

Замечание 2.5.1. *Если точка x сильно сравнима в пределе с точкой y, то она сравнима в пределе с y. Обратное, вообще говоря, не имеет места.*

Теорема 2.5.2. *Пусть точка y устойчива по Лагранжу, тогда:*

1) *Если $(y; q_1, q_2)$ – гетероклиническая точка и x сравнима в пределе с y, то существуют точки $p_1, p_2 \in P(X)$ такие, что $(x; p_1, p_2$ является гетероклинической, причем точка p_1 (p_2) равномерно согласована с точкой q_1 (q_2).*
2) *Если $(y; q)$ – гомоклиническая точка и x сильно сравнима в пределе с точкой y, то существует $p \in \mathcal{P}(X)$ такая, что $(x; p)$ является гомоклинической точкой, причем точка p равномерно согласована с q.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathfrak{L}_y^{\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{\infty}$ и $y \in W^u(q_1) \cap W^s(q_2)$. Тогда $\mathfrak{L}_y^{\pm\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{\pm\infty}$ и согласно следствию 2.2.2 существуют непрерывные отображения

$$h_1 : \alpha_y \to \alpha_x \quad \text{и} \quad h_2 : \omega_y \to \omega_x$$

такие, что $x \in W^s(p_1) \cap W^u(p_2), h_1(\sigma(q,t)) = \pi(h_1(q), t)$ $(q \in \alpha_y, t \in \mathbb{T})$ и $h_2(\sigma(q,t)) = \pi(h_2(q), t)$ $(q \in \omega_y, t \in \mathbb{T})$, где $p_i = h_i(q_i) (i = 1, 2)$.

В силу компактности $H(y)$ отображения h_1 и h_2 равномерно непрерывны и, следовательно, точка p_i равномерно согласована с q_i $(i = 1, 2)$.

2. Пусть $\mathfrak{L}_y \subseteq \mathfrak{L}_x$ и $y \in W^u(q) \cap W^s(q)$, тогда $\mathfrak{L}_y^{\pm\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{\pm\infty}$ и согласно первому утверждению теоремы точка x является гетероклинической, т. е. существуют $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(X)$ такие, что $x \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$, причем p_1, p_2 равномерно сравнимы с q. Покажем,что $p_1 = p_2$. Для этого выберем последовательность $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_y$, для которой $t_n \to \pm\infty$ при $n \to \pm\infty$ и $\sigma(q, t_n) \to q$ при $n \to \pm\infty$.

Заметим, что $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_x \cap \mathfrak{L}_{p_1} \cap \mathfrak{L}_{p_2}$, $xt_n \to p_1$ при $n \to -\infty$ и $xt_n \to p_2$ при $n \to +\infty$. Так, как $\{t_n\} \in \mathfrak{L}_x$, то последовательность $\{xt_n\}$ является сходящейся и, следовательно, $p_1 = p_2$. Теорема доказана.

Пусть $(y; q_1, q_2)$ – гетероклиническая точка, если точки q_1 и q_2 постоянны (периодичны, почти периодичны, рекуррентны), то точку y назовем двояко асимптотически постоянной (периодической, почти периодической, рекуррентной).

Если $(y; q)$ – гомоклиническая точка и q стационарна (периодична, почти периодична, рекуррентна), то y назовем стационарной (периодической, почти периодической, рекуррентной) гомоклинической точкой.

Из теоремы 2.5.2 вытекает следующее

Следствие 2.5.3. *Пусть $y \in Y$ устойчива по Лагранжу, тогда:*

1) *Если $(y; q_1, q_2)$ двояко асимптотически постоянна (периодична, почти периодична, рекуррентна) и x сравнима в пределе с y, то x также двояко асимптотически стационарна (периодична, почти периодична, рекуррентна).*
2) *Если $(y; q)$ – стационарная (периодическая, почти периодическая, почти периодическая, рекуррентная) гомоклиническая точка и x сильно сравнима в пределе с y, то x – стационарная (периодическая, почти периодическая, рекуррентная) гомоклиническая точка.*

Пусть $h : X \to X$ – гомоморфизм динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ в $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$. Рассмотрим операторное уравнение

$$h(x) = y\,, \tag{2.5.1}$$

где $y \in Y$. Наряду с уравнением (2.5.1) рассмотрим семейство "предельных"уравнений

$$h(x) = q \quad (q \in \Delta_y), \tag{2.5.2}$$

где $\Delta_y = \alpha_y \cup \omega_y$.

Теорема 2.5.4. *Пусть $y \in Y$ устойчива по Лагранжу и $x \in X$ – устойчивое по Лагранжу решение уравнения* (2.5.1), *тогда:*

1) *Если выполнены следующие условия:*
   a. *каково бы ни было $q \in \omega_y$ уравнение* (2.5.2) *имеет не более одного решения из ω_x;*

  б. *каково бы ни было* $q \in \alpha_y$ *уравнение* (2.5.2) *имеет не более одного решения из* α_x,

  то решение x *сравнимо в пределе с* y.

2) *Если уравнение* (2.5.2) *имеет не более одного решения из* Δ_x *каково бы ни было* $q \in \Delta_y$, *то решение* x *сильно сравнимо в пределе с* y.

Доказательство. Первое утверждение теоремы, по существу, вытекает из теоремы 2.3.1. Второе утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 2.3.1, поэтому мы его здесь не проводим.

Замечание 2.5.5. *Пусть точка* y *устойчива по Лагранжу и* x *– устойчивое по Лагранжу решение уравнения* (2.5.1), *тогда:*

1) *Если выполнено первое условие теоремы* 2.5.4 *и* y *двояко асимптотически постоянна (периодична, почти периодична, рекуррентна), то* x *также двояко асимптотически постоянна (периодична, почти периодична, рекуррентна).*
2) *Если выполнено второе условие теоремы* 2.5.4 *и* y *– стационарная (периодическая, почти периодическая, рекуррентная) гомоклиническая точка, то* x *также является стационарной (периодической, почти периодической, рекуррентной) гомоклинической точкой.*

Теорема 2.5.6. *Пусть* x *– устойчивое по Лагранжу решение уравнения* (2.5.1) *и* y *двояко асимптотически постоянна* (τ*-периодична, почти периодична, рекуррентна) и каково бы ни было* $q \in \Delta_y$ *решения уравнения* (2.5.2) *из* Δ_x *разделены в* Δ_x, *тогда решение* x *двояко асимптотически постоянно* ($m_0\tau$*-периодично для некоторого натурального* m_0, *почти периодично, рекуррентно).*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теорем 2.3.6 и 2.4.4.

2.6. Асимптотические почти периодические системы с конвергенцией

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ – динамическая система на X. Систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют [**71**, гл.1] поточечно диссипативной, если существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, K) = 0 \tag{2.6.1}$$

при всех $x \in X$. Если при этом равенство (2.6.1) имеет место равномерно по x на компактах из X, то систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют компактно диссипативной.

Если пространство X локально компактно, то из поточечной диссипативности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ вытекает ее компактная диссипативнсть [**71**, гл.1].

Если динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то существует максимальное компактное инвариантное множество J, называемое центром Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$, которое является орбитально устойчивым глобальным аттрактором [**83**] системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $J = D\Omega_X$ [**64**],[**71**], где $\Omega_X = \overline{\cup\{\omega_x \mid x \in X\}}$ и $D\Omega_X$ – пролонгация [**83**] множества Ω_X.

Замечание 2.6.1. 1) *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ – две компактно диссипативные динамические системы и $h : X \to Y$ – гомоморфизм $(X, \mathbb{T}, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$, тогда $J_Y \subseteq h(J_X)$, где J_X (J_Y) – центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$ $((Y, \mathbb{T}, \sigma))$.*

2) *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система и $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ компактно диссипативны, тогда $h : J_X \to J_Y$ является гомеоморфизмом, если h взаимно однозначно, т.е. $X_y \cap J_X$ состоит ровно из одной точки каково бы ни было $y \in J_Y$, где $X_y = \{x \mid x \in X, h(x) = y\}$.*

Неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ называем конвергентной, если выполнены следующие условия:

1. $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ компактно диссипативны.
2. $J_X \cap X_y$ содержит ровно одну точку, которую обозначим через x_y (т.е. $J_X \cap X_y = \{x_y\}$), каково бы ни было $y \in J_Y$.

Всюду ниже, в этом и в следующем параграфах, мы будем предполагать, что $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ компактно диссипативна и J_Y минимально (т.е. всякая траектория из J_Y плотна в J_Y). Это имеет место, если существует асимптотически почти периодическая (асимптотически рекуррентная) точка $y_0 \in Y$ такая, что $Y = H^+(y_0) = \overline{\{y_0 t \mid t \in \mathbb{T}_+\}}$. Очевидно, при этом $J_Y = \omega_{y_0}$.

Лемма 2.6.2. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ – конвергентная неавтономная динамическая система.*
2) a) *$\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ при любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $h(x_1) = h(x_2)$;*
   b) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ($h(x_1) = h(x_2)$ и $x_1, x_2 \in J_X$ следует $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$.*

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Установим сперва справедливость a). Если допустить, что a) не имеет места, то найдутся $\varepsilon_0 > 0, y_0 \in Y, x_1, x_2 \in X_{y_0}$ и $t_k \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_1 t_k, x_2 t_k) \geq \varepsilon. \tag{2.6.2}$$

Не умаляя общности рассуждений, последовательности $\{x_i t_k\}$ $(i = 1, 2)$ и $\{y_0 t_k\}$ можно считать сходящимся. Положим $\overline{x}_i = \lim\limits_{k \to +\infty} x_i t_k$ $(i = 1, 2)$ и $\overline{y} = \lim\limits_{n \to +\infty} y_0 t_n$. Заметим, что $\overline{y} \in J_Y$ и $\overline{x}_i \in J_X$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, $h(\overline{x}_1) = \lim\limits_{k \to +\infty} h(x_1) t_k = \lim\limits_{k \to +\infty} h(x_2) t_k = h(\overline{x}_2) = \lim\limits_{k \to +\infty} y_0 t_k = \overline{y}$ и, следовательно, $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in J_X \cap X_{\overline{y}}$. В силу конвергентности $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ имеем $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$, что противоречит (2.6.2). Утверждение a) доказано.

Докажем теперь b). Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что b) не имеет места. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $\delta_n \downarrow 0, \{x_k^i\}$ $(i = 1, 2)$, и $t_k \to +\infty$ такие, что $\rho(x_k^1, x_k^2) < \delta_k$ $(x_k^i \in J_X, h(x_k^1) = h(x_k^2))$ и

$$\rho(x_k^1 t_k, x_k^2 t_k) \geq \varepsilon_0. \tag{2.6.3}$$

В силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ последовательности $\{x_k^i\}$ и $\{x_k^i t_k\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $x_0 = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k^1 = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k^2$ и $x^i = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k^i t_k$ $(i = 1, 2)$. Заметим, что $x_i \in J_X$ (см. [**55**], [**64**]). Кроме того, $h(x^1) = \lim\limits_{k\to+\infty} h(x_k^1)t_k = \lim\limits_{k\to+\infty} h(x_k^2)t_k = h(x^2)$, т.е. существует $\overline{y} \in J_Y$ $(\overline{y} = h(x^1) = h(x^2))$ такое, что $x^1, x^2 \in J_X \cap X_{\overline{y}}$. В силу конвергентности $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ имеем $x^1 = x^2$, что противоречит (2.6.3).

Обратно. Пусть выполнено 2). Покажем, что имеет место 1). Если допустить, что это не так, то найдутся $y_0 \in J_Y$ и $x_1, x_2 \in J_X \cap X_{y_0}$ $(x_1 \neq x_2)$. Согласно теореме 1 [**59**] точки x_1 и x_2 совместно рекуррентны и, следовательно, функция $\varphi(t) = \pi(x_1 t, x_2 t)$ является рекуррентной. С другой стороны, по условию леммы $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Откуда следует, что $\varphi(t) \equiv 0$. Последнее противоречит нашему допущению. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 2.6.3. *Для того чтобы неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}\pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *Каков бы ни был компакт $K \subseteq X$ множество $\Sigma_K^+ = \{xt \ : \ x \in K, t \in \mathbb{T}_+\}$ относительно компактно.*
2) *Для любых $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subseteq X$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(h(x_1) = h(x_2)$ и $x_1, x_2 \in K)$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.*
3) *$\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ при всех $x_1, x_2 \in X$ $(h(x_1) = h(x_2))$.*

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго и третьего условий вытекает из леммы 2.6.2.

Обратно. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы и $x_0 \in X$. Согласно условию 1) множество $\Sigma_{x_0}^+$ относительно компактно и, следовательно, $\omega_{x_0} \neq \varnothing$ компактно и инвариантно. Так как $h(\omega_{x_0}) \subseteq \Omega_Y \subseteq J_Y$ и J_Y минимально, то $h(\omega_{x_0}) = J_Y$. Положим $M = \omega_{x_0}$, тогда $M_y = N \cap X_y$ $(y \in J_Y)$ непусто. Покажем теперь, что для любого $x \in X$ имеет место равенство $\omega_x = M$. Обозначим через $N = \omega_x \cup \omega_{x_0}$. Также как и в лемме 2.6.2 доказывается, что $N_y = N \cap X_y$ состоит ровно из одной точки для произвольного $y \in J_Y$. Так как $h(\omega_x) = h(\omega_{x_0}) = h(N) = J_Y$, то $\omega_x \cap X_y = \omega_{x_0} \cap X_y = N \cap X_y$ при всех $y \in J_Y$ и, следовательно, $\omega_x = \omega_{x_0}$. Таким образом $\omega_x = M$ при всех $x \in X$ и, следовательно, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна.

Пусть теперь $K \subseteq X$ – произвольный компакт. Согласно условию 1) Σ_K^+ относительно компактно, и согласно [**55**], [**54**] $\Omega(K) \neq \varnothing$ компактно, инвариантно и

$$\lim_{t \to +\infty} sup\{\rho(xt, \Omega(K)) \ : \ x \in K\} = 0,$$

где

$$\Omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \pi^\tau K}.$$

Также как и в лемме 2.6.2 показывается, что $(N \cup \Omega(K)) \cap X_y$ состоит ровно из одной точки для произвольного $y \in J_Y$. И так как $h(\Omega((K)) = J_Y$, то $\Omega(K) = M$. Таким образом, система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и $\Omega(K) = M$ для любого компакта $K \subseteq M$, и следовательно, $J_X = M$. Так как M_y состоит ровно из одной точки каково бы ни было $y \in J_Y$, то неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (T\mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ конвергентна. Теорема доказана.

Следствие 2.6.4. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально компактнна (т.е. для любого $x \in X$ существуют $\delta_x > 0$ и $l_x > 0$ такие, что $\pi^t B(x, \delta_x)$ относительно компактно при всех $t \geq l_x$). Для того чтобы неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:*

1) *Для любого $x \in X$ множество Σ_x^+ относительно компактно.*
2) *Для любых $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subseteq X$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(h(x_1) = h(x_2)$ и $x_1, x_2 \in K)$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.*
3) *$\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ при всех $x_1, x_2 \in X$ $(h(x_1) = h(x_2))$.*

Доказательство. Необходимость условия 1) очевидна, а необходимость условий 2) и 3) следует из леммы 2.6.2. Что касается достаточности, то она вытекает из теоремы 2.6.3. Необходимо лишь отметить, что из условий 1) – 3) следует поточечная диссипативность $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и в силу локальной компактности $(X, \mathbb{T}, \pi)$, она, согласно [**55**], является компактно диссипативной и, следовательно, выполнено условие 1) теоремы 2.6.3.

Замечание 2.6.5. *Если пространство X локально компактно, то система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально компактна. Очевидно, обратное утверждение не имеет места.*

Теорема 2.6.6. *Для того чтобы неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *Σ_K^+ относительно компактно каков бы ни был компакт $K \subseteq X$;*
2) *Каждая полутраектория Σ_x^+ асимптотически устойчива, т.е.*
   а) *для любых $\varepsilon > 0$ и $\overline{x} \in X$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \overline{x}) > 0$ такое, что $\rho(x, \overline{x}) < \delta$ $(h(x) = h(\overline{x}))$ влечет $\rho(xt, \overline{x}t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$,*
   б) *существует $\gamma(\overline{x}) > 0$ такое, что $\rho(x, \overline{x}) < \gamma(\overline{x})$ $(h(x) = h(\overline{x}))$ влечет $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, \overline{x}t) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ конвергентна. Условие 1) очевидно. Покажем, что каждая полутраектория асимптотически устойчива. Если допустить, что это не так, то существуют $x_0 \in X, \varepsilon_0 > 0, x_k \to x_0$ $(h(x_k) = h(x_0))$ и $t_k \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_k t_k, x_0 t_k) \geq \varepsilon_0 \,. \tag{2.6.4}$$

Так как $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то последовательности $\{x_k t_k\}$ и $\{x_0 t_k\}$ можно считать сходящимися. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{k \to +\infty} x_k t_k$ и $\overline{\overline{x}} = \lim\limits_{k \to +\infty} x_0 t_k$. Из неравенства (2.6.4) следует, что $\overline{x} \neq \overline{\overline{x}}$. Заметим, что $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in D\Omega_X = J_X$. Не умаляя общности рассуждений, $\{y_0 t_k\}$ можно считать сходящейся. Положим

$\overline{y} = \lim\limits_{k\to+\infty} y_0 t_k$, тогда $h(\overline{x}) = \lim\limits_{k\to+\infty} h(x_k)t_k = \lim\limits_{k\to+\infty} y_0 t_k = \overline{y}$ и $h(\overline{\overline{x}}) = \lim\limits_{k\to+\infty} h(x_0)t_k = \lim\limits_{k\to+\infty} y_0 t_k = \overline{y}$. Отсюда следует, что $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in J_X \cap X_{\overline{y}}$ ($\overline{y} \in J_Y$). С другой стороны, в силу конвергентности $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ множество $J_X \cap X_{\overline{y}}$ содержит не более одной точки. Следовательно, $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$. Последнее противоречит (2.6.4) и тем самым асимптотическая устойчивость каждой полутраектории Σ_x^+ доказана. Что касается условия б), то оно вытекает из леммы 2.6.2.

Обратно. Прежде всего покажем, что, если $\overline{x} \in X_{\overline{y}}$ ($\overline{y} = h(\overline{x})$), то

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, \overline{x}t) = 0 \tag{2.6.5}$$

при всех $x \in X_{\overline{y}}$. Допустим, что это не так. Обозначим через $G_{\overline{y}}$ множество всех точек $x \in X_{\overline{y}}$, для которых имеет место (2.6.5). В силу нашего допущения $G_{\overline{y}} \neq X_{\overline{y}}$. Отметим, что в условиях теоремы $G_{\overline{y}}$ открыто в $X_{\overline{y}}$. Положим $\Gamma_{\overline{y}} = \partial G_{\overline{y}}$ и пусть $\overline{\overline{x}} \in \Gamma_{\overline{y}}$. Тогда $B(\overline{\overline{x}}, \gamma(\overline{\overline{x}})) \cap G_{\overline{y}} \neq \varnothing$ и $B(\overline{\overline{x}}, \gamma(\overline{\overline{x}})) \cap (X_{\overline{y}} \setminus G_{\overline{y}}) \neq \varnothing$. Нетрудно заметить, что эти соотношения совместно выполняться не могут и, следовательно, $\Gamma_{\overline{y}} = \varnothing$ для любого $\overline{y} \in Y$.

Покажем теперь, что для произвольных компакта $K \subseteq X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ($h(x_1) = h(x_2)$ и $x_1, x_2 \in K$) влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$. Допустим противное. Тогда существуют компакт $K_0 \subseteq X, \varepsilon_0 > 0, \delta_n \downarrow 0, \{x_k^i\} \subseteq K_0$ ($i = 1, 2, h(x_k^1) = h(x_k^2)$) и $t_k \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_k^1, x_k^2) < \delta_k \quad \rho(x_k^1 t_k, x_k^2 t_k) \geq \varepsilon_0\,. \tag{2.6.6}$$

В силу компактности K_0 последовательности $\{x_k^i\}$ ($i = 1, 2$) считаем сходящимися. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k^1 = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k^2 \in K_0$. Так как полутраектория $\Sigma_{\overline{x}}^+$ асимптотически устойчива, то для $\frac{\varepsilon_0}{3}$ и $\overline{x}$ существует $\delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \overline{x}) > 0$ такое, что $\rho(x, \overline{x}) < \delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \overline{x})$ ($h(x) = h(\overline{x})$) влечет $\rho(xt, \overline{x}t) < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$. В виду того, что $x_k^i \to \overline{x}$ ($i = 1, 2$), при $k \to +\infty$, существует $\overline{k} \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_k^i, \overline{x}) < \delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \overline{x})$ при всех $k \geq \overline{k}$ и, следовательно, $\rho(x_k^i t, \overline{x}t) < \frac{\varepsilon_0}{3}$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$. Из последнего неравенства получаем

$$\rho(x_k^1 t, x_k^2 t) \le \frac{2\varepsilon_0}{3} < \varepsilon_0 \tag{2.6.7}$$

при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и $k \ge \overline{k}$. Так как неравенство (2.6.6) противоречит неравенству (2.6.7), то нужное утверждение доказано. Теперь для завершения доказательства теоремы 2.6.6 достаточно сослаться на теорему 2.6.3.

Имеет место следующая

Теорема 2.6.7. *Пусть точка $y_0 \in Y$ асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна), причем $Y = H^+(y_0)$ и неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ конвергентна. Тогда:*

1) *Центр Левинсона J_X динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ гомеоморфен ω_{y_0} и, следовательно, является минимальным множеством, состоящим из точки покоя (τ-периодических движений, почти периодических движений, рекуррентных движений).*
2) *Все точки $x \in X$ асимптотически стационарны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны) и $\omega_x = J_X$ при всех $x \in X$ и, следовательно, $W^s(X) \cap J_X \neq \varnothing$.*
3) *Для любых $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subseteq X$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и всех $x_1, x_2 \in K$, для которых $h(x_1) = h(x_2)$.*

Доказательство. В условиях теоремы динамическая система $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$, очевидно, компактно диссипативна и $J_X = \omega_{y_0}$ и, если $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ конвергентна, то J_X и $J_Y = \omega_{y_0}$ гомеоморфны и, следовательно, J_X – минимальное множество, состоящее из точки покоя (τ-периодических движений, почти периодических движений, рекуррентных движений).

Так как $\omega_x \subseteq J_X$ для любого $x \in X$, то в силу минимальности J_X $\omega_x = J_X$. Так, как $J_X \cap X_y$ состоит ровно из одной точки при любом $y \in J_Y = \omega_{y_0}$ и $\omega_{h(X)} = \omega_{y_0}$, то согласно теореме 2.3.1 точка x сравнима в пределе с $y = h(x)$. Так как всякая точка $y \in H^+(y_0) = Y$ асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна), то из следствия 2.3.2 вытекает, что этим же свойством обладает и точка x.

Третье утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.6.3.

2.7. Некоторые признаки конвергентности

Множество $M \subseteq X$ называют равномерно устойчивым относительно гомоморфизма $h : X \to Y$ ($p.y.h$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$ и всех $x_1, x_2 \in M$, для которых $h(x_1) = h(x_2)$. Если X $p.y.h$, то динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют равномерно устойчивой относительно гомоморфизма h.

Лемма 2.7.1. *Пусть гомоморфизм $h : X \to Y$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Существует непрерывное сечение $\gamma : Y \to X$, т.е. существует непрерывное отображение $\gamma : Y \to X$, для которого $h \circ \gamma = Id_Y$.*
2) $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ *при всех* $x_1, x_2 \in X$ $(h(x_1) = h(x_2))$.

Тогда:

1) *Если $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ поточечно диссипативна, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна, причем Ω_X и Ω_Y гомеоморфны.*
2) *Если $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ компактно диссипативна и любой компакт $K \subseteq X$ равномерно устойчиво относительно h, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, причем J_X и J_Y гомеоморфны и, следовательно, $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h \rangle$ конвергентна.*

Доказательство. Пусть $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ поточечно диссипативна. Тогда $\Omega_Y = \overline{\cup \{\omega_y | y \in Y\}}$ – непустое компактное инвариантное множество и, следовательно, $M = \gamma(\Omega_Y) \subseteq \Omega_X$ также непусто, компактно и инвариантно. Для $x \in X$ и $y = h(x)$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt, \gamma(y)t) = 0$. Следовательно, Σ_x^+ относительно компактно. Кроме того, $\omega_X \subseteq \omega_{\gamma(Y)} \subseteq \gamma(\Omega_Y) = M$. Отсюда следует, что $\Omega_X \subseteq M$. Таким образом, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна и $\gamma(\Omega_Y) = \Omega_X$. Так как $\gamma : \Omega_Y \to \Omega_X$ разделяет точки и Ω_Y компактно, то Ω_Y и Ω_X гомеоморфны.

Пусть $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ компактно диссипативна. Тогда, согласно сказанному выше, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна. Положим $M = \gamma(J_Y)$ и покажем, что M орбитально устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0, x_k \to x_0 \in M$ и $t_k \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_k t_k, M) \geq \varepsilon_0 \,. \tag{2.7.1}$$

Заметим, что $h(x_k) = y_k \to y_0 = h(x_0) \in h(M) = h \circ \gamma(J_Y) = J_Y$ и в силу компактной диссипативности $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$ последовательность $\{y_k t_k\}$ можно считать сходящейся. Положим $y = \lim\limits_{k\to+\infty} y_k t_k$. Ясно, что $y \in J_Y$ и $\gamma(y) = \lim\limits_{k\to+\infty} \gamma(h(x_k))t_k$. Так как $\gamma : J_Y \to \gamma(J_Y) = M$ разделяет точка и $h \circ \gamma = Id_Y$, то $\gamma : J_Y \to M$ есть гомеоморфизм, причем $\gamma \circ h(x) = x$ при всех $x \in M$ и, следовательно, $\gamma(h(x_k)) \Rightarrow \gamma(h(x_0)) = x_0 \in M$. Из последнего соотношения следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \rho(x_k, \gamma \circ h(x_k)) = 0 \,. \tag{2.7.2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ – число из условия равномерной устойчивости компакта $K = \overline{\{x_k\}} \cup \overline{\gamma \circ h\{x_k\}}$ относительно гомоморфизма h. Из (2.7.2) следует, что при достаточно больших k имеет место $\rho(x_k, \gamma \circ h(x_k)) < \delta$ и, следовательно, $\rho(x_k t, (\gamma \circ h)(x_k)t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$. В частности,

$$\rho(x_k t_k, \gamma \circ h(x_k)t_k) < \varepsilon \tag{2.7.3}$$

при достаточно больших k. Из (2.7.3) в силу произвольности ε следует, что $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k t_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \gamma \circ h(x_k)t_k = \gamma(y) \in M$. Последнее противоречит (2.7.1). Полученное противоречие показывает, что M орбитально устойчиво. Итак, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна, $\Omega_X \subseteq M$, M непусто, компактно, инвариантно и орбитально устойчиво. Согласно лемме 7 из [**64**] $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и $J_X \subseteq M$. Для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на лемму 2.6.2 и замечание 2.6.1.

Пусть $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ – групповая динамическая система, $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ – полугруповая динамическая система и $h : X \to Y$ – гомоморфизм $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ в $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ и обозначим через $\Gamma(Y, X)$ множество всех непрерывных сечений гомоморфизма h. Равенством

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{y \in Y} \rho(\gamma_1(y), \gamma_2(y)) \tag{2.7.4}$$

определяется полная метрика на $\Gamma(Y, X)$.

Положим $X \bigotimes X = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X, h(x_1) = h(x_2)\}$ и пусть $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ – отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $a(\rho(x_1, x_2)) \le V(x_1, x_2) \le b(\rho(x_1, x_2))$ при всех $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$, где $a, b \in \mathcal{K}$ и $Ima = Imb$ ($\mathcal{K} = \{a | a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a$ непрерывна, строго возрастает и $a(0) = 0\}$).

б) $V(x_1, x_2) = V(x_2, x_1)$ при всех $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$.

в) $V(x_1, x_2) \le V(x_1, x_3) + X(x_3, x_2)$ при всех $x_1, x_2, x_3 \in X$ таких, что $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3)$.

Из условий а) – в) следует, что V на каждом слое $X_y = h^{-1}(y)$ задает метрику, топологически эквивалентную ρ. Имеет место следующая

Лемма 2.7.2. [**56**] *Пусть $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям а) – в). Тогда равенством*

$$p(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{y \in Y} V(\gamma_1(y), \gamma_2(y))$$

определяется на $\Gamma(Y, X)$ полная метрика, топологически эквивалентная (2.7.4).

Лемма 2.7.3. *Пусть $\langle (X, S_+, \pi), (Y, S, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система, для которой выполнены следующие условия:*

1) $\Gamma(Y, X) \neq \varnothing$.

2) *Существует функция* $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая условиям а) – в) и*

г) $V(x_1t, x_2t) \leq Ne^{-\gamma t}V(x_1, x_2)$ $(\forall (x_1, x_2) \in X \bigotimes X,\ t \in \mathbb{S}_+)$, *где* $N, \gamma > 0$.

Тогда существует единственное инвариантное непрерывное сечение h, *т.е. существует* $\gamma \in \Gamma(Y, X)$ *такое, что* $\pi^t \circ \gamma = \gamma \circ \sigma^t$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_+$.

Доказательство. Обозначим через $S^t : \Gamma(Y, X) \to \Gamma(Y, X)$ отображение, определенное равенством $(S^t\gamma)(y) = \pi^t\gamma(\sigma^{-t}y)$ при всех $t \in \mathbb{S}_+, \gamma \in \Gamma(Y, X)$ и $y \in Y$. Легко проверить, что $\{S^t\}_{t\geq 0}$ – коммутативная полугруппа относительно композиции. Заметим, что

$$p(S^t\gamma_1, S^t\gamma_2) = \max_{y\in Y} V(\pi^t\gamma_1(\sigma^{-t}y), \pi^t\gamma_2(\sigma^{-t}y)) \leq$$
$$Ne^{-\gamma t}\max_{y\in Y} V(\gamma_1(\sigma^{-t}y), \gamma_2(\sigma^{-t}y)) \leq Ne^{-\gamma t}p(\gamma_1, \gamma_2). \quad (2.7.5)$$

Из неравенства (2.7.5) следует, что отображения S^t при достаточно больших $t \in \mathbb{S}_+$ являются сжатиями. Отсюда, в силу коммутативности $\{S^t\}_{t\geq 0}$, следует существование общей неподвижной точки γ полугруппы $\{S^t\}_{t\geq 0}$, которая является инвариантным сечением h, т.е. $\pi^t \circ \gamma = \gamma \circ \sigma^t$ при всех $t \in \mathbb{S}_+$.

Теорема 2.7.4. *Пусть неавтономная динамическая система* $\langle (X, S_+, \pi), (Y, S, \sigma), h\rangle$ *удовлетворяет условиям:*

1) $\Gamma(Y, X) \neq \varnothing$.
2) *Существует функция* $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая условиям а) – г).*

Тогда $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ *компактно диссипативна и* J_X *и* J_Y *гомеоморфны, следовательно,* $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h\rangle$ *конвергентна.*

Доказательство. Заметим, что для $x_1, x_2 \in X$ $(h(x_1) = h(x_2)$

$$a(\rho(x_1t, x_2t)) \leq V(x_1t, x_2t) \leq$$
$$Ne^{-\gamma t}V(x_1, x_2) \leq Ne^{-\gamma t}b(\rho(x_1, x_2)),$$

поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} a(\rho(x_1t, x_2t)) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x_1t, x_2t) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) = b^{-1}(N^{-1}a(\varepsilon))$. Поскольку $\rho(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)$ ($h(x_1) = h(x_2)$) влечет $\rho(x_1t, x_2t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{S}_+$, то система $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ равномерно устойчива относительно h. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на леммы 2.7.1 и 2.7.3.

Замечание 2.7.5. Лемма 2.7.2 и теорема 2.7.4 имеют место и в том случае, когда Y некомпактно. В этом случае через $\Gamma(Y, X)$ нужно обозначить множество всех непрерывных ограниченных сечений.

Следствие 2.7.6. *Пусть $y_0 \in Y$ асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и $Y = H(y_0)$. Если для динамической системы $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h\rangle$ выполнены условия теоремы* 2.7.4, *то она конвергентна и кроме того:*

1) *Центр Левинсона J_X динамической системы $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ гомеоморфен ω_{y_0} и состоит из точки покоя (τ-периодических движений, почти периодических движений, рекуррентных движений).*
2) *Все точки $x \in X$ асимптотически стационарны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны).*
3) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ влечет $\rho(x_1t, x_2t) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{S}_+$ и $x_2, x_2 \in X$, для которых $h(x_1) = h(x_2)$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теорем 2.7.4, 2.6.6 и замечания 2.7.5.

В заключении отметим, что конвергентные динамические системы в определенном смысле являются простейшими диссипативными динамическими системами. Если неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_+, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ конвергентна и $J_X(J_Y)$ – центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_+, \pi)((Y, \mathbb{T}, \sigma))$, то, J_X и J_Y гомеоморфны. Отсюда видно, что, с одной стороны, центр

Левинсона конвергентной системы поддается достаточно полному описанию, с другой стороны, он может быть весьма сложным.

Глава 3

Асимптотические почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений

3.1. Некоторые неавтономные динамические системы

Пример 3.1.1. Пусть E^n – n-мерное вещественное или комплексное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \tag{3.1.1}$$

где $f \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$. Наряду с уравнением (3.1.1) рассмотрим и его H-класс [**2**],[**4**],[**11**],[**27**], [**75**],[**79**]

$$\frac{dv}{dt} = g(t,v), \tag{3.1.2}$$

где $g \in H(f) = \overline{\{f,\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ и $f,\tau(t,u) = f(t+\tau,u)$. В этом примере будем предполагать, что функция f регулярна, т.е. для каждого уравнения (3.1.2) выполнено условие существования, единственности и нелокальной продолжаемости решений на $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $\varphi(t,v,g)$ решение уравнения (3.1.2), проходящее через точку $v \in E^n$ при $t = 0$. Тогда $\varphi : \mathbb{R}_+ \times H(f) \to E^n$ и при этом выполнены следующие условия (см., например, [**2**],[**100**],[**101**]):

1) $\varphi(0,v,g) = v \quad (\forall v \in E^n$ и $g \in H(f)$;

2) $\varphi(t,\varphi(\tau,v,g),g_\tau) = \varphi(t+\tau,v,g) \quad (\forall v \in E^n, g \in H(f)$ и $t,\tau \in \mathbb{R}_+)$;

3) $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \to E^n$ непрерывно.

Обозначим через $Y = H(f)$ и $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ динамическую систему (полугрупповую) сдвигов на Y, индицированную динамической системой сдвигов $(C(\mathbb{R}\times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Положим $X = E^n \times Y$ и определим отображение $\pi : X\times\mathbb{R}_+ \to X$, по следующему правилу: $\pi((v, g), \tau) = (\varphi(\tau, v, g), g_\tau)$ (т.е. $\pi = (\varphi, \sigma)$). Тогда легко проверить, что $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ есть динамическая система на X, а $h = pr_2 : X \to Y$ – гомоморфизм $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \big\rangle$ есть неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.1).

Замечание 3.1.2. *Мы будем также рассматривать случай* $Y = H^+(f) = \overline{\{f^{(\tau)} | \tau \in \mathbb{R}_+\}}$, *полугрупповую динамическую систему* $(H^+(f), \mathbb{R}_+, \sigma)$ *и полугрупповую неавтономную динамическую систему* $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (H^+(f), \mathbb{R}_+, \sigma, h \big\rangle$.

Пример 3.1.3. Рассмотрим дифференциальное уравнение (3.1.1) с правой частью $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$, где W – некоторое открытое множество из E^n. Обозначим через $Y = C(\mathbb{R}\times W, E^n)$ и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическую систему сдвигов на Y. Через X обозначим множество всех пар (φ, f) из $C(\mathbb{R}_+, W) \times C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ таких, что φ является решением уравнения (3.3.1). Очевидно, X инвариантно относительно сдвигов в динамической системе сдвигов $(C(\mathbb{R}_+, E^n) \times C(\mathbb{R} \times W, E^n), \mathbb{R}_+, \pi)$, где $\pi((\varphi, f), \tau) = (\varphi^{(\tau)}, f^{(\tau)})$. Из общих свойств дифференциальных уравнений следует замкнутость X в $C(\mathbb{R}_+, E^n) \times C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ и, следовательно, на X индуцируется динамическая система сдвигов $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$. Отображение $h = pr_2 : X \to Y$ является гомоморфизмом динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно, $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \big\rangle$ есть неавтономная динамическая система.

Пример 3.1.4. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ – решение уравнения (3.1.1), $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, $f_Q = f \Big|_{\mathbb{R}\times Q}$ и $H(f_Q) = \overline{\sigma(f_Q, \mathbb{R})}$, где $\sigma(f_Q, \cdot)$ – движение, порожденное функцией f_Q в динамической системе сдвигов $(C(\mathbb{R}\times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Положим $Y = H(f_Q)$ и $X = H^+(\varphi, f_Q)$, где $H^+(\varphi, f_Q)$ – замыкание положительной полутраектории движения, порожденного парой (φ, f_Q), в прямом произведении динамических систем $(C(\mathbb{R}_+, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma)$

и $(C(\mathbb{R} \times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Тогда отображение $h = pr_2 : X \to Y$ является гомоморфизмом динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$, где $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ $((X, \mathbb{R}_+, \pi))$ – динамическая система на $Y(X)$, индуцированная динамической системой $(C(\mathbb{R} \times Q, E^n, \mathbb{R}, \sigma)$ $((C(\mathbb{R}_+, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma) \times (C(\mathbb{R} \times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma))$. Таким образом $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ является неавтономной динамической системой.

Пример 3.1.5. Обозначим через $L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n)$ пространство всех функций $f : \mathbb{R} \times W \to E^n$, удовлетворяющих следующим двум условиям (условия Каратеодори):

а) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция f непрерывна по $x \in W$;

б) для каждого фиксированного компакта $Q \subseteq W$ существует неотрицательная функция $m_Q \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такая, что

$$|f(t, x)| \leq m_Q(t)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in Q$.

В пространстве $L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n)$ определим топологию с помощью семейства полунорм, задаваемых следующим образом. Пусть $l > 0$ и Q – произвольный компакт из W. Положим

$$||f||^p_{[-l,l] \times Q} = \int\limits_{|t| \leq l} \max_{x \in Q} |f(t, x)|^p dt.$$

Определим отображение $\sigma : L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n) \times \mathbb{R} \to L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n)$ равенством $\sigma(f, \tau) = f^{(\tau)}$. Можно показать (см., например, [**102**]), что тройка $(L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ является динамической системой.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1.6. *Пусть* Q *– компакт из* E^n, $S_1, S_2, \ldots, S_m, \ldots$ *– возрастающая последовательность промежутков в* $\mathbb{R}$*, для которой* $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m = \mathbb{R}$ *и* $\varphi_m \in C(\mathbb{R}, Q)$ $(m \in \mathbb{N})$*. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *Для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *в* $L^p_{loc}(S_m \times E^n, E^n)$ *существует функция* f_m*, что сужение на* S_m *функции* φ_m *есть*

решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f_m(t,x) \tag{3.1.3}$$

2) *Для любого отрезка* $S \subseteq \mathbb{R}$ *и любого* ε *существует такое* $n_0 \in \mathbb{N}$, *что* $S \subseteq S_m$ *и*

$$\int\limits_{(S)} \max_{x \in Q} |f_m(t,x) - f(t,x)| dt < \varepsilon$$

при всех натуральных $m \geq n_0$.

Тогда:

1) *Множество функций* $\Phi = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *компактно в* $C(\mathbb{R}, Q)$.
2) *Предел всякой сходящейся подпоследовательности последовательности* $\{\varphi_n\}$ *есть* Q*-компактное решение уравнения* (3.1.1), *определенное на всей прямой* $\mathbb{R}$.
3) *Если действительное число* $t_0 \in \mathbb{R}$ *таково, что последовательность* $\{\varphi_n(t_0)\}$ *точек пространства* E^n *сходится к некоторой точке* $x_0 \in Q$, *а* φ *– единственное непродолжаемое решение уравнения* (3.1.1), *удовлетворяющее условию* $\varphi(t_0) = x_0$, *то* φ *есть* Q*-компактное решение, определенное на всей прямой* $\mathbb{R}$, *а последовательность* $\{\varphi_n\}$ *сходится к* φ *в пространстве* $C(\mathbb{R}, Q)$.

Доказательство. Сформулированная лемма является обобщением леммы 3.1.5 из **[75]** и доказывается по той же схеме что и упомянутая лемма, поэтому мы ее доказательство опустим.

Положим $Y = L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n)$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y. Через X обозначим множество всех пар $(\varphi, f) \in C(\mathbb{R}_+, E^n) \times L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n)$ таких, что φ – решение уравнения (3.1.1). Из общих свойств дифференциальных уравнений следует что X замкнуто и инвариантно в $C(\mathbb{R}_+, E^n) \times L^p_{loc}(\mathbb{R} \times W, E^n)$ и, следовательно, на X индуцируется динамическая система сдвигов $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$. Отображение $h = pr_2 : X \to Y$ является гомоморфизмом динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно, тройка $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \big\rangle$ является неавтономной динамической системой.

Пример 3.1.7. Обозначим через $CH(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ множество всех непрерывных по $t \in \mathbb{R}$ и голоморфных по $z \in \mathbb{C}^n$ функций $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$. Рассмотрим уравнение (3.1.1) с правой частью $f \in CH(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ и его H-класс. Обозначим через $\varphi(t, z, g)$ решение уравнения (3.1.2), проходящее через точку z при $t = 0$ и определенное на $\mathbb{R}_+$. Отметим, что функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^n \times H(f) \to \mathbb{C}^n$ удовлетворяет условиям 1) – 3) из примера 3.1.1 и, кроме того, при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ и $g \in H(f)$ отображение $U(t, g) = \varphi(t, \cdot, g) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ голоморфно [**20**]. Положим $Y = H(f)$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y. Пусть $X = \mathbb{C}^n \times Y$ и $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ – динамическая система на X, где $\pi = (\varphi, \sigma)$. Наконец, если $h = pr_2 : X \to Y$, то $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \big\rangle$ является неавтономной динамической системой. Из отмеченного выше свойства голоморфности отображений $U(t, g) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ вытекает, что каковы бы ни были $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}^+$ отображение $\pi^t : X_y \to X_{\sigma(y,t)} \quad (X_y = h^{-1}(y))$ является голоморфным.

3.2. Согласованные в пределе решения

Рассмотрим вопрос о зависимости свойства возвращаемости в пределе решений дифференциальных уравнений от соответствующего свойства правых частей уравнений.

Хорошо известно [**75**], что если правая часть дифференциального уравнения является устойчивой по Пуассону (периодической, почти периодической, рекуррентной) по времени функцией, то среди ограниченных решений этого уравнения, при определенных условиях, существует решение, согласованное по возвращаемости с правой частью.

Таким образом наблюдается весьма общая и глубокая зависимость, в силу которой характер возвращаемости решений дифференциальных уравнений согласован с возвращаемостью правой части уравнения.

Приводимые ниже результаты показывают, что аналогичная зависимость возвращаемости в пределе правой части решений дифференциальных уравнений, имеет место и в случае когда правая часть асимптотически устойчива по Пуассону.

Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ и Q – компакт из W. Будем говорить, что функция f асимптотически постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна, устойчива по Пуассону) по переменной $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, если движение $\sigma(f_Q, \cdot)$, порождчнное функцией $f_Q = f\Big|_{\mathbb{R}\times Q}$ в динамической системе сдвигов $(C(\mathbb{R}\times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$, является асимптотически постоянным (τ-периодическим, почти периодическим, рекуррентным, устойчивым по Пуассону).

Будем говорить, что $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ асимптотически постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна, устойчива по Пуассону), по переменной $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на компактах из W, если для любого компакта $Q \subseteq W$ функция f_Q асимптотически постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна, устойчива по Пуассону) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, т.е. если существуют функции $P, R \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ такие, что $f(t,x) = P(t,x) + R(t,x)$ при всех $(t,x) \in \mathbb{R}\times W$. При этом функция P постоянна (τ-периодична, почти периодична, рекуррентна, устойчива по Пуассону) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на компактах из W и $\lim\limits_{t\to+\infty} |\mathbb{R}(t,x)| = 0$ равномерно по x на компактах из W.

Решение φ уравнения (3.1.1) назовем согласованным в пределе, если оно сравнимо в пределе (в положительном направлении) с функцией $f_Q = f\Big|_{\mathbb{R}\times Q}$, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, т.е. движение $\sigma(\varphi, \cdot)$, порождчнное функцией φ в динамической системе $(C(\mathbb{R}_+, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma)$, сравнимо в пределе с движением $\sigma(f_Q, \cdot)$, порождчнным функцией f_Q в динамической системе $(C(\mathbb{R} \times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$.

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ назовчм ограниченной на $S \subseteq \mathbb{R}$, если множество $\overline{\varphi(S)} \subset E^n$ ограничено.

Теорема 3.2.1. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ согласованное в пределе решение уравнения* (3.1.1) *и $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Тогда:*

1) *Если правая часть f уравнения* (3.1.1) *асимптотически рекуррентна по переменной $t \in R$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически рекуррентно.*
2) *Если правая часть f асимптотически почти периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически почти периодично.*
3) *Если f асимптотически τ-периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически τ-периодично.*
4) *Если f асимптотически постоянна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то решение φ асимптотически постоянно.*

Доказательство. Справедливость сформулированного утверждения вытекает из соответствующих определений, леммы 3.1.1 из **[75]** и теоремы 2.2.3, примененной к неавтономной динамической системе из примера 3.1.4.

Наряду с уравнением (3.1.1) рассмотрим семейство "ω-предельных"уравнений

$$\frac{dv}{dt} = g(t, v), \qquad (g \in \omega_f), \tag{3.2.1}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$ и ω_f – ω-предельное множество функции f в динамической системе $(C(\mathbb{R} \times W, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$.

Теорема 3.2.2. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (3.1.1) *и $f_Q = f\Big|_{\mathbb{R}\times Q}$ уст. L^+, где $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. Если каждое уравнение семейства* (3.2.1) *допускает не более одного решения из ω_φ, то φ согласовано в пределе.*

Доказательство. Так как f_Q уст. L^+, то согласно лемме 3.1.6 из **[75]** решение φ уст. L^+. Пусть $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ – неавтономная динамическая система, построенная в примере

3.1.4. Рассмотрим операторное уравнение

$$h(\psi, f_Q) = f_Q. \tag{3.2.2}$$

Наряду с уравнением (3.2.2) рассмотрим семейство уравнений

$$h(\psi, g_Q) = g_Q \qquad (g_Q \in \omega_{f_Q}). \tag{3.2.3}$$

Из вышесказанного следует, что точка $(\varphi, f_Q) \in X$ уст. L_+. Каждое уравнение семейства (3.2.3), согласно условию теоремы, имеет не более одного решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$. Из теоремы 2.3.1 следует, что $\mathfrak{L}^{+\infty}_{f_Q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{(\varphi, f_Q)}$. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $\mathfrak{L}^{+\infty}_{(\varphi, f_Q)} = \mathfrak{L}^{+\infty}_{\varphi} \cap \mathfrak{L}^{+\infty}_{f_Q}$ и, следовательно, $\mathfrak{L}^{+\infty}_{f_Q} \subseteq \mathfrak{L}^{+\infty}_{\varphi}$. теорема доказана.

Замечание 3.2.3. *Согласно лемме* 3.4.2 *из* [**75**] *функция* f_Q *уст.* L^+ (L) *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) f_Q ограничена на $\mathbb{R}_+ \times Q$ $(\mathbb{R} \times Q)$, т. е. существует $M > 0$ такое, что $|f(t,x)| \le M$ при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times Q$ $((t,x) \in \mathbb{R} \times Q)$.
2) Функция f_Q равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+ \times Q$ $(\mathbb{R} \times Q)$.

Отметим, что всякая теорема о согласованности в пределе решения уравнения (3.1.1) в сочетании с теоремой 3.2.1 дачт различные признаки существования асимптотически постоянных (асимптотически периодических, асимптотически почти периодических, асимптотически рекуррентных) решений уравнения (3.1.1).

Например, из теоремы 3.2.2 вытекает

Следствие 3.2.4. *Пусть* f *асимптотически постоянна* (*асимптотически рекуррентна*) *по переменной* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ *и* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (3.1.1). *Если каждое уравнение семейства* (3.2.1) *допускает не более одного решения из* ω_φ, *то* φ *асимптотически постоянно* (*асимптотически* τ*-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

Следствие 3.2.5. *Пусть* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (3.1.1) *и* $f \in C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R})$ $(W \subseteq \mathbb{R})$ *асимптотически рекуррентна по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно относительно* $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. *Если некоторая функция* g_Q *из* ω_{f_Q} $(f_Q = f\big|_{\mathbb{R}\times Q})$ *строго монотонна по* x *равномерно по* t, *то* φ *согласовано в пределе в положительном направлении.*

Доказательство. Из асимптотической рекуррентности f и строгой монотонности $g_Q \in \omega_{f_Q}$ следует, что каждая функция из ω_{f_Q} обладает свойством строгой монотонности по $x \in Q$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$. Согласно [**76**] каждое уравнение семейства (3.2.3) допускает не более одного решения из ω_φ и по теореме 3.2.2 φ согласовано в пределе.

Следствие 3.2.6. *Пусть* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (3.1.1) *и* $f \in C(\mathbb{R} \times W, \mathbb{R})$ *асимптотически постоянна (асимптотически* τ*-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно относительно* $x \in Q$. *Если некоторая функция* $g_Q \in \omega_{f_Q}$ *строго монотонна по* $x \in Q$ *равномерно относительно* $t \in \mathbb{R}$, *то* φ *асимптотически постоянно (асимптотически* τ*-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Заметим, что если f асимптотически почти периодична, то следствие 3.2.6 усиливает результат работы [**91**].

3.3. Линейные дифференциальные уравнения

Обозначим через $[E^n]$ множество всех квадратных $n \times n$-матриц A с нормой $||A||$, $C(\mathbb{R}, [E^n])$ – пространство всех непрерывных матриц-функций $A : \mathbb{R} \to [E^n]$ с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R}$ и $C_b(\mathbb{S}, E^n)$ – банахово пространство всех непрерывных и ограниченных функций $\varphi : \mathbb{S} \to E^n$ $(\mathbb{S} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-)$ с нормой $||\varphi|| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in \mathbb{S}\}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{3.3.1}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$. Наряду с уравнением (3.3.1) рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \tag{3.3.2}$$

где $f \in C(\mathbb{S}, E^n)$, и семейство "ω-предельных"уравнений

$$\frac{dz}{dt} = B(t)z \qquad (B \in \omega_A). \tag{3.3.3}$$

Теорема 3.3.1. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (3.3.2)*, матрица $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и функция f уст. L^+. Если каждое уравнение семейства* (3.3.3) *не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то φ согласовано в пределе.*

Доказательство. Наряду с уравнением (3.3.2) рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dv}{dt} = B(t)v + g \qquad ((b, g) \in \omega_{(A,f)}). \tag{3.3.4}$$

Покажем, что каждое уравнение семейства (3.3.4) не имеет более одного решения из ω_φ. Допустим противное. Тогда существуют $(B, g) \in \omega_{(A,f)}$ и $\psi_1, \psi_2 \in \omega_\varphi$, являющиеся решениями уравнения (3.3.4). Заметим, что $\psi = \psi_1 - \psi_2 \not\equiv 0$ есть ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (3.3.3). Последнее противоречит условию теоремы. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 3.2.2 и, следовательно, φ согласовано в пределе.

Следствие 3.3.2. *Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (3.3.2)*, матрица A и функция f совместно асимптотически постоянны* (*асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны*)*. Если каждое уравнение семейства* (3.3.3) *не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то φ асимптотически постоянно* (*асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*)*.*

В случае, когда A и f асимптотически почти периодичны следствие 3.3.2 является обобщением на случай асимптотической почти периодичности известной теоремы Фавара [**11**].

Говорят [**8**], что уравнение (3.3.1) гиперболично (удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии) на $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$, если существуют пара взаимно дополнительных проекторов $P(A)$ и $Q(A)$ и действительные числа N, $\gamma > 0$ такие, что выполнены неравенства

$$||U(t,A)P(A)U^{-1}(\tau,A)|| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \qquad (t,\tau \in \mathbb{S},\ t \geq \tau) \tag{3.3.5}$$

и

$$||U(t,A)Q(A)U^{-1}(\tau,A)|| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)} \qquad (t,\tau \in \mathbb{S},\ t \leq \tau), \tag{3.3.6}$$

где $U(t,A)$ – матрица Коши для уравнения (3.3.1).

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3.3. [**53**] *Если уравнение* (3.3.1) *гипреболично на* $\mathbb{R}_+$*, то каждое уравнение* (3.3.3) *гиперболично на* $\mathbb{R}$.

Следствие 3.3.4. *Пусть уравнение* (3.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$ *и* $B \in \omega_A$*. Тогда уравнение* (3.3.3) *не имеет ненулевых ограниченных на* $\mathbb{R}$ *решений.*

Теорема 3.3.5. *Пусть* A *и* f *уст.* L^+*. Если уравнение* (3.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$*, то*

1) *Неоднородное уравнение* (3.3.2) *имеет по крайнем мере одно ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение* φ*. Это решение дачтся формулой*

$$\varphi(t) = \int\limits_0^{+\infty} G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{3.3.7}$$

где $G(t,\tau)$ *– главная функция Грина* [**8**] *для* (3.3.1).

2) *Всякое ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (3.3.2) *согласовано в пределе.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из [**8**]. Докажем второе утверждение. По лемме 3.3.3 и следствию 3.3.4 каждое уравнение (3.3.3) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Согласно теореме 3.3.1 каждое ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (3.3.1) согласовано в пределе.

Заметим, что теоремы 3.3.1 и 3.3.5 дают достаточные условия согласованости в пределе ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений уравнения (3.3.2). Однако, между этими теоремами есть существенная разница (на первый взгляд). Первая из теорем утверждает, что, если существует ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение, то оно согласовано в пределе. Приччм априори неизвестно будет ли в условиях теоремы 3.3.1 существовать по крайнем мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение. Вторая же теорема утверждает, что при выполнении перечисленных в ней условий, всегда найдется по крайней мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение, а в остальном их заключения совпадают. В связи со сказанным выше возникает вопрос. Будет ли в условиях теоремы 3.3.1 существовать хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение у уравнения (3.3.2) ? Ответ на этот вопрос дачт следующая теорема.

Теорема 3.3.6. **[53]** *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ уст. L^+. Для того чтобы уравнение* (3.3.1) *было гиперболическим на $\mathbb{R}_+$, необходимо и достаточно, чтобы каждое уравнение семейства* (3.3.3) *не имело нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.*

Ниже мы изучим вопрос о существовании асимптотически почти периодических решений линейных дифференциальных уравнений с асимптотически почти периодическими коэффициентами.

Теорема 3.3.7. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ асимптотически почти периодична. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$.*
2) *Какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уравнение* (3.3.2) *имеет по крайнем мере одно асимптотически почти периодическое решение.*

Доказательство. Пусть уравнение (3.3.1) гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – произвольная асимптотически почти периодическая функция. Согласно теореме 3.3.5 уравнение (3.3.1) имеет по крайней мере одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ согласованное в пределе решение φ. Из следствия 3.3.2 вытекает асимптотическая почти периодичность φ. Таким образом, из условия 1) вытекает условие 2). Покажем, что имеет место и обратное. Так как матрица A асимптотически почти периодична, то существуют (единственная) почти периодическая матрица $P \in \omega_A$ и матрица $R \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ такие, что

1. $A(t) = P(t) + R(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} ||R(t)|| = 0$.

Пусть $g \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – произвольная почти периодическая функция. Согласно предположению уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + g(t)$$

имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение φ. В силу почти периодичности матрицы P и функции g и асимптотической почти периодичности φ существует последовательность $\{t_n\} \to +\infty$ такая, что $\{A_{t_k}\} \to P$, $g_{t_k} \to g$ и $\varphi_{t_k} \to q$, где $q \in \omega_\varphi$ – почти периодическая функция. Заметим, что q является почти периодическим решением уравнения

$$\frac{dz}{dt} = P(t)z + g(t). \tag{3.3.8}$$

Таким образом, мы показали, что какова бы ни была почти периодическая функция g, уравнение (3.3.8) имеет по крайней мере одно почти периодическое решение. Из результатов работы **[22]** следует, что уравнение

$$\frac{du}{dt} = P(t)u$$

гиперболично на $\mathbb{R}$. Согласно лемме 3.3.3 каждое уравнение семейства (3.3.3) гиперболично на $\mathbb{R}$. По теореме 3.3.6 уравнение (3.3.2) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

Положим

$$M(A) = \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L} \int\limits_o^L A(s)ds.$$

Теорема 3.3.8. *Пусть A асимптотически почти периодична. Если спектр матрицы $M(A)$ не пересекается с мнимой* *осью, то существует число* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при каждом* ε, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, *уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x + f(t) \tag{3.3.9}$$

имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция f.

Доказательство. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon B(t)y \qquad (B \in \omega_A). \tag{3.3.10}$$

Согласно следствию 1.5.13 $M(A) = M(P)$, где P – почти периодическая матрица из ω_A такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} ||A(t) - P(t)|| = 0$. Из результатов [**22**] (см. стр. 258) следует существование числа $\varepsilon_0 > 0$ такого, что при каждом ε, $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon P(t)z$$

гиперболично на $\mathbb{R}$. Тогда согласно лемме 3.3.3 каждое уравнение семейства (3.3.10) гиперболично на $\mathbb{R}$. Следовательно, каждое из уравнений (3.3.10) при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ не имеет нетривиальное ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. По теореме 3.3.6 уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x$$

гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и из теоремы 3.3.7 следует, что при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение (3.3.9) имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция f. Теорема доказана.

Рассмотрим скалярное уравнение с асимптотически почти периодической функцией $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x. \tag{3.3.11}$$

Наряду с уравнением (3.3.11) рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + f(t), \tag{3.3.12}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Теорема 3.3.9. *Для того чтобы уравнение* (3.3.12) *имело по крайнем мере одно асимптотически почти периодическое решение* φ *при любой асимптотически почти периодической функции* f*, необходимо и достаточно, чтобы* $M(a) \neq 0$ ($M(a)$ *– среднее значение функции* a).

Доказательство. Необходимость. Пусть (3.3.12) при любой асимптотически почти периодической функции f имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение φ. Согласно теореме 3.3.7 уравнение (3.3.11) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Пусть, для определчнности, решения уравнения (3.3.11) ограничены при $t \geq 0$. Тогда существуют положительные числа N и ν такие, что

$$|\varphi(t, a, x)| \leq Ne^{-\nu t}|x| \tag{3.3.13}$$

при всех $t \geq 0$. Так как

$$\varphi(t, a, x) = x \exp(\int_0^t a(s)ds),$$

то

$$\frac{1}{t} \ln |\varphi(t, a, x)| = \frac{\ln |x|}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t a(s)ds \tag{3.3.14}$$

($x \neq 0$). Переходя к пределу в (3.3.14), когда $t \to +\infty$, учитывая (3.3.13), получим $M(a) \neq 0$. Аналогично рассматривается случай, когда все решения уравнения (3.3.11) неограничены при $t \geq 0$.

Достаточность. Пусть $M(a) \neq 0$. Тогда легко проверить, что $M(a) = M(b)$ какова бы ни была функция $b \in \omega_a$. Пусть b – произвольная функция из ω_a. Так как $M(b) \neq 0$ и

$$M(b) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |\varphi(t, b, x)|$$

при всех $x \neq 0$, то, очевидно, уравнение

$$\frac{dz}{dt} = b(t)z$$

не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Поэтому согласно теореме 3.3.6 уравнение (3.3.11) гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 3.3.7

Теорема 3.3.9 является обобщением одной теоремы Массера (см., например, [**22**] стр. 43) на случай асимптотической почти периодичности.

3.4. Квазилинейные дифференциальные уравнения

В этом параграфе выясняются условия, при которых существование согласованного в пределе решения нелинейного уравнения можно установить по линейным членам правой части уравнения.

Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторое множество последовательностей $\{t_k\} \to +\infty$ и $r > 0$. Обозначим $C_r(\mathfrak{L}) = \{\varphi : \varphi \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n),\ \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_\varphi^{+\infty}$ и $||\varphi|| \le r\}$.

Лемма 3.4.1. $C_r(\mathfrak{L})$ *является подпространством метрического пространства* $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$.

Доказательство. Очевидно, для доказательства сформулированного утверждения достаточно доказать замкнутость $C_r(\mathfrak{L})$ в $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$. Пусть $\{\varphi_k\} \subseteq C_r(\mathfrak{L})$ и $\varphi = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $\{t_k\} \in \mathfrak{L}$. Так как $\varphi_k \to \varphi$ в метрике $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$, то $||\varphi|| \le r$. Покажем, что $\{t_k\} \in \mathfrak{L}_y^{+\infty}$. Для $\varepsilon > 0$ найдется $k_0 = k_0(\varepsilon)$, для которого

$$||\varphi - \varphi_k|| < \frac{\varepsilon}{4}$$

при всех $k \ge k_0$. Так как

$$\begin{aligned}&|\varphi(t+t_l) - \varphi(t+t_r)| \le |\varphi(t+t_l) - \varphi_{k_0}(t+t_l)| + |\varphi_{k_0}(t+t_l) - \\ &\varphi_{k_0}(t+t_r)| + |\varphi_{k_0}(t+t_r) - \varphi(t+t_r)| \le \\ &2||\varphi - \varphi_{k_0}|| + |\varphi_{k_0}(t+t_l) - \varphi_{k_0}(t+t_r)|,\end{aligned}$$

то при достаточно больших l и m будем иметь

$$\rho(\varphi^{(t_l)}, \varphi^{(t_m)}) < \varepsilon,$$

где ρ – метрика, задающая открыто-компактную топологию в $C(\mathbb{R}_+, E^n)$ (например,

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{l>0}\{\min\{\max_{0\le t\le l} |\varphi(t) - \psi(t)|, l^{-1}\}\}).$$

В силу полноты пространства $C(\mathbb{R}_+, E^n)$ заключаем, что последовательность $\{\varphi^{(t_k)}\}$ сходится и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_\varphi^{+\infty}$. Лемма доказана.

Лемма 3.4.2. *Пусть* $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$, $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ *и* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_\varphi^{+\infty} \cap \mathfrak{L}_{F_Q}^{+\infty}$, *где* $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ *и* $F_Q = F|_{\mathbb{R}\times Q}$. *Если* F_Q *удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой* $L > 0$, *то* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_g^{+\infty}$, *где* $g(t) = F(t, \varphi(t))$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \in \mathfrak{L}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} &|g(t+t_l) - g(t+t_r)| = |F(t+t_l, \varphi(t+t_l)) - \\ &F(t+t_r, \varphi(t+t_r))| \le |F(t+t_l, \varphi(t+t_l)) - \\ &F(t+t_l, \varphi(t+t_r))| + |F(t+t_l, \varphi(t+t_r)) - \\ &F(t+t_r, \varphi(t+t_r))| \le L|\varphi(t+t_l) - \varphi(t+t_r))| + \\ &\max_{x\in Q} |F(t+t_l, x) - F(t+t_r, x)|. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Переходя к пределу в неравенстве (3.4.1) когда $l, r \to +\infty$, получим фундаментальность последовательности $\{g_{t_k}\}$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+, E^n)$. В силу полноты пространства $C(\mathbb{R}_+, E^n)$ последовательность $\{g^{(t_k)}\}$ сходится, т.е. $\{t_k\} \in \mathfrak{L}_g^{+\infty}$. Лемма доказана.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + F(t, x), \tag{3.4.2}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, $f \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ и $F \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$.

Пусть E_+ – множество всех начальных точек $x \in E^n$ решений из $C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнения (3.3.1). Тогда E_+ будет подпространством пространства E^n. Обозначим через P_+ проектор, проектирующий E^n на E_+.

Лемма 3.4.3. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ уст. L^+. Если уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$, то какова бы ни была уст. L^+ функция $f \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнение* (3.3.2) *имеет единственное согласованное в пределе решение $\varphi_+ \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$, удовлетворяющее условию $P_+\varphi_+(0) = 0$. Кроме того, существует константа $M > 0$ (не зависящая от f) такая, что $||\varphi_+|| \le M||f||$.*

Доказательство. Сформулированная лемма является непосредственным следствием леммы 6.3 из **[47]** и теоремы 3.3.5.

Пусть φ_+ – согласованное в пределе решение уравнения (3.3.2), существование которого гарантируется леммой 3.4.3. Положим $Q = \overline{\varphi_+(\mathbb{R}_+)}$ и через Q_r обозначим шаровую окрестность множества $Q \subset E^n$ радиуса $r > 0$.

Теорема 3.4.4. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, $f \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ и $F \in C(\mathbb{R}_+ \times W, E^n)$. Если выполнены следующие условия:*

1) *A, f и F_{Q_r} уст. L^+;*
2) *Уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$;*
3) *$|F(x,t)| \le rM^{-1}$ при всех $x \in Q_r$ и $t \in \mathbb{R}_+$ (M – константа, существование которой гарантируется леммой* 3.4.3)*;*
4) *F удовлетворяет условию Липшица по $x \in Q_r$ с константой Липшица $L < M^{-1}$,*

то уравнение (3.4.2) *имеет единственное решение $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, Q_r)$, удовлетворяющее условию $P_+\varphi(0) = 0$ и оно согласованно в пределе.*

Доказательство. В уравнении (3.4.2) совершим замену переменных $x(t) = y(t) + \varphi_+(t)$. Тогда для $y(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + F(t, y + \varphi_+(t)).$$

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{+\infty}(A, f, F_{Q_r})$, где $F_{Q_r} = F|_{\mathbb{R}\times Q_r}$. Определим оператор

$$\Phi : C_r(\mathfrak{L}) \to C_r(\mathfrak{L})$$

следующим образом. Если $\varphi \in C_r(\mathfrak{L})$, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty}$ и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi+\varphi_+}^{+\infty}$. Согласно лемме 3.4.2 $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{g}^{+\infty}$, где $g(t) = F(t, \varphi(t) + \varphi_+(t))$. По лемме 3.4.3 уравнение

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + F(t, \varphi(t) + \varphi_+(t))$$

имеет единственное решение $\psi \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$, которое согласованно в пределе (и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\psi}^{+\infty}$) и удовлетворяет условию $P_+(\psi_+(0)) = 0$. Кроме того, оно подчиняется оценке

$$||\psi|| \le M||g|| = M \sup_{t\ge 0} |F(t, \varphi(t) + \varphi_0(t))| \le$$
$$M \sup_{t\ge 0} \max_{x\in Q_r} |F(t,x)| \le MrM^{-1} = r.$$

Таким образом, $\psi \in C_r(\mathfrak{L})$. Положим $\Phi(\varphi) = \psi$. Из выше сказанного следует, что Φ корректно определен. Покажем, что оператор Φ является сжимающим. В самом деле. Легко заметить, что функция $\psi = \psi_1 - \psi_2 = \Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)$ является решением уравнения

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + F(t, \varphi_1(t) + \varphi_+(t)) - F(t, \varphi_2(t) + \varphi_+(t))$$

с начальным условием $P_+\psi(0) = 0$ и согласно лемме 3.4.3 подчиняется оценке

$$||\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)|| \le$$
$$M \sup_{t\ge 0} |F(t, \varphi_1(t) + \varphi_+(t)) - F(t, \varphi_2(t) + \varphi_+(t))| \le$$
$$ML||\varphi_1 - \varphi_2|| = \alpha||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

Так как $\alpha = ML < MM^{-1} = 1$, то Φ является сжатием и, следовательно, существует единственная функция $\overline{\varphi} \in C_r(\mathfrak{L})$ такая, что $\Phi(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $\varphi = \overline{\varphi} + \varphi_+$ и заметить, что φ является искомым решением. Теорема доказана.

Теорема 3.4.5. *Пусть A, f уст. L^+ и выполнены следующие условия:*

1) *Уравнение* (3.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$;
2) $F_{Q_r} = F|_{\mathbb{R}\times Q_r}$ *уст.* L^+;

3) *F удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой $L > 0$.*

Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $|\varepsilon| \le |\varepsilon_0|$ уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon F(t, x) \tag{3.4.3}$$

имеет единственное согласованное в пределе решение $\varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+, Q_r)$, удовлетворяющее условию $P_{+\varphi_\varepsilon}(0) = 0$. Кроме того, последовательность $\{\varphi_\varepsilon\}$ сходится к φ_+ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. В силу уст. L^+ функции F_{Q_r} существует такая константа $N > 0$, что $|F(t, x)| \le N$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in Q_r$. Положим $\varepsilon_0 = \min((LM)^{-1}, (NM)^{-1})$. Тогда

$$|\varepsilon F(t, x)| \le |\varepsilon||F(t, x)| \le \varepsilon_0 N < r(NM)^{-1}N < rM^{-1}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in Q_r$. Очевидно, константа Липшица для функции εF меньше чем M^{-1}. Согласно теореме 3.4.4 при каждом $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ уравнение (3.4.3) имеет единственное согласованное в пределе решение φ_ε, удовлетворяющее условию $P_{+\varphi_\varepsilon}(0) = 0$.

Оценим разность $\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_+(t) = \psi_\varepsilon(t)$. Очевидно,

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} = A(t)\psi_\varepsilon(t) + \varepsilon F(t, \psi_\varepsilon(t) + \varphi_+(t))$$

и согласно лемме 3.4.3

$$\begin{gathered} ||\psi_\varepsilon|| \le M \sup_{t \ge 0} |\varepsilon F(t, \psi_\varepsilon(t) + \varphi_+(t))| \le \\ M|\varepsilon| \sup_{t \ge 0} \max_{x \in Q_r} |F(t, x)| \le M|\varepsilon|N = |\varepsilon|(MN). \end{gathered} \tag{3.4.4}$$

Переходя в неравенстве (3.4.4) к пределу, когда $\varepsilon \to 0$, получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Следствие 3.4.6. *Пусть A и f асимптотически постоянны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны). Если выполнены следующие условия:*

1) *F асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q_r$;*

2) *Уравнение* (3.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$;

3) F *удовлетворяет условию Липшица по* $x \in Q_r$,

то существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при каждом* $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ *уравнение* (3.4.3) *имеет единственное асимптотически постоянное* (*асимптотически* τ*-периодическое, асимптотически почти периодическое*) *решение* $\varphi_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+, Q_r)$, *удовлетворяющее условию* $P_{+\varphi_\varepsilon}(0) = 0$. *Кроме того, последовательность* $\{\varphi_\varepsilon\}$ *сходится к* φ_+ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* $t \in \mathbb{R}_+$

Сформулированное предложение обобщает теорему Бирюк (см., например, [**11**]).

3.5. Принцип усреднения на полуоси для асимптотически почти периодических уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) \tag{3.5.1}$$

с правой частью $f \in C(\mathbb{R}_+ \times E^n, E^n)$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Предположим, что при любом $x \in E^n$ существует среднее значение по t на $\mathbb{R}_+$ функции f, и положим

$$f_0(x) = \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L} \int\limits_t^{L+t} f(z, x) dz. \tag{3.5.2}$$

Предположим, что усредненное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f_0(x)$$

имеет стационарное решение $x_0(t) \equiv x_0$, и пусть выполнены следующие условия:

У1) Функция f ограничена на $\mathbb{R}_+ \times B_r(x_0)$ ($B_r(x_0) = \{x | \, |x - x_0| \leq r\}$) и предел (3.5.2) существует равномерно относительно $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in B_r(x_0)$.

У2) Существуют $f'_x(t, x)$ и $f'_0(x)$, ограниченные на $\mathbb{R}_+ \times B_r(x_0)$ и $B_r(x_0)$ соответственно.

У3) Вектор-функции $f(t,x)$, $f_0(x)$ имеют непрерывные производные по $x \in B_r(x_0)$ и равномерно относительно x и t имеет место равенство

$$f_0'(x) = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{L} \int\limits_t^{L+t} f_x'(\tau, x)d\tau.$$

У4) Спектр оператора $A = f_0'(x_0)$ не пересекается с мнимой осью.

Для любого $x \in B_r(x_0)$

$$f_0(x+h) - f_0(x) = f_0'(x)h + R(x,h), \tag{3.5.3}$$

где $|R(x,h)| = o(|h|)$ для любых $x, x+h \in B_r(x_0)$. Положим $A = f_0'(x_0)$ и $B(h) = R(x_0,h)$, тогда из (3.5.3) получим

$$f_0(x+h) = Ah + B(h). \tag{3.5.4}$$

Можно показать [**8**], что

$$|B(h_1) - B(h_2)| \le C(\sigma)|h_1 - h_2|$$

при всех $|h_1|, |h_2| \le \sigma$ и $C(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$.

Преобразуем уравнение (3.5.1) с помощью (3.5.4) и замены $h = x - x_0$. Тогда получим

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Ah + \varepsilon(f(t, x_0+h) - [f_0(x_0+h) - B(h)])$$

или, введя обозначение $g(t,h) = f(t,x_0+h) - (f_0(x_0+h) - B(h))$, получим

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Ah + \varepsilon g(t,h). \tag{3.5.5}$$

Введем в рассмотрение функции $V(t,h) = f(t,x_0+h) - f_0(x_0+h)$ и $v(t,h;\varepsilon)$, где

$$v(t,h;\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} V(s+t,h)e^{-\varepsilon s}ds. \tag{3.5.6}$$

Произведем замену переменной в уравнении (3.5.5) по формуле

$$h = z - \varepsilon v(t,z;\varepsilon). \tag{3.5.7}$$

При сделанных выше предположениях преобразование (3.5.7) обратимо ([**8**]). С помощью замены (3.5.7) уравнение (3.5.5) преобразуется к виду

$$\frac{dz}{d\tau} = Az + F(\tau, z; \varepsilon) \tag{3.5.8}$$

($\tau = \varepsilon t$). Как и в [**8**], показываем, что

$$|F(\tau, z; \varepsilon) - B(z)| = O(\varepsilon) \tag{3.5.9}$$

при достаточно малых ε и, кроме того, F удовлетворяет условию Липшица

$$|F(\tau, z_1; \varepsilon) - F(\tau, z_2; \varepsilon)| \le \mu(\sigma)|z_1 - z_2| \tag{3.5.10}$$

при всех $|z_1|, |z_2| \le \sigma$ ($\mu(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$).

Из результатов работы [**8**] следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon v(t, z; \varepsilon) = 0 \text{ и } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon v'_z(t, z; \varepsilon) = 0. \tag{3.5.11}$$

Применяя к уравнению (3.5.8) теорему 3.4.4 (из сказанного выше ясно, что все условия теоремы 3.4.4 для уравнения (3.5.8) выполнены), получим, что при достаточно малых $r_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, уравнение (3.5.8) будет иметь хотя бы одно решение $z(\tau)$, удовлетворяющее условию $|z(\tau)| \le r_0$ при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. Если вернуться с помощью обратного преобразования (3.5.7) с учетом (3.5.11) к уравнению (3.5.1), мы получим следующую теорему.

Теорема 3.5.1. *Пусть функция* $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ *удовлетворяет условиям* У1) – У4) *и* $f_0(x_0) = 0$. *Если спектр оператора* $A = f'_0(x_0)$ *не пересекается с мнимой осью, то при достаточно малом* $r_0 > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (3.5.1) *имеет хотя бы одно решение* $x_\varepsilon(t)$, *удовлетворяющее условию*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x_\varepsilon(t) - x_0| \le r_0. \tag{3.5.12}$$

Предположим, что, кроме перечисленных в теореме 3.5.1 условий, функция $f(t, x)$ вместе со своей производной $f'_x(t, x)$ асимптотически почти периодичны по $t \in \mathbb{R}_+$ равномерно по $x \in B_r(x_0)$.

Из определения функции $v(t, z; \varepsilon)$ следует, что она сама и ее производная $v'_z(t, z; \varepsilon)$ асимптотически почти периодичны по $t \in \mathbb{R}_+$ равномерно по $z \in B_{r_0}(0)$. Так, как

$$F(\tau, z; \varepsilon) = (I - \varepsilon v'_z)^{-1}[f_0(x_0 + z) + f(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0 + z -$$
$$\varepsilon v) + \varepsilon v - f(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_0 + z)] - Az, \tag{3.5.13}$$

то F также является асимптотически почти периодической по $\tau \in \mathbb{R}$ равномерно по $z \in B_{r_0}(0)$. Из сказанного выше и следствия 3.4.6 вытекает

Теорема 3.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5.1 *и, кроме того, функция $f(t, x)$ вместе со своей производной $f'_x(t, x)$ асимптотически почти периодичны по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in B_r(x_0)$. Тогда при достаточно малом $r_0 > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение* (3.5.1) *имеет хотя бы одно асимптотически почти периодическое решение $x_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условию* (3.5.12).

3.6. Нелинейные дифференциальные уравнения

В этом параграфе, кроме теорем, вытекающих из общих результатов, мы приведчм некоторые теоремы о существовании асимптотически периодических (асимптотически почти периодических, асимптотически рекуррентных) решений, которые не вытекают из соответствующих теорем о согласованных решениях.

Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ и $M \subset C_b(\mathbb{R}, E^n)$. Следуя [**11**, с.432], будем говорить, что функция φ разделена в M, если M состоит из одной функции φ либо существует число $r > 0$ такое, что для всякой функции $\psi \in M$, отличной от φ, выполнено при всех $t \in \mathbb{R}$ неравенство

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \geq r.$$

Теорема 3.6.1. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (3.1.1) *и f асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно* *по* $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. *Если все решения из* ω_φ *каждого уравнения семейства* (3.2.1) *разделены в* ω_φ, *то* φ *асимптотически постоянно* (*асимптотически* $k_0\tau$*-периодично для некоторого натурального* k_0, *асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

Доказательство. Так как f асимптотически рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$, то $f_Q = f\ \big|_{\mathbb{R}\times Q}$ уст. L^+. По лемме 3.1.1 [**75**] решение φ уст. L^+. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h\big\rangle$, построенную в примере 3.1.4. В условиях нашей теоремы точка $(\varphi, f_Q) \in X$ уст. L^+. Покажем, что все решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$ каждого уравнения семейства (3.2.3) разделены в $\omega_{(\varphi, f_Q)}$. В самом деле. Пусть $g_Q \in \omega_{f_Q}$ и $(\psi_0, g_Q) \in \omega_{(\varphi, f_Q)}$ является решением уравнения (3.2.3). Очевидно, $\psi_0 \in \omega_\varphi$ является решением уравнения (3.2.1) ($g_Q = g\ \big|_{\mathbb{R}\times Q}$). Согласно условию теоремы существует число $r = r(g_Q) > 0$ такое, что для любого решения $\psi \in \omega_\varphi$ уравнения (3.2.1), отличного от ψ_0, выполнено неравенство (3.6).

Пусть теперь $(\psi, g_Q) \in \omega_{(\varphi, f_Q)}$ – произвольное, отличное от (ψ_0, g_Q), решение уравнения (3.2.1). Тогда, очевидно, расстояние между точками (ψ_0, g_Q) и (ψ, g_Q) не меньше r. Таким образом, все решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$ каждого уравнения (3.2.3) разделены в $\omega_{(\varphi, f_Q)}$. Согласно теоремам 2.3.6 и 2.4.4 решение (φ, f_Q) уравнения (3.2.2) асимптотически постоянно (асимптотически τk_0-периодично для некоторого натурального k_0, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно). Из сказанного следует, что φ асимптотически постоянно (асимптотически $k_0\tau$-периодично для некоторого натурального k_0, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно). Теорема доказана.

Отметим, что вопрос об асимптотической почти периодичности решений дифференциальных уравнений изучался ранее, в частности, в работах [**107**], [**89**]. В этих работах для почти периодичной правой части f и примерно при тех же условиях, что и в теореме 3.6.1, доказана асимптотическая почти периодичность решения φ.

Следуя [**86**], решение $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнения (3.1.1) назовчм Σ^+-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдчтся δ такое, что для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ и $Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ из неравенств

$$\rho(\varphi^{(t_1)}, \varphi^{(t_2)})\delta \quad \text{и} \quad \sup_{t\geq 0}\max_{x\in Q}|f(t+t_1,x) - f(t+t_2,x)| < \delta$$

следует неравенство

$$\sup_{t\geq 0}\rho(\varphi^{(t+t_1)}, \varphi^{(t+t_2)}) < \varepsilon$$

Теорема 3.6.2. *Пусть* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (3.1.1) *и* f *асимптотически почти периодична по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно относительно* $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$. *Если* φ Σ^+-*устойчиво, то оно асимптотически почти периодично.*

Доказательство. Если φ – ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (3.1.1) и f асимптотически почти периодична по t равномерно относительно $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$, то (φ, f_Q) – уст. L^+ решение уравнения (3.2.2). Легко заметить, что из Σ^+-устойчивости решения φ уравнения (3.1.1) вытекает Σ^+ устойчивость решения (φ, f_Q). Согласно теореме 2.3.7 решение (φ, f_Q) асимптотически почти периодично и, следовательно, решение φ также асимптотически почти периодично. Теорема доказана.

В работе [**19**] доказано утверждение, аналогичное теореме 3.6.2, при дополнительном требовании почти периодичности по t правой части.

Теорема 3.6.3. *Пусть* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (3.1.1), f *асимптотически* τ-*периодична по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R}_+)}$ *и* $\overline{g}_Q(t,x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_Q(k\tau + t, x)$. *Если уравнение*

$$\frac{dy}{dt} = \overline{g}_Q(t, y)$$

допускает не более одного решения из ω_φ, *то решение* φ *асимптотически* τ-*периодично.*

Доказательство. В условиях теоремы (φ, f_Q) является уст. L^+ решением уравнения (3.2.2) и уравнение

$$h(\psi, \overline{g}_Q) = \overline{g}_Q$$

имеет не более одного решения из $\omega_{(\varphi, f_Q)}$, где h – гомоморфизм динамических систем из примера 3.1.4. Согласно теореме 2.4.1 решение (φ, f_Q) уравнения (3.2.2) асимптотически τ-периодично и, следовательно, решение φ уравнения (3.1.1) асимптотически τ-периодично. Теорема доказана.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' = f(t, x), \tag{3.6.1}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$, и приведем признак существования согласованных в пределе его решений.

Теорема 3.6.4. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ непрерывно дифференцируема по $x \in E^n$ и существует $r_0 > 0$ такое, что*

1) *$|f(t,x)| \le A(r) < +\infty$ при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times B[0,r]$ и $0 \le r \le r_0$;*
2) *f асимптотически устойчива по Пуассону по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in B[0, r_0]$;*
3) *существуют положительные числа m и $M(r)$ такие, что при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times B(0,r)$, $0 \le r \le r_0$, $mI \le f'_x(t,x) \le M(r)I$ (I – единичная матрица из $[E^n]$) и матрица $f'_x(t,x)$ самосопряжена.*

Тогда для произвольного r, $0 \le r \le r_0$, уравнение (3.6.1) *имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение φ такое, что $\mathfrak{L}_{\hat{f}}^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty}$, где $\hat{f}$ – сужение функции f на $\mathbb{R} \times B(0,r)$.*

Доказательство теоремы 3.6.4 опирается на следующую лемму.

Лемма 3.6.5. *Пусть $M > 0$ и $f \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$. Формулой*

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2\sqrt{M}}\Big\{e^{\sqrt{M}t}\int\limits_t^{+\infty} e^{-\sqrt{M}\tau} f(\tau)d\tau + e^{-\sqrt{M}\tau}\int\limits_0^t e^{\sqrt{M}\tau} f(\tau)d\tau\Big\} \tag{3.6.2}$$

определяется ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения

$$x'' = Mx + f(t) \tag{3.6.3}$$

и это решение подчиняется оценке

$$||\varphi|| \leq \frac{1}{M}||f||, \tag{3.6.4}$$

где $||f|| = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}$. Если, кроме того, f асимптотически устойчиво по Пуассону, то φ согласовано в пределе.

Доказательство. Тот факт, что функция φ, определечнная равенством (3.6.2) является решением уравнения (3.6.3) и подчиняется оценке (3.6.4), проверяется простым вычислением. Второе утверждение леммы вытекает из теоремы 3.3.5.

Доказательство теоремы 3.6.4. Пусть $0 \leq r \leq r_0$. Положим $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\hat{f}}^{+\infty}$, $B_r(\mathfrak{L}) = \{\varphi | \varphi \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n), ||\varphi|| \leq r$ и $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty}\})$ и определим оператор Φ из $B_r(\mathfrak{L})$ в $B_r(\mathfrak{L})$ равенством

$$(\Phi\varphi)(t) = -\frac{1}{2\sqrt{M}}\Big\{ \int\limits_t^{+\infty} e^{\sqrt{M}(t-\tau)} F(\tau, \varphi(\tau)) d\tau +$$

$$\int\limits_0^t e^{-\sqrt{M}(t-\tau)} F(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \Big\},$$

где $F(t,x) = f(t,x) - Mx$. Пусть $\varphi \in B_r(\mathfrak{L})$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Mx + f(t, \varphi(t)) - M\varphi(t). \tag{3.6.5}$$

Заметим, что $F'_x(t,x) = f'_x(t,x) - MI$, и в силу самоспряжчнности $f'_x(t,x)$ имеем

$$\begin{aligned} ||F'_x(t,x)|| &= \sup_{|\xi|=1} |(F'_x(t,x)\xi, \xi)| = \sup_{|\xi|=1} |(f'_x(t,x)\xi,\xi) - M| = \\ &= \sup_{|\xi|=1} |M - (f'_x(t,x)\xi,\xi)| \leq M(r) - m \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in B[0,r]$. Из неравенства (3.6.6) следует, что

$$|F(t,x_1) - F(t,x_2)| \leq (M-m)|x_1 - x_2| \tag{3.6.7}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x_1, x_2 \in B[0, r]$.

По лемме 3.4.2 $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_g^{+\infty}$, где $g(t) = F(t, \varphi(t))$. Согласно лемме 3.6.5 уравнение (3.6.5) имеет единственное решение $\psi \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$ такое, что $\mathfrak{L}_g^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_\psi^{+\infty}$ и, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_\psi^{+\infty}$. По той же лемме

$$\begin{aligned} &||\psi|| \le \frac{1}{M}||g|| = \frac{1}{M}\sup_{t\ge 0}|F(t,\varphi(t))| \le \\ &\frac{1}{M}\sup_{t\ge 0}|F(t,\varphi(t)) - F(t,0)| + \frac{1}{M}\sup_{t\ge 0}|F(t,0)| \le \\ &\frac{1}{M}(M-m)||\varphi|| + \frac{A(0)}{M} \le \frac{M-m}{M}r + \frac{A(0)}{M}. \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Из неравенства (3.6.8) следует, что $\psi \in B_r(\mathfrak{L})$, если $mr \ge A(0)$. Положим $\Phi\varphi = \psi$. Из выше сказанного следует, что $\Phi B_r(\mathfrak{L}) \subseteq B_r(\mathfrak{L})$. Кроме того, согласно лемме 3.4.1 $B_r(\mathfrak{L})$ является замкнутым подпространством полного метрического пространства $C_B(\mathbb{R}_+, E^n)$. Покажем, что $\Phi : B_r(\mathfrak{L}) \to B_r(\mathfrak{L})$ является сжимающим отображением. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r(\mathfrak{L})$ и $\psi_i = \Phi\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, тогда $\psi = \psi_1 - \psi_2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Mx + F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))$$

и подчиняется оценке

$$\begin{aligned} &||\psi|| = ||\psi_1 - \psi_2|| \le M^{-1}\sup_{t\ge 0}|F(t,\varphi_1(t)) - F(t,\varphi_2(t))| \le \\ &\frac{M-m}{M}||\varphi_1 - \varphi_2||, \end{aligned}$$

т.е.

$$||\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2|| \le \alpha||\varphi_1 - \varphi_2||$$

при всех $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r(\mathfrak{L})$, где $\alpha = M^{-1}(M - m) < 1$. Следовательно, существует единственная неподвижная точка оператора Φ, которая, очевидно, является искомым решением. Теорема доказана.

Следствие 3.6.6. *Пусть $A \in C_b(\mathbb{R}_+, [E^n])$ – самосопряженная матрица-функция. Если существуют положительные числа m и M такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$*

$$mI \le A(t) \le MI,$$

то для любой функции $f \in C_b(\mathbb{R}_+, E^n)$ уравнение

$$x'' = A(t)x + f(t)$$

допускает хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ согласованное в пределе решение.

Следствие 3.6.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.6.4 *и функция f асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in B(0, r_0)$. Тогда уравнение* (3.6.1) *имеет хотя бы одно асимптотически постоянное (асимптотически τ-периодическое, асимптотически почти периодическое, асимптотически рекуррентное) решение.*

3.7. Двояко асимптотически почти периодические решения

Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $(C(\mathbb{R}, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на $C(\mathbb{R}, E^n)$. Функцию φ назовчм двояко асимптотически постоянной (периодической, почти периодической, рекуррентной), если движение $\sigma(\varphi, \cdot)$, порожденное функцией φ в динамической системе $(C(\mathbb{R}, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$, является двояко асимптотически постоянным (периодическим, почти периодическим, рекуррентным), т.е. если существуют постоянные (периодические, почти периодические, рекуррентные) функции p_1, $p_2 \in C(\mathbb{R}, E^n)$ такие, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} p_1(t) + r_1(t), & t \in \mathbb{R}_-, \\ p_2(t) + r_2(t), & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{3.7.1}$$

где $r_1, r_2 \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} |r_1(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |r_2(t)| = 0$. При этом будем использовать обозначение $(\varphi; p_1, p_2)$.

Типичным примером двояко асимптотически постоянной функции является функция $\varphi(t) = arctgt$.

Теорема 3.7.1. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уст. L и $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения*

(3.3.2). *Если каждое уравнение семейства*

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y, \quad (B \in \Delta_A), \tag{3.7.2}$$

где $\Delta_A = \omega_A \cup \alpha_A$, *не имеет ненулевых ограниченных на* $\mathbb{R}$ *решений, то решение* φ *сильно согласовано в пределе, т.е.* $\mathfrak{L}_{(A,f)} \subseteq \mathfrak{L}_\varphi$, *где* $\mathfrak{L}_\varphi = \big\{\{t_n\} : \lim\limits_{n\to\pm\infty} |t_n| = +\infty$ *и* $\{\varphi^{(t_n)}\}$ *сходится* $\}$.

Доказательство. Сформулированное предложение получается из теоремы 2.5.4, если её применить к неавтономной динамической системе из примера 3.1.4 (см. доказательство теоремы 3.3.1).

Следствие 3.7.2. *Пусть* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ *и* $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ *– двояко асимптотически постоянны* (*совместно периодичны, почти периодичны, совместно рекуррентны*) *и* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение уравнения* (3.3.2). *Если каждое уравнение семейства* (3.7.2) *не имеет ненулевых ограниченных на* $\mathbb{R}$ *решений, то решение* φ *двояко асимптотически постоянно* (*периодично, почти периодично, рекуррентно*).

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ назовём стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклинической, если движение $\sigma(\varphi, \cdot)$ в динамической системе $(C(\mathbb{R}, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ является стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклиническим, т.е. существует постоянная (периодическая, почти периодическая, рекуррентная) функция $p \in C(\mathbb{R}, E^n)$ такая, что

$$\varphi(t) = p(t) + \omega(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

где $\omega \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $\lim\limits_{|t|\to+\infty} |\omega(t)| = 0$. При этом будем использовать обозначение $(\varphi; p)$.

Пусть $(\varphi_i; p_i)$ $(i = 1, 2)$ – стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклинические функции из $C(\mathbb{R}, E^{n_i})$ $(i = 1, 2)$. Будем говорить, что $(\varphi_1; p_1)$ и $(\varphi_2; p_2)$ совместно стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклиничны, если функции $p_1 \in C(\mathbb{R}, E^{n_1})$ и

$p_2 \in C(\mathbb{R}, E^{n_2})$ стационарны (совместно периодичны, почти периодичны, совместно рекуррентны).

Следствие 3.7.3. *Пусть* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ *и* $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ *совместно стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклиничны и* φ *– ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение уравнения* (3.3.2). *Если каждое уравнение семейства* (3.7.2) *не имеет ненулевых ограниченных на* $\mathbb{R}$ *решений, то решение* φ *стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклинично.*

Следствия 3.7.2 и 3.7.3 вытекают из теорем 3.7.1 и 2.5.2.

Замечание 3.7.4. *В условиях теоремы* 3.7.1 *и следствий* 3.7.2 *и* 3.7.3*, вообще говоря, нельзя гарантировать существование хотя бы одного ограниченного на* $\mathbb{R}$ *решения уравнения* (3.3.2)*. Сказанное подтверждается следующим уравнением*

$$\frac{dx}{dt} = (arctgt)x + f(t).$$

В связи со сказанным представляет интерес следующий результат [**33**]: пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ уст. L и каждое уравнение семейства (3.7.2) не имеет ненулевых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений и $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{E}^n)$. Для того чтобы уравнение (3.3.2) имело хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big\langle f(t), \psi(t) \big\rangle dt = 0 \tag{3.7.3}$$

для любого ограниченного на $\mathbb{R}$ решения ψ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -A^*(t)y, \tag{3.7.4}$$

где $A^*(t)$ – матрица, сопряженная и $A(t)$ и $\big\langle , \big\rangle$ – скалярное умножение в E^n.

Обозначим через $E_0 = \{x \in E^n : \sup\{\varphi(t,x,A)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$, где $\varphi(t,x,A) = U(t,A)x$, и P_0 – проектор, отображающий E^n на E_0.

Напомним (см., например, [**53**]), что уравнение (3.3.1) называют слабо регулярным, если для любой функции $f \in C_b(\mathbb{R},$

E^n) существует хотя бы одно решение $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$. Имеет место

Лемма 3.7.5. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$. Если A ограничена на $\mathbb{R}$ и уравнение* (3.3.1) *слабо регулярно, то для любого $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ существует единственное решение $\varphi_0 \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ уравнения* (3.3.2) *удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $P_0\varphi_0(0) = 0$.
2) *Существует положительная константа K* (*константа слабой регулярности уравнения* (3.3.1)), *не зависящая от f, такая что $||\varphi_0|| \leq K||f||$.*

Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и лемма 6.3 из [**47**, с.515].

Теорема 3.7.6. *Пусть матрица-функция $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ уст. L и уравнение* (3.3.1) *слабо регулярно, тогда*

1) *Какова бы ни была ограниченная на $\mathbb{R}$ функция f уравнение* (3.3.2) *имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ решение.*
2) *Если $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уст. L, то всякое ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения* (3.3.2) *сильно согласовано в пределе.*
3) *Если $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уст. L, то существует единственное сильно согласованное в пределе решение φ_0 уравнения* (3.3.2) *такое, что $P_0\varphi_0(0) = 0$ и $||\varphi_0|| \leq K||f||$, где K – константа слабой регулярности уравнения* (3.3.1).

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно. Докажем второе утверждение. Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уст. L и уравнение (3.3.1) слабо регулярно. Тогда оно гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ и, согласно теореме 4.4.1 из [**53**], каждое уравнение семейства (3.7.2) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений. Согласно теореме 3.7.1 каждое ограниченное на $\mathbb{R}$ решение сильно согласовано в пределе.

Третье утверждение теоремы вытекает из второго утверждения и леммы 3.7.5. Теорема доказана.

Теорема 3.7.7. **[2]**,**[105]** *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ уст. L. Тогда*

1) *Если для любого $B \in \omega_A$ уравнение (3.3.3) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то для любого $B \in \omega_A$ $n_A^s = n_B^s$, где $n_A^s = dim E_A^s$ и $E_A^s = \{x | x \in E^n, \ |\varphi(t, x, A)| \to 0$ при $t \to +\infty\}$.*
2) *Если для любого $B \in \alpha_A$ уравнение (3.3.3) не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}$ решений, то для любого $B \in \alpha_A$ $n_A^u = n_B^u$, где $n_A^u = dim E_A^u$ и $E_A^u = \{|x \in E^n, \ |\varphi(t, x, A)| \to 0$ при $t \to -\infty\}$.*

Теорема 3.7.8. **[22]**,**[53]** *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ почти периодична и спектр матрицы*

$$\overline{A} = \lim \frac{1}{2T} \int\limits_0^T A(t)dt$$

не пересекается с мнимой осью. Тогда при достаточно малых ε уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x \tag{3.7.5}$$

гиперболично на $\mathbb{R}$. Кроме того, $n_\varepsilon^s = \overline{n}^s$ и $n_\varepsilon^u = \overline{n}^u$ при достаточно малых ε, где $n_\varepsilon^s = n_{\varepsilon A}^s$, $n_\varepsilon^u = n_{\varepsilon A}^u$, $\overline{u}^s = n_{\bar{A}}^s$ и $\overline{n}^u = n_{\bar{A}}^u$.

Теорема 3.7.9. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ двояко асимптотически почти периодична и спектры матриц*

$$\overline{A}_\pm = \lim_{T \to \pm\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T A(t)dt$$

не пересекаются с мнимой осью. Тогда при достаточно малых ε:

1) *Для произвольного $B \in \Delta_A = \omega_A \cup \alpha_A$ уравнение*
$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon B(t)y$$
не имеет ненулевых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.
2) *$n_\varepsilon^s = n_+$ $(n_+ = n_{\bar{A}_+}^s)$ и $n_\varepsilon^u = n_-$ $(n_- = n_{\bar{A}_-}^u)$.*

Доказательство. Если A двояко асимптотически почти периодична, то существуют почти периодические матрицы P_+, $P_- \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ такие, что

$$A(t) = P_\pm(t) + R_\pm(t)$$

при всех $t \in \mathbb{R}_\pm$ и $\lim\limits_{t\to\pm\infty} ||R_\pm(t)|| = 0$.

Из теоремы 3.7.8 следует, что при достаточно малом ε уравнение

$$z' = \varepsilon P_\pm(t) z \tag{3.7.6}$$

гиперболично на $\mathbb{R}$ и $n^\alpha_{\varepsilon P_\pm} = n^\alpha_{\overline{A}_\pm} = n^\alpha_\pm$ $(\alpha = s, u)$. Так как $\omega_{\varepsilon A} = \omega_{\varepsilon P_+}$ и $\alpha_{\varepsilon A} = \alpha_{\varepsilon P_-}$, то первое утверждение теоремы вытекает из гиперболичности на $\mathbb{R}$ уравнений (3.7.6).

Согласно теореме 3.7.7 $n^s_{\varepsilon A} = n^s_{\varepsilon P_+}$ и $n^u_{\varepsilon A} = n^u_{\varepsilon P_-}$. Так как при достаточно малых ε имеем $n^\alpha_{\varepsilon P_\pm} = n^\alpha_\pm$ $(\alpha = s, u)$, то при тех же ε $n^s_{\varepsilon A} = n^s_+$ и $n^u_{\varepsilon A} = n^u_-$. Теорема доказана.

Следствие 3.7.10. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ двояко асимптотически почти периодична и спектры матриц $\overline{A}_+$ и $\overline{A}_-$ не пересекаются с мнимой осью, тогда:*

1) *Если $n_+ + n_- \geq n$, то при достаточно малых ε уравнение (3.7.5) слабо регулярно.*
2) *Если $n_+ + n_- = n$, то при достаточно малых ε уравнение (3.7.5) гиперболично на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.7.9, а также результатов работы **[53]** (см. задачи 32 и 35 на стр. 107, а также теорему 4.4.4).

Замечание 3.7.11. *$n_+ = n^s_{\overline{A}_+}$ совпадает с числом собственных чисел матрицы $\overline{A}_+$, имеющих отрицательные вещественные части, и $n_- = n^u_{\overline{A}_-}$ совпадает с числом собственных чисел матрицы $\overline{A}_-$ с положительными вещественными частями.*

Теорема 3.7.12. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ двояко асимптотически почти периодичны и спектры матриц $\overline{A}_+$ и $\overline{A}_-$ не пересекаются с мнимой осью, тогда:*

1) *Если* $n_+ + n_- \geq n$, *то при достаточно малом* ε *уравнение* (3.3.9) *имеет хотя бы одно ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение и всякое ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение уравнения* (3.3.9) *двояко асимптотически почти периодично.*
2) *Если* A *и* f *являются совместно стационарно (периодически, почти периодически) гомоклиническими, то при достаточно малых* ε *уравнение* (3.3.9) *имеет единственное ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение, которое является стационарно (периодически, почти периодически) гомоклиническим.*

Доказательство. Теорема вытекает из следствия 3.7.10, теоремы 3.7.6 и следствий 3.7.2 и 3.7.3.

Теорема 3.7.13. *Пусть матрица-функция* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ *ограничена на* $\mathbb{R}$, *уравнение* (3.3.1) *слабо регулярно и функция* $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ *удовлетворяет следующему условию:* $|F(t,x)| \leq c(|x|)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $x \in E^n$, *где* $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – *неубывающая функция. Если* $\{r > 0 : Kc(r) \leq r\} \neq 0$, *где* K – *константа слабой регулярности уравнения* (3.3.1), *то уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t,x) \tag{3.7.7}$$

имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ *решение.*

Доказательство. Уравнение (3.3.3) для любой функции $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ имеет единственное решение $\psi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ такое, что

$$P_0\psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad ||\psi|| \leq K||f||, \tag{3.7.8}$$

где K – константа слабой регулярности для (3.3.1). Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + F(t, \varphi(t)). \tag{3.7.9}$$

Так как $|F(t,\varphi(t))| \leq c(|\varphi(t)|) \leq c(||\varphi||)$, то функция $f(t) = F(t, \varphi(t))$ ограничена на $\mathbb{R}$ и, следовательно, уравнение (3.7.9) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение Ψ_φ, удовлетворяющее условиям (3.7.8) и, в частности,

$$||\Psi_\varphi|| \leq K||f|| = K \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t, \varphi(t))| \leq Kc(||\varphi||).$$

Определим оператор $\Phi : C_b(\mathbb{R}, E^n) \to C_b(\mathbb{R}, E^n)$ по следующему правилу: $(\Phi\varphi)(t) = \Psi_\varphi(t)$ $(\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ и $t \in \mathbb{R})$. Покажем, что если $r_0 > 0$ удовлетворяет условию $Kc(r_0) \leq r_0$, то шар $B[0, r_0] = \{\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n) : ||\varphi|| \leq r_0\}$ переходит в себя при отображении Φ. Действительно, $||\Phi_\varphi|| \leq Kc(||\varphi||) \leq Kc(r_0) \leq r_0$. Рассмотрим теперь $C_b(\mathbb{R}, E^n)$ как подмножество, вложенное в $C(\mathbb{R}, E^n)$. Прежде всего заметим, что любой шар $B[0, r] \subset C_b(\mathbb{R}, E^n)$ является выпуклым, ограниченным и замкнутым подмножеством $C(\mathbb{R}, E^n)$.

Отображение $\Phi : B[0, r_0] \to B[0, r_0]$ непрерывно в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Действительно, пусть $\{\varphi_k\} \subseteq B_{r_0}$ и $\varphi_k \to \varphi$ в $C(\mathbb{R}, E^n)$. Рассмотрим последовательность $(\Phi\varphi_k)(t) = \Psi_{\varphi_k}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Заметим, что $f_k(t) = F(t, \varphi_k(t)) \to f(t) = F(t, \varphi(t))$ в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $L_0 > 0$ такие, что

$$\max_{|t| \leq L_0} |F(t, \varphi_k(t)) - F(t, \varphi(t))| \geq \varepsilon_0.$$

Следовательно, существует $\{t_k\} \subset [-L_0, L_0]$ такая, что

$$|F(t_k, \varphi_k(t_k)) - F(t_k, \varphi(t_k))| \geq \varepsilon_0. \tag{3.7.10}$$

Так как последовательность $\{t_k\}$ ограничена, то ец можно считать сходящейся. Пусть $t_0 = \lim\limits_{k \to +\infty} t_k$. Поскольку $|\varphi_k(t_k) - \varphi(t_0)| \leq |\varphi_k(t_k) - \varphi(t_k)| + |\varphi(t_k) - \varphi(t_0)| \leq \max\limits_{|t| \leq L_0} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| + |\varphi(t_k) - \varphi(t_0)|$, то в пределе получим $\varphi_k(t_k) \to \varphi(t_0)$. В таком случае из неравенства (3.7.10) следует, что $\varepsilon_0 \leq 0$. Это противоречит выбору ε_0. Таким образом, $f_k \to f$ в $C(\mathbb{R}, E^n)$ и, кроме того, $||f_k|| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |F(t, \varphi_k(t))| \leq c(||\varphi_k||) \leq c(r_0)$, т.е. $|f_k(t)| \leq c(r_0)$ $(t \in \mathbb{R})$ и, следовательно, $|f(t) \leq c(r_0)$ $(t \in \mathbb{R})$. С другой стороны, $\Phi\varphi_k$ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + f_k(t).$$

Кроме того, функции $\Phi\varphi_k$ и их производные равномерно ограничены на $\mathbb{R}$ и, следовательно, последовательность $\{\Phi\varphi_k\}$ компактна в $C(\mathbb{R}, E^n)$. Так как $f_k \to f$ в $C(\mathbb{R}, E^n)$, то каждая предельная функция последовательности $\{\Phi\varphi_k\}$ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (3.3.2), удовлетворяющим условиям (3.7.8). Но в силу леммы 3.7.5 уравнение (3.3.2) имеет ровно одно ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, удовлетворяющее условиям (3.7.8). Из сказанного следует, что последовательность $\{\Phi\varphi_k\}$ сходится в $C(\mathbb{R}, E^n)$ и непрерывность Φ установлена.

Теперь покажем, что отображение $\Phi : B[0, r_0] \to B[0, r_0]$ вполне непрерывно в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Для этого заметим, что

$$(\Phi\varphi)'(t) = A(t)(\Phi\varphi)(t) + F(t, \varphi(t))$$

и, следовательно,

$$|(\Phi\varphi)'(t)| \leq a|(\Phi\varphi)(t)| + |F(t, \varphi(t))| \leq ar_0 + r_0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

где $a = \sup\{||A(t)|| : t \in \mathbb{R}\}$. Откуда следует, что $\Phi(B[0, r_0])$ относительно компактно в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Согласно теореме Тихонова-Шаудера отображение Φ имеет по крайнем мере неподвижную точку $\varphi \in B[0, r_0]$. Очевидно, φ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (3.7.7). Теорема доказана.

Теорема 3.7.14. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ уст. L и выполнены следующие условия:*

1) *Уравнение* (3.3.1) *слабо регулярно.*
2) $|F(t, x)| \leq c(|x|)$ $(t \in \mathbb{R}, x \in E^n)$ *и* $\{r > 0 : Kc(r) \leq r\} \neq \emptyset$, *где* $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– неубывающая функция, а* K *– константа слабой регулярности уравнения* (3.3.1).
3) *Сужение F_0 функции F на $\mathbb{R} \times B[0, r_0]$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой Липшица $L < K^{-1}$, где r_0 – некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству* $Kc(r_0) \leq r_0$.

Тогда уравнение (3.7.7) *имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ сильно согласованное в пределе решение.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}_{(A,F_0)}$ и $C_{r_0}(\mathfrak{L}) = \{\varphi : \varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n),\ ||\varphi|| \leq r_0$ и $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_{\varphi}^{+\infty}\}$. Также как и в лемме 3.4.1 доказывается, что $C_{r_0}(\mathfrak{L})$ является замкнутым подмножеством $C_b(\mathbb{R}, E^n)$. Оператор $\Phi : C_b(\mathbb{R}, E^n) \to C_b(\mathbb{R}, E^n)$, определенный также как и при доказательстве теоремы 3.7.7, переводит

$C_{r_0}(\mathfrak{L})$ в себя. Действительно, если $\varphi \in C_{r_0}(\mathfrak{L})$, то также как и в лемме 3.4.2 доказывается, что функция $f(t) = F(t, \varphi(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ также принадлежит $C_{r_0}(\mathfrak{L})$. Согласно теореме 3.7.6 $\Phi\varphi$ – единственное на $\mathbb{R}$, сильно согласованное в пределе решение уравнения (3.3.2), удовлетворяющее условиям (3.7.5). Поскольку для произвольных $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{r_0}(\mathfrak{L})$

$$(\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2)'(t) = A(t)[(\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2)(t)] + F(t, \varphi_1(t) - F(t, \varphi_2(t)),$$

то

$$||\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2|| \leq K \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))| \leq KL||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

Из последнего неравенства следует, что $\Phi : C_{r_0}(\mathfrak{L}) \to C_{r_0}(\mathfrak{L})$ является сжатием, поэтому оно имеет единственную неподвижную точку, которая, в силу доказанного выше, и является сильно согласованным в пределе решением. Теорема доказана.

Функция $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ называется асимптотоически почти периодической (двояко асимптотически почти периодической) по переменной $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на компактах из E^n, если движение $\sigma(t, f)$ динамической системы $(C(\mathbb{R}\times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ порождаемое функцией f является асимптотоически почти периодическим (двояко асимптотически почти периодическим).

Путь Q компакт из E^n. Функцию $f \in C(\mathbb{R} \times Q, E^n)$ назовем асимптотически почти периодической по переменной $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $x \in Q$ (двояко асимптотически почти периодической), если движение $\sigma(t, f)$ динамической системы $(C(\mathbb{R}\times Q, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$, порождаемое функцией f является асимптотоически почти периодическим (двояко асимптотически почти периодическим).

Следствие 3.7.15. *Если в условиях теоремы* 3.7.8 *функции* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ *и* $E_0 = F \big|_{\mathbb{R}\times B[0,r_0]}$ *двояко асимптотически постоянны* (*совместно периодичны, почти периодичны, совместно рекуррентны*), *то уравнение* (3.7.7) *допускает по крайней мере одно двояко асимптотически постоянное* (*периодическое, почти периодическое, рекуррентное*) *решение.*

Следствие 3.7.16. *Если в условиях теоремы* 3.7.8 *функции* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ *и* $F_0 = F\,\big|_{\mathbb{R}\times B_{r_0}(0)}$ *совместно стационарно (периодично, почти периодично, рекуррентно) гомоклиничны, то уравнение* (3.7.7) *допускает по крайней мере одно стационарно (периодически, почти периодически, рекуррентно) гомоклиническое решение.*

Теорема 3.7.17. *Пусть* $\varphi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – *ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* (3.1.1) *и функция* $f \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ *двояко асимптотически постоянна по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* $x \in Q = \overline{\varphi(\mathbb{R})}$ *(периодична, почти периодична, рекуррентна) и выполнены следующие два условия:*

1) *Какова бы ни была функция* $g \in \omega_{f_Q}$ *все решения уравнения* (3.1.2) *из* ω_φ *разделены в* ω_φ.
2) *Какова бы ни была функция* $g \in \alpha_{f_Q}$ *все решения уравнения* (3.1.2) *из* α_φ *разделены в* α_φ.

Тогда решение φ *двояко асимптотически постоянно (периодично, почти периодично, рекуррентно).*

Доказательство. Сформулированная теорема вытекает из теоремы 3.6.1.

Теорема 3.7.18. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ *и выполнены условия* 1) – 4) *по* $t \in \mathbb{R}$ *и* $x \in B[x_0, \rho]$. *Если спектр матрицы* $A = f_0'(x_0)$ *не пересекается с мнимой осью и* f *стационарно* (τ-*периодически, почти периодически) гомоклинично по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* $x \in B_\rho(x_0)$ *вместе со своей производной* f_x', *то при достаточно малом* $\rho_0 > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (3.5.1) *имеет единственное стационарно* (τ-*периодически, почти периодически) гомоклиническое решение* $x_\varepsilon(t)$, *удовлетворяющее условию*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x_\varepsilon(t) - x_0| \le \rho_0.$$

Доказательство. Из равенства (3.5.6) следует, что наряду с функцией $v(t,h) = f(t, x_0 + h) - f_0(x_0 + h)$ стационарно (τ-периодически, почти периодически) гомоклинической по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $z \in B[0, \rho_0]$ будет и функция $v(t, h, \varepsilon)$. Из равенства (3.5.13) следует, что функция F, определенная равенством (3.5.13), также будет стационарно (τ-периодически, почти периодически) гомоклинической по $\tau \in \mathbb{R}$ равномерно по $z \in B[0,\rho_0]$. Из (3.5.9) и (3.5.10) следует, что к уравнению (3.5.8) применимы теорема 3.7.14 и следствие 3.7.16. Таким образом, уравнение (3.5.8) имеет хотя бы одно стационарно (τ-периодически, почти периодически) гомоклиническое решение $z_\varepsilon(t)$, принимающее значения в шаре $B[0,\rho_0]$. Легко заметить, что условие (3.5.10) гарантирует единственность такого решения. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что искомым решением уравнения (3.5.1) является функция

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + z_\varepsilon(t) - \varepsilon v(t, z_\varepsilon(t), \varepsilon).$$

Теорема доказана.

3.8. Асимптотически почти периодические уравнения с конвергенцией

Применяя результаты § 2.6 и § 2.7 к неавтономной динамической системе, построенной в примере 3.1.1 по уравнению (3.1.1), получим ряд критериев и признаков конвергентности уравнения (3.1.1).

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3.1.1) с регулярной правой частью $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$. Уравнение (3.1.1) назовчм конвергентным, если порождаемая ею неавтономная динамическая система (см. пример 3.1.1 и замечание 3.1.2) конвергентна. Уточним это определение.

Всюду в этом параграфе предполагаем, что правая часть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ уравнения (3.1.1) асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на компактах из E^n.

В соответствии с приведенным выше определением уравнение (3.1.1) конвергентно, если выполнены следующие условия:

1) Существует положительное число R такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, u, g)| < R$$

при всех $u \in E^n$ и $g \in H^+(f)$.

2) Каково бы ни было $g \in \omega_f$ уравнение (3.1.2) имеет ровно одно стационарное (τ-периодическое, почти периодическое, рекуррентное) решение.

Отметим, что данное нами определение конвергентности существенно отличается от принятого в литературе (см., например, [**11**]). Обычно под конвергентностью уравнения (3.1.1) понимают наличие единственного ограниченного на $\mathbb{R}$ равномерно асимптотически устойчивого в целом решения уравнения (3.1.1). При этом это единственное ограниченное решение называется предельном режимом уравнения (3.1.1).

Из результатов работ [**80**], [**100**],[**101**] следует, что если уравнение (3.1.1) обладает свойством конвергентности в смысле [**11**, гл.4], то и каждое уравнение (3.1.2) обладает этим свойством для любого $g \in H^+(f)$ и, следовательно, порождаемая уравнением (3.1.1) неавтономная система (см. замечание 3.1.2) конвергентна. В то же время легко построить примеры неконвергентных в смысле [**11**, гл.4] уравнений, которые порождают конвергентные неавтономные динамические системы. Дело здесь в том, что уравнение (3.1.1) может иметь "предельный режим", который не является решением уравнения (3.1.1). Однако, если правая часть f уравнения (3.1.1) не зависит от t (τ-периодична по t, почти периодична по t, рекуррентна по t), то данное нами определение совпадет с общепринятым определением (это вытекает из приводимых ниже результатов).

Имеют место следующие результаты.

Теорема 3.8.1. *Для того чтобы уравнение* (3.1.1) *было конвергентным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *Каково бы ни было $g \in H^+(f)$ каждое решение $\varphi(t,u,g)$ ($u \in E^n$) уравнения* (3.1.2) *ограничено на $\mathbb{R}_+$.*
2) $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t,u_1,g) - \varphi(t,u_2,g)| = 0$ *при всех $g \in H^+(f)$ и $u_1, u_2 \in E^n$.*
3) *Для любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ такое, что $|u_1 - u_2| < \delta$ влечцт $|\varphi(t,u_1,g) -$*

$\varphi(t,u_2,g)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T}_+, g \in H^+(f)$ и $u_1, u_2 \in E^n$, таких что $|u_1|, |u_2| \le r$.

Теорема 3.8.2. *Для того чтобы уравнение* (3.1.1) *было конвергентным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *Каково бы ни было $g \in H^+(f)$ каждое решение $\varphi(t,u,g)$ $(u \in E^n)$ уравнения* (3.1.2) *ограничено на $\mathbb{R}_+$.*
2) *Для произвольных $g \in H^+(f)$ и $u \in E^n$ решение $\varphi(t,u,g)$ уравнения* (3.1.2) *асимптотически устойчиво, т.е. выполнены следующие два условия:*

   а) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon,u,g) > 0$ такое, что $|v-u| < \delta$ влеччт $|\varphi(t,v,g)-\varphi(t,u,g)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$;*

   б) *существует $\gamma = \gamma(u,g) > 0$ такое, что $|v-u| < \gamma$ влеччт $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi(t,v,g) - \varphi(t,u,g)| = 0$.*

Сформулированные утверждения вытекают из теорем 2.6.3 и 2.6.6.

Замечание 3.8.3. 1) *В случае почти периодичности f теорема* 3.8.1 *обобщает и уточняет критерий почти периодической конвергенции В.И. Зубова* [**16**].

2) *В случае периодичности f теорема* 3.8.2 *совпадает с теоремой Н.Н. Красовского – В.А. Плисса* [**40**].

Теорема 3.8.4. *Пусть $A \in C(\mathbb{R},[E^n])$, $f \in C(\mathbb{R},E^n)$ и $F \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ совместно асимптотически постоянны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны) и функция F удовлетворяет условию Липшица по пространственной переменной равномерно по $t \in \mathbb{R}$ с достаточно малой константой Липшица. Тогда если нулевое решение* (3.3.1) *равномерно экспоненциально устойчиво, то уравнение* (3.3.4) *конвергентно.*

Доказательство. Обозначим

$$H^+(A,f,F) = \overline{\{(A^{(\tau)}, f^{(\tau)}, F^{(\tau)}) | \tau \in \mathbb{R}_+\}}.$$

Пусть $u \in E^n$, $(B,g,G) \in H^+(A,f,F)$ и $\tau \in \mathbb{R}_+$. Обозначим через $\varphi(\cdot,u,B,g,G)$ решение уравнения

$$\frac{du}{dt} = B(t)u + g(t) + G(t,u), \tag{3.8.1}$$

проходящее через точку u при $t = 0$.

Положим $Y = H^+(A,f,F)$ и через $(Y,\mathbb{R},\sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y. Пусть $X = E^n \times Y$. Определим на X динамическую систему по следующему правилу: $\pi^\tau(u,B,g,G) = (\varphi(\tau,u,B,g,G); B^{(\tau)}, g^{(\tau)}, G^{(\tau)})$. В условиях теоремы $H^+(A,f,F)$ компактно и тройка $\big\langle(X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y,\mathbb{R},\sigma), h\big\rangle$, где $h = pr_2 : X \to Y$, есть неавтономная динамическая система. Покажем, что для построенной неавтономной динамической системы применима теорема 2.7.4. Поскольку пространство непрерывных сечений $\Gamma(H(A,f,F), E^n \times H(A,f,F))$ изоморфно пространству всех отображений $\chi : H(A,f,F) \to E^n$, то оно непусто. Определим на $X \bigotimes X$ скалярную неотрицательную функцию V по следующему правилу:

$$V((u_1,B,g,G),(u_2,B,g,G)) = \int\limits_0^{+\infty} |U(t,B)(u_1 - u_2)| d\tau$$

для любых $(B,g,G) \in H(A,f,F)$, u_1 и $u_2 \in E^n$ ($U(t,B)$ – оператор Коши уравнения (3.3.3). Также, как и в работе [**57**] (см. также [**71**, гл.5]), проверяется, что функция V удовлетворяет условиям а) – г) леммы 2.7.3 и, следовательно, существует непрерывное инвариантное ограниченное сечение гомоморфизма h.

Также, как и в теореме 2.7.4, легко установить, что

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t,u_1,B,g,G) - \varphi(t,u_2,B,g,G)| = 0$$

при всех $u_1, u_2 \in E^n$ и $(B,g,G) \in H^+(A,f,F)$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно применить лемму 2.7.1 к неавтономной системе $\big\langle(X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y^+,\mathbb{R}_+,\sigma),h\big\rangle$, где $Y^+ = H^+(A,f,F)$. Теорема доказана.

Теорема 3.8.5. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на компактах из E^n. Если существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$Re\Big\langle (u-v), f(t,u) - f(t,v) \Big\rangle \leq -\alpha |u-v|^2 \qquad (3.8.2)$$

при всех $u, v \in E^n$ и $t \in \mathbb{R}$, то уравнение (3.1.1) *конвергентно.*

Доказательство. Пусть $Y = H(f)$, $X = E^n \times Y$ и $\Big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \Big\rangle$ – неавтономная динамическая система из примера 3.1.1. Определим на $X \bigotimes X$ функцию V по следующему правилу:

$$V((u,g),(v,g)) = |u-v|.$$

Функция V, очевидно, удовлетворяет условиям а) – в) леммы 2.7.3. Покажем, что она удовлетворяет и условию г) этой леммы. Для этого заметим, что для любого $g \in H(f)$ из неравенства (3.8.2) следует

$$Re\langle (u-v), g(t,u) - g(t,v) \rangle \leq -\alpha |u-v|^2 \qquad (3.8.3)$$

при всех $u, v \in E^n$ и $t \in \mathbb{R}$. Положим $\varphi(t) = |\varphi(t,u,g) - \varphi(t,v,g)|^2$, тогда из (3.8.3) получим $\frac{d\varphi}{dt} \leq -2\alpha\varphi(t)$ и, следовательно,

$$|\varphi(t,u,g) - \varphi(t,v,g)| \leq e^{-\alpha t}|u-v| \qquad (3.8.4)$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+, u, v \in E^n$ и $g \in H(f)$. Тем самым функция V удовлетворяет и условию г) леммы 2.7.3 и, следовательно, существует единственное инвариантное сечение $\gamma \in \Gamma(H(f)), E^n \times H(f))$ гомоморфизма h. Кроме того, из (3.8.3) следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t,u,g) - \varphi(t,v,g)| = 0 \qquad (3.8.5)$$

при всех $g \in H(f)$ и $u, v \in E^n$. Теперь для завершения доказательства теоремы, также, как и в предыдущей теореме, достаточно применить лемму 2.7.1 к неавтономной динамической системе $\Big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y^+, \mathbb{R}_+, \sigma), h \Big\rangle$, где $Y^+ = H^+(f)$. Теорема доказана.

Замечание 3.8.6. *Теорема* 3.8.4 *остаçтся в силе, если условие* (3.8.2) *заменить следующим:*

$$Re\big\langle W(u-v), f(t,u)-f(t,v)\big\rangle \le -\alpha|u-v|^2$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ *и* $u, v \in E^n$*, где* W *– некоторая самосопряженная положительно определенная матрица.*

В этом случае при доказательстве теоремы надо использовать вместо неравенства (3.8.4) следующее неравенство:

$$|\varphi(t,u,g)-\varphi(t,v,g)| \le Ne^{-\alpha t}|u-v|_w,$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $u, v \in E^n$, где $|u|_w = \sqrt{\langle Wu, u\rangle}$ и N – некоторая положительная константа, зависящая только от матрицы W.

Следствие 3.8.7. *Пусть выполнены следующие условия*

1) $f \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ *асимптотически постоянна (асимптотически* τ*-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* x *на компактах из* E^n;
2) f *непрерывно дифференцируема по* $x \in E^n$;
3) *Наибольшее собственное число* $\Lambda(t,x)$ *матрицы*

$$f_x'^*(t,x)Q + Qf_x'(t,x)$$

удовлетворяет неравенству $\Lambda(t,x) \le -\alpha < 0$, $(t \in \mathbb{R}, x \in E^n)$*, где* $\alpha > 0$ *и* Q *– некоторая самосопряженная положительно определенная матрица.*

Тогда уравнение (3.1.1) *конвергентно и, в частности, все решения уравнения* (3.1.1) *асимптотически постоянны (асимптотически* τ*-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны).*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.8.5 и замечания 3.8.6. Для этого достаточно заметить, что в условиях следствия 3.8.7, согласно теореме 1 из [**97**], существуют положительные числа N и ν такие, что

$$|\varphi(t,u,g)-\varphi(t,v,g)|_Q \le Ne^{-\nu t}|u-v|_Q$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $u, v \in E^n$.

В случае асимптотической почти периодичности f следствие 3.8.7 усиливает основной результат работы [**81**].

Замечание 3.8.8. а) *Теорема* 3.8.5 *имеет место и в том случае, если в* (3.8.5) *постоянную матрицу* W *заменить самосопряженной оператор-функцией* $\mathbb{W} \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, *удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, аналогичным тем, которые встречаются в теореме* 2 *из* [**56**]

б) *Теорема* 3.8.5 *имеет место и для уравнений в произвольном гильбертовым пространстве.*

Глава 4

Обобщенные и слабо асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений

4.1. Ограниченные на $\mathbb{R}_+$ обобщенные функции

Для произвольного $m = 2, 3, \ldots$ через $D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ обозначим пространство функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to E^n$, обладающих $m-1$ обычными производными, причем $m-1$ производная $D^{m-1}\varphi$ абсолютно непрерывна, $D^j\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ для $0 \leq j \leq m$. Через $D^\infty_{L_1}(\mathbb{R}_+)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+)$. В $D^m_{L_1}(\mathbb{R}_+)$, $m < +\infty$, введем норму

$$||\varphi||_m = \max_{0 \leq j \leq m} \int\limits_0^{+\infty} |D^j(t)| dt$$

и в $D^\infty_{L_1}(\mathbb{R}_+)$ введем локально выпуклую топологию, определяемую семейством норм $||\cdot||_m$, $m = 0, 1, 2 \ldots$.

Если $\varphi \in D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, то

$$\varphi(t) = \int\limits_t^{+\infty} D^j\varphi(s) ds + c, \tag{4.1.1}$$

где $c \in E^n$. Из равенства (4.1.1) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = c$, и так как φ суммируема, то $c = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. Если $\varphi \in D^{m+1}_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, то функции $D^j\varphi(t)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, стремятся к нулю на бесконечности и

$$D^j\varphi(t) = \int_t^{+\infty} D^{j+1}\varphi(s)ds \quad (j = \overline{1,m}).$$

Таким образом,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |D^j\varphi(t)| \le ||\varphi||_{m+1}, \quad (j = \overline{1,m}). \qquad (4.1.2)$$

Лемма 4.1.1. *Пространство $D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ $(0 \le m < +\infty)$ банахово, а $D^\infty_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ – пространство Фреше.*

Доказательство. Для $m = 0$ пространство $D^0_{L^1}(\mathbb{R}_+) = L^1(\mathbb{R}_+)$ и оно банахово. Покажем, что если для $m \le q$ пространства $D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ полны, то $D^{q+1}_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ также полно. Действительно, пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая последовательность Коши в $D^{q+1}_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\{\varphi_n\}$ является последовательностью Коши в $D^q_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, и по индуктивному предположению существует такое $\varphi \in D^q_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, что $\varphi_n \to \varphi$ в $D^q_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим теперь последовательность абсолютно непрерывных функций $\{D^q\varphi_n\}$. Так как в силу (4.1.2)

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |D^q\varphi_n(t) - D^q\varphi_m(t)| \le ||\varphi_n - \varphi_m||_{q+1},$$

то последовательность $\{D^q\varphi_n\}$ поточечно сходится на $\mathbb{R}_+$ к некоторой функции ψ. По предположению последовательность производных $\{D^{q+1}\varphi_n\}$ сходится в $L^1(\mathbb{R}_+)$. Отсюда вытекает, что ψ абсолютно непрерывна, $\{D^q\varphi_n\}$ равномерно сходится к ψ на $\mathbb{R}_+$ и $\{D^{q+1}\varphi_n\}$ сходится в $L^1(\mathbb{R}_+)$ к $D\psi$. С другой стороны, если $\varphi_n \to \varphi$ в $D^q_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, то $D^q\varphi_n \to D^q\varphi$ в $L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\psi = D^q\varphi$. Следовательно, $\varphi \in D^{q+1}_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi_n \to \varphi$ в $D^{q+1}_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

Поскольку топология в пространстве $D^\infty_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ определяется счетным семейством норм, то оно метризуемо. Покажем, что оно полно. Действительно, пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая последовательность Коши в $D^\infty_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\{\varphi_n\}$ является последовательностью Коши в каждом из пространств $D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ $(m < +\infty)$ и, следовательно, существует $\xi_m \in D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ такое, что

$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n = \xi_m$ в $D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Отсюда следует, что $\xi_0 = \xi_1 = \ldots$, значит, $\xi_0 \in D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi_n \to \xi_0$ в $D^\infty_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Лемма доказана.

Пусть Q – открытое непустое множество в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{D}(Q)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : Q \to E^n$ с компактным носителем. Сходимость в $\mathcal{D}(Q)$ определяется следующим образом. Последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится к φ, если существует такой компакт $K \subset Q$, что носители $supp\varphi_k$ всех функций φ_k содержатся в K и при каждом m

$$\max_{x\in K}|D^m\varphi_k(x) - D^m\varphi(x)| \to 0,$$

когда $k \to +\infty$. Линейное пространство $\mathcal{D}(Q)$ с введенной выше сходимостью превращается в локально выпуклое векторное топологическое пространство [**5**], [**32**], [**42**]. Через $\mathcal{D}'(Q)$ обозначим сопряженное к $\mathcal{D}(Q)$ пространство с сильной топологией.

Пусть m – целое неотрицательное число. Через $\mathcal{D}^m(Q)$ будем обозначать пространство функций $\varphi : Q \to E^n$ с m непрерывными производными и с компактным носителем. Если Q – компакт, то равенством

$$||\varphi||_m = \max_{1\le j\le m}\sup_{x\in Q}|D^j\varphi(x)|$$

определяется норма на $\mathcal{D}^m(Q)$ и оно становится банаховым пространством. Если Q – компакт, то в $\mathcal{D}(Q)$ введем локально выпуклую топологию, определяемую семейством полунорм $||\cdot||_m$.

Пусть теперь $Q_1 \subset Q_2$ – компакты в Q (Q не обязательно компактно). Тогда $\mathcal{D}^m(Q_1)$ является подпространством пространства $\mathcal{D}^m(Q_2)$ и, следовательно, в $\mathcal{D}^m(Q)$ можно ввести топологию строго индуктивного предела подпространств $\mathcal{D}^m(Q_1)$.

Пространство $\mathcal{D}(Q)$ содержится в $\mathcal{D}^m(Q)$. Топология пространства $\mathcal{D}(Q)$ является более тонкой, чем индуцированная из $\mathcal{D}^m(Q)$. Подпространство $\mathcal{D}(Q)$ плотно в $\mathcal{D}^m(Q)$.

Пусть $Q =]0,+\infty[$ и $\overline{Q} = \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. Обозначим через $C^m(Q)$ совокупность всех функций $\varphi : Q \to E^n$, обладающих непрерывными производными до m-го порядка включительно.

Совокупность всех функций φ из $C^m(Q)$, для которых все производные $D^m\varphi$ допускают непрерывное продолжение на $\overline{Q}$, обозначим через $C^m(\overline{Q})$. Норму в $C^m(\overline{Q})$ $(m < +\infty)$ введем по формуле

$$||\varphi||_{C^m(\overline{Q})} = \max_{0\leq j\leq m} \sup_{t\in\overline{Q}} |D^j\varphi(t)|.$$

Положим $C(Q) = C^0(Q)$ и $C(\overline{Q}) = C^0(\overline{Q})$.

Совокупность финитных в Q функций класса $C^m(Q)$ обозначим через $C_0^m(Q)$ $(C_0(Q) = C_0^0(Q))$. Совокупность всех функций класса $C^m(\overline{Q})$, обращающихся в нуль на границе Q вместе со всеми производными до порядка m включительно, обозначим через $C_0^m(\overline{Q})$ $(C_0(\overline{Q}) = C_0^0(\overline{Q}))$.

Заметим, что $\mathcal{D}(Q) = C_0^\infty(Q)$ и пространство $\mathcal{D}(Q)$ плотно в $\mathcal{D}_{L^1}^m(\mathbb{R}_+)$ $(0 \leq m \leq +\infty)$.

Пространство $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$, сопряженное к $\mathcal{D}_{L^1}^m(\mathbb{R}_+)$ $(0 \leq m < +\infty)$, есть банахово пространство с нормой

$$||f||'_m = \sup_{\varphi\in\mathcal{D}_{L^1}^m(\mathbb{R}_+),\ ||\varphi||\leq 1} |\langle f, \varphi\rangle|.$$

Сужение всякого функционала $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$ на $\mathcal{D}_{L^1}^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ принадлежит $\beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ и f вполне определяется своим сужением, ибо $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ плотно в $\mathcal{D}_{L^1}^m(\mathbb{R}_+)$. Оператор сужения устанавливает алгебраический изоморфизм между $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ и некоторым подпространством в $\beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, так что мы можем считать $\beta'^m(\mathbb{R}_+) \subset \beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Для $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$ следует, что $||f||'_{m+1} \leq ||f||'_m$ и, следовательно, топология в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ тоньше, чем индуцированная из $\beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Оператор сужения устанавливает алгебраический изоморфизм между $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ $(0 \leq m < +\infty)$ и некоторым подпространством в $\beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$, так что можно считать $\beta'^m(\mathbb{R}_+) \subset \beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$. Топология в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ тоньше, чем индуцированная из $\beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $f \in \beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$. Найдется такая окрестность нуля U в $\mathcal{D}_{L^1}^\infty(\mathbb{R}_+)$, что $|\langle f, \varphi\rangle| \leq 1$ для $\varphi \in U$. Тогда существует целое неотрицательное число p и такое $b > 0$, что $\{\varphi|\varphi \in \mathcal{D}_{L^1}^\infty(\mathbb{R}_+),\ ||\varphi||_p \leq b\} \subset U$. Отсюда следует, что f непрерывна на $\mathcal{D}_{L^1}^\infty(\mathbb{R}_+)$, наделенном топологией, индуцированной из

$D^p_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Так как $\mathcal{D}^\infty_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ плотно в $D^p_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, то $f \in \beta'^p(\mathbb{R}_+)$. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Лемма 4.1.2. $\beta'^\infty(\mathbb{R}_+) = \cup_{0 \le m < +\infty} \beta'^m(\mathbb{R}_+)$.

Из плотности $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ в $\mathcal{D}^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ следует, что сужение на $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}_+)$ некоторого функционала $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$ определяет распределение в $\mathcal{D}'^m(\mathbb{R}_+)$, причем f вполне определяется своим сужением. Следовательно, пространство $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ можно отождествить с некоторым подпространством пространства $\mathcal{D}'^m(\mathbb{R}_+)$ распределений порядка $\le m$. Элементы пространства $\beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$ назовем ограниченными на $\mathbb{R}_+$ распределениями. Отметим, что поскольку $\beta'^0(\mathbb{R}_+)$ является сопряженным к пространству $\mathcal{D}^0_{L^1}(\mathbb{R}_+) = L^1(\mathbb{R}_+)$, то $\beta'^0(\mathbb{R}_+) = L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Из леммы 4.1.2 заключаем, что всякое ограниченное на $\mathbb{R}_+$ распределение имеет конечный порядок.

Далее мы рассмотрим мультипликаторы в пространствах $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$. Для $\alpha \in \beta^m(\mathbb{R}_+)$, $\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ $(0 \le m < +\infty)$ имеет место включение $\alpha\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ и что билинейное отображение $(\alpha, \varphi) \to \alpha\varphi$ произведения $\beta^m(\mathbb{R}_+) \times D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ в $D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ непрерывно. Произведение αf распределения $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$ на функцию $\alpha \in \beta^m(\mathbb{R}_+)$ можно определить обычным образом:

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle, \quad (\varphi \in D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)).$$

Таким образом, функции из $\beta^m(\mathbb{R}_+)$ являются мультипликаторами в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$. Для $m < +\infty$ билинейное отображение $(\alpha, f) \to \alpha f$ из $\beta^m(\mathbb{R}_+) \times \beta'^m(\mathbb{R}_+)$ в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ непрерывно. Действительно, пусть $f_n \to f$, т.е. $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ для любого $\varphi \in D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ и $\alpha_n \to \alpha$ в $\beta^m(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$|\langle \alpha_n f_n, \varphi \rangle - \langle \alpha f, \varphi \rangle| = |\langle \alpha_n f_n - \alpha_n f, \varphi \rangle +$$
$$\langle \alpha_n f - \alpha f, \varphi \rangle| \le |\langle f_n - f, \alpha_n\varphi \rangle| + |\langle f, (\alpha_n - \alpha)\varphi \rangle| \le$$
$$||\alpha_n\varphi||_m ||f_n - f||'_m + ||f||'_m ||(\alpha_n - \alpha)\varphi||_m$$

и, следовательно, $\alpha_n f_n \to \alpha f$. Для $m = \infty$ это билинейное отображение является во всяком случае раздельно непрерывным.

Дифференцирование в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ определяется обычным в теории распределений образом и имеет обычные свойства. Если $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$, то $Df \in \beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, ибо оператор дифференцирования распределений из $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$ является сопряженным к оператору $-D : \mathcal{D}^{m+1}_{L^1}(\mathbb{R}_+) \to \mathcal{D}^m_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Заметим, что для $\alpha \in \beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ и $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$D(\alpha f) = (D\alpha)f + \alpha(Df).$$

Пусть $h \in \mathbb{R}_+$. Сдвиг $Q + h$ открытого множества $Q \subset \mathbb{R}_+$ является открытым. Для $\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^1}(Q)$ положим $(\tau_h\varphi)(t) = \varphi(t+h)$ так, что $\tau_h\varphi \in D^m_{L^1}(Q + h)$. Оператор сдвига функций на h

$$\tau_h : D^m_{L^1}(Q) \to D^m_{L^1}(Q + h)$$

есть изоморфизм. Оператор сдвига распределений на h (обозначим его также через τ_h) определим как оператор из $\beta'^m(Q)$ в $\beta'^m(Q+h)$ равенством $\langle\tau_h f, \varphi\rangle = \langle f, \tau_h\varphi\rangle$ при всех $f \in \beta'^m(Q)$ и $\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^1}(Q)$.

4.2. Обобщенные асимптотически почти периодические функции

Функцию $\varphi \in \beta^m(\mathbb{R}_+)$ назовем асимптотически почти периодической, если $\{\tau_h\varphi | h \in \mathbb{R}_+\}$ относительно компактно в $\beta^m(\mathbb{R}_+)$. Пространство всех асимптотически почти периодических функций из $\in \beta^m(\mathbb{R}_+)$ обозначим через $\beta^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ и пусть $\beta^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$ – пространство всех функций, асимптотически почти периодических вместе со всеми своими производными.

Будем говорить, что распределение $f \in \beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$ асимптотически почти периодично, если сдвиги $\{\tau_h f | h \in \mathbb{R}_+\}$ образуют относительно компактное множество в $\beta'^\infty(\mathbb{R}_+)$. Пусть $\beta'^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ – пространство распределений $f \in \beta'^m(\mathbb{R}_+)$, сдвиги которых $\{\tau_h f | h \in \mathbb{R}_+\}$ образуют относительно компактное множество в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\beta'^m_{app}(\mathbb{R}_+) \subset \beta'^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$ и $\beta'^m_{app}(\mathbb{R}_+) \subset \beta'^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$ $(0 \le m < +\infty)$.

Лемма 4.2.1. *Подпространство $\beta'^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ $(0 \le m < +\infty)$ замкнуто в $\beta'^m(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство. Если $f_n \in \beta'^{m}_{app}(\mathbb{R}_+)$ и $f_n \to f$ в $\beta'^{m}(\mathbb{R}_+)$, то

$$||\tau_h f - \tau_h f_n||'_m = \sup_{\varphi \in D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+),\ ||\varphi||_m \le 1} |\langle [\tau_h f - \tau_h f_n], \varphi\rangle| =$$
$$\sup_{\varphi \in D^m_{L_1}(\mathbb{R}_+),\ ||\varphi||_m \le 1} |\langle [f_n - f], \tau_h \varphi\rangle| \le$$
$$\sup_{\varphi \in D^m_{L_1}(\mathbb{R}_+),\ ||\varphi||_m \le 1} |\langle [f - f_n], \varphi\rangle| = ||f - f_n||'_m.$$

Из последнего неравенства следует, что для любого $\varepsilon > 0$, множество сдвигов $\{\tau_h f | h \in \mathbb{R}_+\}$ обладает относительно компактной ε-сетью и, следовательно, $f \in \beta'^{m}_{app}(\mathbb{R}_+)$. Лемма доказана.

Обозначим через V^* пространство мер с компактным носителем; V^1 – пространство функций ограниченной вариации с компактным носителем; V^m $(m = 2, 3, \dots)$ – пространство функций α с компактным носителем, обладающих $m-2$ обычными производными, причем $D^{m-2}\alpha$ абсолютно непрерывна, а $D^{m-1}\alpha$ есть функция ограниченной вариации; $V^\infty = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Если $\alpha \in V^{m+1}$, то $D\alpha \in V^m$.

Лемма 4.2.2. [**12**],[**46**]. *Пусть m, q – целые числа, $0 \le m, q < +\infty$ и $\alpha \in V^{m+q}$. Тогда $\alpha * f \in \beta^q(\mathbb{R}_+)$ для любого $f \in \beta'^{m}(\mathbb{R}_+)$ ($*$ – свертка) и оператор $f \to \alpha * f$ из $\beta'^{m}(\mathbb{R}_+)$ в $\beta^q(\mathbb{R}_+)$ непрерывен. Если $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, то $\alpha * f \in \beta^\infty(\mathbb{R}_+)$ для любого $f \in \beta'^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ и оператор $f \to \alpha * f$ из $\beta'^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ в $\beta^\infty(\mathbb{R}_+)$ непрерывен.*

Пусть $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Из леммы 4.2.2 следует, что оператор свертки $f \to \alpha * f$ из $\beta'^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ в $\beta^\infty(\mathbb{R}_+)$ непрерывен. Отсюда вытекает, что для $f \in \beta'^{\infty}_{app}(\mathbb{R}_+)$ сдвиги

$$\{\tau_h(\alpha * f) | h \ge 0\} = \{\alpha * \{\tau_h f\} | h \in \mathbb{R}_+\} \tag{4.2.1}$$

образуют относительно компактное множество в $\beta^\infty(\mathbb{R}_+)$, то есть $\alpha * f \in \beta^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$.

Так как оператор дифференцирования

$$D : \beta'^{m}(\mathbb{R}_+) \to \beta'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$$

распределений непрерывен и перестановочен со сдвигами, то есть производная всякого асимптотически почти периодического распределения является асимптотически почти периодическим распределением.

Следствие 4.2.3. *Если* $\alpha \in \beta^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ *и* $f \in {\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$, *то* $\alpha f \in {\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Это утверждение вытекает из того, что билинейное отображение $(\alpha, f) \to \alpha f$ из $\beta^m(\mathbb{R}_+) \times {\beta'}^m(\mathbb{R}_+)$ в ${\beta'}^m(\mathbb{R}_+)$ непрерывно для $m < +\infty$.

Лемма 4.2.4. [**46**], [**12**] *Пусть* $q \geq 0$ – *целое число и* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f \in {\beta'}^m(\mathbb{R}_+)$ $(0 \leq m < +\infty)$.
2) $\alpha * f \in \beta^q(\mathbb{R}_+)$ *для любого* $\alpha \in V^{m+q}$.
3) *Существуют такие* $\xi \in \beta^0(\mathbb{R}_+)$ *и* $\eta \in \beta^\infty(\mathbb{R}_+)$, *что* $f = D^m\xi + \eta$.

Лемма 4.2.5. *Пусть* $q > 0$ – *целое число и* $f \in D'(\mathbb{R}_+)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f \in {\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ $(0 \leq m < +\infty)$.
2) $\alpha * f \in \beta^q_{app}(\mathbb{R}_+)$ *для любого* $\alpha \in V^{m+q}$.
3) *Существуют такие* $\xi \in \beta^0_{app}(\mathbb{R}_+)$ *и* $\eta \in \beta^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$, *что* $f = D^m\xi + \eta$.

Доказательство. Если $f \in {\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ и $\alpha \in V^{m+q}$, то по лемме 4.2.2 $\alpha * f \in \beta^q(\mathbb{R}_+)$. Оператор свертки $f \to \alpha * f$, действующий из ${\beta'}^m(\mathbb{R}_+)$ в $\beta^q(\mathbb{R}_+)$, непрерывен и имеет место равенство (4.2.1), поэтому $\alpha * f$ асимптотически почти периодична. Таким образом из 1) следует 2).

Пусть имеет место 2). В силу леммы 4.2.5 любое распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ можно представить в виде

$$f = D^m\xi + \eta, \tag{4.2.2}$$

где $\xi \in \beta^0(\mathbb{R}_+)$ и $\eta \in \beta^\infty(\mathbb{R}_+)$ задаются формулами

$$\xi = D^q(\alpha_{m+q} * \xi) \text{ и } \eta = \xi_{m+q} * f. \tag{4.2.3}$$

Из (4.2.2) и (4.2.3) следует, что

$$f = D^{m+q}(\alpha_{m+q} * \xi) + \xi_{m+q} * f.$$

Так как $\alpha_{m+q} \in V^{m+q}$, то $\alpha_{m+q} * f \in \beta^q_{app}(\mathbb{R}_+)$, а, значит, функция $\xi \in \beta^0_{app}(\mathbb{R}_+)$ ибо $\psi = \alpha_{m+q} * f \in \beta^q_{app}(\mathbb{R}_+)$. Тогда $\xi = D^q\psi \in \beta^0_{app}(\mathbb{R}_+)$. Из того, что $\xi_{m+q}\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ следует, что функция $\eta = \xi_{m+q} * f$ бесконечно дифферецируема. Так как $D^j\xi_{m+q} \in V^{m+q}$ для любого целого j, то функция $D^jh = (D^j\xi_{m+q}) * \xi$ принадлежит $\beta^q_{app}(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, $\eta \in \beta^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$. Таким образом из 2) следует 3).

Для доказательства импликации 3) $\to$ 1) достаточно заметить, что $\xi \in \beta^0_{app}(\mathbb{R}_+)$ влечет $D^m\xi \in {\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$, ибо оператор дифференцирования D^m распределений из ${\beta'}^0(\mathbb{R}_+) = \beta^0(\mathbb{R}_+)$ является сопряженным к оператору дифференцирования $(-1)^mD^m : D^m_{L^1}(\mathbb{R}_+) \to D^0_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Лемма доказана.

Будем говорить, что распределение f является 0-асимптотически почти периодическим, если $f \in {\beta'}^0_{app}(\mathbb{R}_+)$ и r-асимптотически почти периодическим для $1 \leq r < +\infty$, если $f \in {\beta'}^r_{app}(\mathbb{R}_+)$ и $f \notin {\beta'}^{r-1}_{app}(\mathbb{R}_+)$.

Лемма 4.2.6. *Для $r \geq 1$ производная r-асимптотически почти периодического распределения $(r+1)$-асимптотически почти периодична.*

Доказательство. Пусть $r \geq 1$ и f – r-асимптотически почти периодическое распределение. Тогда $Df \in {\beta'}^{r+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$. Остается показать, что $Df \notin {\beta'}^r_{app}(\mathbb{R}_+)$. Пусть $Df \in {\beta'}^r_{app}(\mathbb{R}_+)$, тогда

$$f = D^{r-1}(\alpha_r * D\xi) + \xi * f.$$

Если бы $Df \in {\beta'}^r_{app}(\mathbb{R}_+)$, то тогда мы имели бы $\alpha_r * (D\xi) \in {\beta'}^r_{app}(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, $f \in {\beta'}^{r-1}_{app}(\mathbb{R}_+)$, что противоречит выбору f. Лемма доказана.

4.3. Асимптотически почти периодические решения линейных дифференциальных уравнений с обобщенными возмущениями

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4.3.1}$$

и наряду с уравнением (4.3.1) рассмотрим соответствующее ему неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{4.3.2}$$

Пусть теперь $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$ такова, что $\alpha_{ij} \in \beta_{app}^{m}(\mathbb{R}_+)$ и $f \in \beta_{app}^{\prime m+1}(\mathbb{R}_+)$.

Имеет место следующая

Лемма 4.3.1. *Пусть* $\{f_k\} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *и* $f_k \to f$ *в* L_{loc}^∞ *(т.е. каково бы ни было* $l > 0$ $esssup_{t\in[0,l]}|f_k(t) - f(t)| \to 0$ *при* $k \to +\infty$*,* $A_k \to A$ *равномерно на отрезках из* $\mathbb{R}_+$ *и* $x_k \to x$*. Тогда* $\varphi(t, x_k, A_k, f_k) \to \varphi(t, x, A, f)$ *равномерно на отрезках из* $\mathbb{R}_+$*, где* $\varphi(t, x, A, f)$ *– решение уравнения* (4.3.2)*, проходящее через точку* x *при* $t = 0$*.*

Доказательство. Сформулированное утверждение получается из равенства

$$\varphi(t, x_k, A_k, f_k) = U(t, A_k)x_k + \int\limits_0^t U(t, A_k)U^{-1}(\tau, A_k)f_k(\tau)d\tau$$

предельным переходом, с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знак интеграла и свойств оператора Коши (см., например, [**53**]).

Теорема 4.3.2. *Пусть уравнение* (4.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$*,* $\alpha_{ij} \in \beta_{app}^{0}(\mathbb{R}_+)$ *и* $f \in \beta_{app}^{\prime 0}(\mathbb{R}_+)$*. Тогда уравнение* (4.3.2) *имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение* ψ*. Это решение представимо в виде*

$$\psi(t) = \int_0^{+\infty} G_A(t, \tau)f(\tau)d\tau, \tag{4.3.3}$$

Доказательство. Формула (4.3.3) дает ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (4.3.2).

Пусть $h_k \to +\infty$, $\{A^{(h_k)}\} \to B$ и $\{f^{(h_k)}\} \to g$. Так как ψ ограничена на $\mathbb{R}_+$, то последовательность $\{\psi(h_k)\}$ ограничена. Пусть $h_{k_m} \to +\infty$ такова, что $\{\psi(h_{k_m})\}$ сходится и $x_0 =$

$\lim\limits_{m\to+\infty}\psi(h_{k_m})$, тогда согласно лемме 3.1.1 **[75]** $\{\psi(t+h_{k_m})\}$ сходится к некоторой функции ψ^*, которая, как нетрудно сообразить, является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (3.3.4). Так как уравнение (4.3.1) гиперболично на $\mathbb{R}_+$, то уравнение (3.3.3), согласно лемме 3.3.3, гиперболично на $\mathbb{R}$, и, следовательно, уравнение (3.3.4) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение. Отсюда следует, что последовательность $\{\psi(t+h_k)\}$ сходится к ψ^* равномерно на компактах из $\mathbb{R}_+$. Покажем, что

$$\sup\{|\psi(t+h_k)-\psi^*(t)| :\ t\in\mathbb{R}_+\}\to 0 \tag{4.3.4}$$

при $k\to+\infty$. Допустим, что это не так. Тогда существуют $\epsilon_0>0$ и $\{\tau_k\}\subset\mathbb{R}_+$ такие, что

$$|\psi(\tau_k+h_k)-\psi^*(\tau_k)|\ge\epsilon_0. \tag{4.3.5}$$

В силу асимптотической почти периодичности f последовательность $\{g^{(\tau_k)}\}$ можно считать сходящейся в $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Пусть $\overline{g}=\lim\limits_{k\to+\infty}g^{(\tau_k)}$, тогда $f^{(\tau_k+h_k)}\to\overline{g}$ в $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\{\psi^{*(\tau_k)}\}$ также сходится в $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ и $\{B^{(\tau_k)}\}$ сходится в $C(\mathbb{R},[E^n])$. Положим $\overline{\psi}=\lim\limits_{k\to+\infty}\psi^{*(\tau_k)}$ и $\overline{B}=\lim\limits_{k\to+\infty}B_{\tau_k}$. Нетрудно заметить, что $\overline{\psi}$ является единственным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения

$$\frac{dy}{dt}=\overline{B}(t)y+\overline{g}(t).$$

С другой стороны, рассуждая как и выше, замечаем, что $\{\psi^{(\tau_k+h_k)}\}$ также сходится к $\overline{\psi}$. Значит, $\overline{\psi}(0)=\lim\limits_{k\to+\infty}\psi(\tau_k+h_k)=\lim\limits_{k\to+\infty}\psi^*(\tau_k)$. Последнее противоречит (4.3.5). Полученное противоречие показывает, что имеет место (4.3.4) и, следовательно, ψ асимптотически почти периодична. Теорема доказана.

Теорема 4.3.3. *Пусть уравнение* (4.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$, $A(t)=(\alpha_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $\alpha_{ij}\in\beta^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ *и* $f\in\beta'^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$. *Тогда уравнение* (4.3.2) *имеет по крайнем мере одно асимптотически почти периодическое обобщенное решение* $\psi\in\beta'^m_{app}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Так как производная всякого распределения из ${\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$ принадлежит ${\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$, то

$$L({\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)) \subset {\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+),$$

где $(Lf, \varphi) = (f, L^*\varphi)$ и $(L^*\varphi)(t) = \varphi'(t) + A^*(t)\varphi(t)$ при всех $f \in {\beta'}^m(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi \in \beta^m(\mathbb{R}_+)$.

Докажем обратное включение. Для этого достаточно показать, что уравнение (4.3.2) имеет решение в ${\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$, каково бы ни было $f \in {\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$. Пусть $f \in {\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$ r-асимптотически почти периодична, так что $r \leq m+1$. Если $r = 0$, то в силу теоремы 4.3.2 уравнение (4.3.2) имеет хотя бы одно асимптотически почти периодическое решение.

Покажем, что если для произвольного r-асимптотически почти периодического $f \in {\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$ при всех $r \leq q-1$ уравнение (4.3.2) имеет решение в ${\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$, то оно имеет решения в ${\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$ и в том случае, когда f является q-асимптотически почти периодическим. Действительно, согласно лемме 4.2.5 существуют $\xi \in \beta^0_{app}(\mathbb{R}_+)$ и $\eta \in \beta^\infty_{app}(\mathbb{R}_+)$ такие, что $f = D^q\xi + \eta$. Уравнение $Lx = \eta$ имеет асимптотически почти периодическое решение. Произведя в уравнении $Lx = D^q\xi$ замену переменных $x = z + D^{q-1}\xi$, получим эквивалентное уравнение

$$Lz = -A(t)D^{q-1}z,$$

где $A(t)D^{q-1}z$ имеет ранг $\leq q-1$. Следовательно, уравнение $Lx = f$ имеет решения в ${\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)$, каково бы ни было $f \in {\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, $L({\beta'}^m_{app}(\mathbb{R}_+)) = {\beta'}^{m+1}_{app}(\mathbb{R}_+)$. Теорема доказана.

4.4. Асимптотически почти периодические распределения

Напомним, что $AP(\mathbb{R}_+)$ обозначает множество всех асимптотически почти периодических функций из $C(\mathbb{R}_+, E^n)$, т. е. функций $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$, которые представимы в виде суммы $p + \omega$, где $p \in C(\mathbb{R}_+, E^n)$ почти периодична и $\lim\limits_{t\to+\infty} |\omega(t)| = 0$.

Через $AP^m(\mathbb{R}_+)$ обозначим множество всех m-раз непрерывно дифференцируемых функций из $C(\mathbb{R}_+, E^n)$, являющихся асимптотически почти периодическими вместе со своими производными до порядка m включительно, т.е.

$$AP^m(\mathbb{R}_+) = \{\varphi |\, D^k\varphi \in AP(\mathbb{R}_+),\ k = \overline{0,m}\}.$$

Равенством

$$||\varphi||_m = \max_{0\le j\le m} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |D^j\varphi(t)|$$

определяется норма на $AP^m(\mathbb{R}_+)$, причем $AP^m(\mathbb{R}_+)$ с этой нормой является банаховым.

Свертку двух функций $\varphi, \psi \in AP^m(\mathbb{R}_+)$ определим равенством

$$(\varphi * \psi)(t) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \langle\varphi(t+s), \psi(s)\rangle ds, \tag{4.4.1}$$

т. е. $(\varphi * \psi)(t) = M\{\langle\varphi(t+s), \psi(s)\rangle\}$. Имеет место

Лемма 4.4.1. *Для* $\varphi, \psi \in AP^m(\mathbb{R}_+)$

$$\varphi * \psi = p * q, \tag{4.4.2}$$

где p *и* q *являются главными частями функций* φ *и* ψ *соответственно.*

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{gathered}\langle\varphi(t+s), \psi(s)\rangle = \langle p(t+s) + \omega(t+s), q(s) + \overline{\omega}(s)\rangle = \\ \langle p(t+s), q(s)\rangle + +\langle\omega(t+s), q(s)\rangle + \langle p(t+s), \overline{\omega}(s)\rangle + \\ \langle\omega(t+s), \overline{\omega}(s)\rangle = \langle p(t+s), q(s)\rangle + \overline{\overline{\omega}}(t,s),\end{gathered} \tag{4.4.3}$$

где $\overline{\overline{\omega}}(t,s) = \langle\omega(t+s), q(s)\rangle + \langle p(t+s), \overline{\omega}(s)\rangle + \langle\omega(t+s), \overline{\omega}(s)\rangle$ и, следовательно, $\overline{\overline{\omega}}(t,s) \to 0$ при $s \to +\infty$ (при каждом $t \in \mathbb{R}_+$). Из (4.4.1) и (4.4.3) следует равенство (4.4.2). Лемма доказана.

Лемма 4.4.2. *Пусть* $\varphi, \psi \in AP^m(\mathbb{R}_+)$ *(*$m \ge 1$*), тогда*

$$D^j(\varphi * \psi) = (D^j\varphi) * \psi$$

Доказательство. Так как $h^{-1}[\varphi(t+h)-\varphi(t)]$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ при $h \downarrow 0$ имеет пределом $\varphi'(t)$ (равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$), то

$$\langle \frac{\varphi(s+t+h)-\varphi(s+t)}{h}, \psi(t)\rangle \to \langle \varphi'(s+t), \psi(t)\rangle$$

при $h \downarrow 0$ (равномерно по $s \in \mathbb{R}_+$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$) и, следовательно,

$$\varphi' * \psi = \lim_{h\to 0} \varphi_h * \psi, \tag{4.4.4}$$

где $\varphi_h = h^{-1}[\varphi(t+h)-\varphi(t)]$.

С другой стороны, из соотношения

$$\langle \frac{\varphi(s+t+h)-\varphi(s+t)}{h}, \psi(s)\rangle =$$
$$\frac{1}{h}[\langle \varphi(s+t+h), \psi(s)\rangle - \langle \varphi(s+t), \psi(s)\rangle]$$

следует, что

$$(\varphi_h * \psi)(t) = \frac{1}{h}[M_s\{\langle \varphi(s+t+h), \psi(s)\rangle - M_s\{\langle \varphi(s+t), \psi(s)\rangle\}]. \tag{4.4.5}$$

Переходя к пределу в (4.4.5) и учитывая (4.4.4), получим

$$(\varphi * \psi)' = \varphi' * \psi.$$

Повторяя этот процесс, получаем искомое соотношение. Лемма доказана.

Обозначим через $AP'^m(\mathbb{R}_+)$ пространство, сопряженное к $AP^m(\mathbb{R}_+)$. Сужение всякого функционала $f \in AP'^m(\mathbb{R}_+)$ $(m < +\infty)$ на $AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ принадлежит $AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ и f вполне определяется своим сужением. Оператор сужения устанавливает изоморфизм между $AP'^m(\mathbb{R}_+)$ и некоторым подпространством в $AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, поэтому мы можем считать, что $AP'^m(\mathbb{R}_+) \subset AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, а при $m < +\infty$ $AP'^m(\mathbb{R}_+) \subset AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Лемма 4.4.3. $AP'^\infty(\mathbb{R}_+) = \cup_{0 \le m < +\infty} AP'^m(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Выше было отмечено, что $AP'^m(\mathbb{R}_+) \subset AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$. Далее, если $f \in AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$, то существует окрестность нуля U в $AP^\infty(\mathbb{R}_+)$, что $|\langle f, \varphi\rangle| \le 1$ для $\varphi \in U$. Поэтому существует целое неотрицательное число m и $b > 0$, что из

$\varphi \in AP^\infty(\mathbb{R}_+)$, $||\varphi||_m \leq b$, следует $\varphi \in U$. Отсюда следует, что функционал f непрерывен на пространстве $AP^\infty(\mathbb{R}_+)$, наделенном топологией, индуцированной из $AP^m(\mathbb{R}_+)$. Так как $AP^\infty(\mathbb{R}_+)$ плотно в $AP^m(\mathbb{R}_+)$, то $f \in AP'^m(\mathbb{R}_+)$. Лемма доказана.

Производная, сдвиги и умножение на функцию в $AP^m(\mathbb{R}_+)$ определяются обычным образом: оператор D дифференцирования функционалов из $AP'^m(\mathbb{R}_+)$ – это сопряженный к оператору $-D : AP^{m+1}(\mathbb{R}_+) \to AP^m(\mathbb{R}_+)$; оператор τ_h сдвига функционалов из $AP'^m(\mathbb{R}_+)$ – это сопряженный к оператору сдвига $\tau_h : AP^m(\mathbb{R}_+) \to AP^m(\mathbb{R}_+)$; мультипликаторами на $AP'^m(\mathbb{R}_+)$ являются функции $\alpha \in AP^m(\mathbb{R}_+)$, и оператор умножения на α функционалов из $AP'^m(\mathbb{R}_+)$ – это сопряженный к оператору умножения на α в пространстве $AP^m(\mathbb{R}_+)$.

Действие обобщенной асимптотически почти периодической функции (асимптотически почти периодического распределения) $g \in AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$ на функцию $\varphi \in AP^\infty(\mathbb{R}_+)$ определим равенством

$$\langle g * \varphi \rangle(t) = \langle g, \varphi^{(t)} \rangle, \tag{4.4.6}$$

т.е. $\langle g * \varphi \rangle : t \to \langle g, \varphi^{(t)} \rangle = \psi(t)$.

Отметим, что $AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$ не является нормированным пространством ($AP^\infty(\mathbb{R}_+)$ счетно нормировано: $||\cdot||_k$, $k = 0, 1, \dots$).

Лемма 4.4.4. *Функция ψ, определенная правилом* (4.4.6), *принадлежит $AP^\infty(\mathbb{R}_+)$, если $g \in AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$|\psi(t+\tau) - \psi(t)| = |\langle g, \varphi^{(t+\tau)} \rangle - \langle g, \varphi^{(t)} \rangle| = |\langle g, \varphi^{(t+\tau)} - \varphi^{(t)} \rangle|. \tag{4.4.7}$$

Из леммы 4.4.3 для $g \in AP'^\infty(\mathbb{R}_+)$ следует существование $m \geq 0$, такого что $g \in AP'^m(\mathbb{R}_+)$, поэтому имеем

$$|\langle g, \varphi^{(t+\tau)} - \varphi^{(t)} \rangle| \leq ||g||'_m ||\varphi^{(t+\tau)} - \varphi^{(t)}|| < \varepsilon,$$

если только $||\varphi^{(t+\tau)} - \varphi^{(t)}|| < \varepsilon / ||g||'_m$. Из равенства (4.4.7) для первой производной ψ получим равенство $|\psi'(t+\tau) - \psi'(t)| = |\langle g, \varphi'^{(t+\tau)} - \varphi'^{(t)} \rangle|$ и, следовательно,

$$|\psi'(t+\tau) - \psi'(t)| \leq ||g||'_m ||\varphi'^{(t+\tau)} - \varphi'^{(t)}|| < \varepsilon,$$

если $||\varphi'^{(t+\tau)} - \varphi'^{(t)}|| < \varepsilon/||g||'_m$. Продолжая этот процесс и дальше, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

Пусть $f, g \in AP'^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, тогда свертка $f * g$ определяется равенством $\langle g * f, \varphi \rangle = \langle f, g * \varphi \rangle$ $(\varphi \in AP^{\infty}(\mathbb{R}_+))$.

Лемма 4.4.5. *Пусть* $f, g \in AP'^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, *тогда*

1) $\tau_h(g * f) = (\tau_h g) * f$.
2) $D(g * f) = (Dg) * f$.

Доказательство. Для $\varphi \in AP^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\langle \tau_h(g * f), \varphi \rangle = \langle g * f, \tau_h \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \tau_h \varphi \rangle \rangle = \\ = \langle f, \langle \tau_h g, \varphi \rangle \rangle = \langle (\tau_h g) * f, \varphi \rangle.$$

Докажем теперь второе равенство. Пусть $\varphi \in AP^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, тогда

$$\langle D(g * f), \varphi \rangle = \langle g * f, -D\varphi \rangle = \langle f, \langle g, -D\varphi \rangle \rangle = \\ = \langle f, \langle Dg, \varphi \rangle \rangle = \langle (Dg) * f, \varphi \rangle.$$

Лемма доказана.

4.5. Разрешимость уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$ в классе асимптотически почти периодических распределений $AP^m(\mathbb{R}_+)$

В этом параграфе будем рассматривать уравнение (4.3.2) с $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, где $\alpha_{ij} \in AP^m(\mathbb{R}_+)$, и $f \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$.

Определим оператор $L : AP^{m+1}(\mathbb{R}_+) \to AP^m(\mathbb{R}_+)$ равенством

$$(Lx)(t) = \frac{dx}{dt}(t) - A(t)x(t).$$

Через L^* обозначим оператор, формально сопряженный к L, определяемый равенством

$$(L^*y)(t) = \frac{dy}{dt}(t) + A^*(t)y(t).$$

Лемма 4.5.1. *Имеет место равенство*

$$M\{\langle x(t), -\dot\varphi(t) - A^*(t)\varphi(t) \rangle\} = M\{\langle f(t), \varphi(t) \rangle\} \tag{4.5.1}$$

или, что тоже самое

$$\langle x, L^*\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

при всех $\varphi \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ *и* $x \in AP^m(\mathbb{R}_+)$ $(m \geq 1)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ и $x \in AP^m(\mathbb{R}_+)$, тогда

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big\langle \dot{x}(t) - A(t)x(t), \varphi(t)\big\rangle dt = \frac{1}{T}\int_0^T \big\langle f(t), \varphi(t)\big\rangle dt.$$

Так как

$$\int_0^T \big\langle \dot{x}(t), \varphi(t)\big\rangle dt = \big\langle x(t), \varphi(t)\big\rangle \Big|_0^T + \int_0^T \big\langle x(t), -\dot{\varphi}(t)\big\rangle dt,$$

то

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big\langle x(t), -\dot{\varphi(t)} - A^*(t)\varphi(t)\big\rangle dt + \frac{1}{T}\big\langle x(t), \varphi(t)\big\rangle \Big|_0^T =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big\langle f(t), \varphi(t)\big\rangle dt.$$

Заметим, что $|\big\langle x(T), \varphi(T)\big\rangle - \big\langle x(0), \varphi(0)\big\rangle| \leq M$ и, следовательно,

$$\Big|\frac{1}{T}\big\langle x(t), \varphi(t)\big\rangle\Big|_0^T \leq \frac{M}{T} \to 0$$

при $T \to +\infty$. Откуда следует равенство (4.5.1). Лемма доказана.

Пусть теперь $f \in AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Асимптотически почти периодическое распределение $x \in AP'^m(\mathbb{R}_+)$ назовчм обобщчнным решением уравнения (4.3.2), если $\big\langle x, L^*\varphi\big\rangle = \big\langle f, \varphi\big\rangle$ каково бы ни было $\varphi \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 4.5.2. *Если однородное уравнение* (4.3.1) *гиперболично на* $\mathbb{R}_+$, *то для любого асимптотически почти периодического распределения* $f \in AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ *уравнение* (4.3.2) *имеет по крайнем мере одно обобщчнное асимптотически почти периодическое решение* $\eta \in AP'^m(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Пусть $S : AP^{m+1}(\mathbb{R}_+) \to AP^m(\mathbb{R}_+)$ – линейный оператор, определенный равенством

$$(Sf)(t) = \int\limits_0^{+\infty} G_A(t,\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $G_A(t,\tau)$ – главная функция Грина уравнения (4.3.1).

Пусть $\varphi \in AP^m(\mathbb{R}_+)$ и $f \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, тогда $\eta = Sf$ определяет регулярную обобщчнную функцию $\eta \in {AP'}^m(\mathbb{R}_+)$, приччм

$$\langle \eta, \varphi \rangle = M\{\langle \eta(t), \varphi(t) \rangle\} = M\Big\{\Big\langle \int\limits_0^{+\infty} G_A(t,\tau) f(\tau) d\tau, \varphi(t) \Big\rangle\Big\} =$$

$$M\Big\{ \int\limits_0^{+\infty} \langle G_A(t,\tau) f(\tau), \varphi(t) \rangle d\tau \Big\} = M\Big\{\langle \int\limits_0^{+\infty} \langle f(\tau), G_A^*(t,\tau) \varphi(t) \rangle d\tau \Big\}$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^{+\infty} \langle f(\tau), G_A^*(t,\tau) \varphi(t) \rangle d\tau dt =$$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \Big\langle f(\tau), \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau) \varphi(t) dt \Big\rangle d\tau =$$

$$M\Big\{\Big\langle f(\tau), \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau) \varphi(t) dt \Big\rangle\Big\}$$

и, следовательно,

$$\langle \eta, \varphi \rangle = M\Big\{\Big\langle f(\tau), \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau) \varphi(t) dt \Big\rangle\Big\},$$

где $G_A^*(t,\tau)$ – оператор, сопряжчнный к $G_A(t,\tau)$.

Наряду с уравнением (4.3.1) гиперболичным на $\mathbb{R}_+$ является и уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -A^*(t) y. \tag{4.5.2}$$

Согласно теореме 3.3.5 равенство

$$(S^*\varphi)(t) = \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau)\varphi(t)dt$$

корректно определяет отображение из $AP^m(\mathbb{R}_+)$ в $AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что оператор $S^* : AP^m(\mathbb{R}_+ \to AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ непрерывен. Действительно, из неравенства (3.4.20) из **[53]** вытекает, что

$$\int\limits_0^{+\infty} ||G_A^*(t,\tau)||dt \leq \frac{2N}{\nu} \qquad (\tau \in \mathbb{R}_+), \tag{4.5.3}$$

где N, ν – константы гиперболичности уравнения (4.5.2) (см. неравенства (3.3.5) и (3.3.6)). Из неравенства (4.5.3) имеем

$$\begin{gathered} ||S^*\varphi||_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\Big|\int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau)\varphi(t)dt\Big| \leq \\ \int\limits_0^{+\infty} ||G_A^*(t,\tau)||dt \cdot ||\varphi||_0 \leq \tfrac{2N}{\nu}||\varphi||_m. \end{gathered} \tag{4.5.4}$$

Таким образом, $S^*\varphi$ является решением уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -A^*(t)y + \varphi(t)$$

и, следовательно, $S^*(AP^m(\mathbb{R}_+)) \subseteq AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ и $||S^*\varphi||_m \leq c_m \cdot ||\varphi||_m$, где c_m – некоторая положительная константа, зависящая только от m и матрицы $A(t)$.

Таким образом, S^* есть линейный ограниченный оператор действующий из $AP^m(\mathbb{R}_+)$ в $AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Итак, будем иметь равенство

$$\big\langle Sf, \varphi\big\rangle = \big\langle \eta, \varphi\big\rangle = \big\langle f, S^*\varphi\big\rangle, \tag{4.5.5}$$

которое имеет место и смысл при любых $\varphi \in AP^m(\mathbb{R}_+)$ и $f \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, где $\eta = Sf$. Из равенства (4.5.5) следует, что

$$\big\langle \eta, L^*\varphi\big\rangle = \big\langle Sf, L^*\varphi\big\rangle = \big\langle f, S^*(L^*\varphi)\big\rangle.$$

Пусть теперь $\varphi \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$, тогда

$$S^*(L^*\varphi)(\tau) = S^*(\dot{\varphi}(t) + A^*(t)\varphi(t))(\tau) = \\ = \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau)\dot{\varphi}(t)dt + \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau)A^*(t)\varphi(t)dt. \tag{4.5.6}$$

Из (4.5.6), интегрированием по частям, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau)\dot{\varphi}(t)dt = G_A^*(t,\tau)\varphi(t)\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} G_A^*(t,\tau)\varphi(t)dt =$$

$$= -G_A^*(0,\tau)\varphi(0) - \int\limits_0^{+\infty} G_A^*(t,\tau)A^*(t)\varphi(t)dt + \varphi(t)$$

и, следовательно,

$$(S^*L^*\varphi)(\tau) = -G_A^*(0,\tau)\varphi(0) + \varphi(\tau). \tag{4.5.7}$$

Обозначим через P проектор, проектирующий E^n на

$$E_+ = \{x \,|\, x \in E^n, \sup_{t \geq 0} |U(t, -A^*)x| < +\infty\}$$

и

$$B = \overline{\{\varphi \,|\, \varphi \in AP^{m+1}(\mathbb{R}_+), P\varphi(0) = 0\}},$$

где чертой обозначено замыкание в $AP^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Тогда из равенства (4.5.7) следует, что S^*L^* – есть тождественный оператор в B и, следовательно,

$$L^*S^* = Id_{AP^m(\mathbb{R}_+)} \quad \text{и} \quad S^*L^* = Id_B,$$

где $Id_{AP^m(\mathbb{R}_+)}$ и Id_B – тождественные операторы в $AP^m(\mathbb{R}_+)$ и B соответственно. Теперь обозначим через $\overline{L} = (L^*)'$ и $\overline{S} = (S^*)'$ сопряжчнные операторы к L^* и S^* соответственно. Тогда $\overline{L} \circ \overline{S} = Id_{B'}$, где B' – пространство, сопряжчнное к B, а $Id_{B'}$ – тождественный оператор в B'. Заметим, что $\overline{L}\,\Big|_{AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)} = L$ и $\overline{S}\,\Big|_{AP'^{m}(\mathbb{R}_+)}$, где $\overline{L}\,\Big|_{AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)}$ и $\overline{S}\,\Big|_{AP'^{m}(\mathbb{R}_+)}$ – суть сужения операторов $\overline{L}$ на $AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ и $\overline{S}$ на $AP'^{m}(\mathbb{R}_+)$.

Для завершения доказательства теоремы остачтся заметить, что

$$\langle x, L^*\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

для всех $f \in B' \supseteq AP'^{m+1}(\mathbb{R}_+)$. Действительно,

$$\langle x, \mathcal{L}^*\varphi \rangle = \langle \overline{S}f, L^*\varphi \rangle = \langle \overline{L}\,\overline{S}f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Теорема доказана.

4.6. Динамические системы сдвигов в пространствах обобщенных функций и асимптотически почти периодические функции в пространствах Соболева

Сопряжчнная динамическая система. Пусть X – векторное топологическое пространство и $(X, \mathbb{R}, \pi)$ – динамическая система на X. Через X' обозначим сопряжчнное пространство всех линейных непрерывных форм, определенных на X.

Через X'_s обозначаем X' с слабой топологией и X'_c – X' с топологией компактной сходимости. Тогда $f_j \to 0$ в X'_s тогда и только тогда, когда $\langle f_j, x \rangle \to 0$ для любого $x \in X$, и $f_j \to 0$ в X'_c тогда и только тогда, когда для каждого компактного множества $A \subseteq X$ $\sup\{|\langle f_j, x \rangle| : x \in A\} \to 0$.

На первый взгляд топология компактной сходимости кажется сильнее слабой топологии. Однако для широкого класса пространств (например, для пространств Фреше), где применима теорема Банаха-Штейнгауза [**42**], [**32**], эти топологии эквивалентны.

В этом параграфе мы будем рассматривать только такие пространства X, для которых слабая топология и топология компактной сходимости на X' эквиваленты. Для этого достаточно, чтобы X было пространством Фреше, хотя существует и другие пространства, обладающие данным свойством.

Пусть $h \in \mathbb{R}$. Определим отображение τ_h ("h-сдвиг") пространства X'_s в себя равенством

$$(\tau_h f)(x) = f(\pi(x, h))$$

при всех $x \in X$ и $f \in X'_s$. Легко проверить, что полученное семейство отображений $\{\tau_h | h \in \mathbb{R}\}$ обладает следующими свойствами:

$$\tau_0 = Id_{X'_s}, \tag{4.6.1}$$

$$\tau_{h_1} \circ \tau_{h_2} = \tau_{h_1+h_2} \qquad (h_1, h_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.6.2}$$

и

$$\tau_h : X'_s \to X'_s \quad \text{н.} \tag{4.6.3}$$

Определим отображение $\pi' : X'_s \times \mathbb{R} \to X'_s$ равенством

$$\pi'(f,h) = \tau_h f \tag{4.6.4}$$

при любых $f \in X'_s$ и $h \in \mathbb{R}$. Из (4.6.1) – (4.6.2) следует, что

$$\pi'(f,0) = f \quad \text{и} \quad \pi'(\pi'(f,h_1),h_2) = \pi'(f,h_1+h_2) \tag{4.6.5}$$

при любых $f \in X'_s$ и $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.6.1. $(X'_s, \mathbb{R}, \pi')$ – *динамическая система.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность π'. Пусть $f_j \to f$ в X'_s и $t_j \to t$ в $\mathbb{R}$. Тогда для произвольного $x \in X$ $\pi'(f_j,t_j)(x) = f_j(\pi(x,t_j))$. Определим отображение $B : X \times X'_s \to X$ равенством $B(x,f) = f(x)$. Покажем, что это отображение непрерывно. Пусть $x_k \to x$ и $f_k \to f$. Тогда

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \le \\ \sup\{f_n(\overline{x}) - f(\overline{x})| : \overline{x} \in Q\} + |f(x_n) - f(x)|, \tag{4.6.6}$$

где $Q = \{x_n\} \cup \{x\}$. Учитывая эквивалентность слабой топологии и топологии компактной сходимости на X' и неравенство (4.6.7), заключаем, что B непрерывно. Заметим, что

$$\pi'(f_j,t_j)(x) = f_j(\pi(x,t_j)) = B(\pi(x,t_j),f_j) \to B(\pi(x,t),f).$$

Так как $\pi(x,t_j) \to \pi(x,t)$ и B непрерывно, то $\pi'(f_j,t_j)(x) \to f(\pi(x,t)) = \pi'(f,t)(x)$ при каждом $x \in X$, т.е. $\pi'(f_j,t_j) \to \pi'(f,t)$ в X'. Лемма доказана.

Динамическую систему $(X', \mathbb{R}, \pi')$ назовчм сопряженной к $(X, \mathbb{R}, \pi)$.

Динамические системы сдвигов на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Напомним (см.§ 4.1), что через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ мы обозначили пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{D}$ с введчнной в нем сходимостью является локально выпуклым векторным топологическим пространствам, но не является пространством Фреше.

Определим при каждом $h \in \mathbb{R}$ отображение $\tau_h : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ по следующему правилу:

$$(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x+h) \tag{4.6.7}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и $x \in \mathbb{R}$. Очевидным образом проверяются условия (4.6.1) – (4.6.3). С помощью семейства отображений $\{\tau_h\}$ определим отображение $\sigma : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \to \mathcal{D}$ по формуле (4.6.4). Легко проверяется, что σ удовлетворяет тожествам (4.6.5). Покажем, что $\sigma : D \times \mathbb{R} \to \mathcal{D}$ непрерывно.

Пусть $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathcal{D}$ и $h_k \to h$ в $\mathbb{R}$. Так как $\varphi_k \to \varphi$ и $h_k \to h$, то существует такой компакт $K \subset \mathbb{R}$, что

$$-h_k + supp\, \varphi_k \subseteq K \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

и, следовательно, $supp\ \tau_{h_k} \varphi_k \subseteq K \quad (k = 1, 2, \dots)$. Покажем, что последовательность $\{\sigma(\varphi_k, h_k)\}$ сходится к $\sigma(\varphi, h)$ в $\mathcal{D}$. В самом деле, пусть $x \in K$, тогда

$$\begin{aligned}
&|D^j \sigma(\varphi_k, h_k)(x) - D^j \sigma(\varphi, h)(x)| = |D^j \varphi_k(x+h_k) - \\
&D^j \varphi(x+h)| \le |D^j \varphi_k(x+h_k) - D^j \varphi(x+h_k)| + \\
&|D^j \varphi_k(x+h_k) - D^j \varphi(x+h)| \le \max_{y \in K'} |D^j \varphi_k(y) - D^j \varphi(y)| + \\
&\max_{z \in K} |D^j \varphi(z+h_k) - D^j \varphi(z+h)|,
\end{aligned} \tag{4.6.8}$$

где K' – компакт из $\mathbb{R}$ такой, что $supp\, \varphi_k \subseteq K'$. Из неравенства (4.6) видно, что для завершения доказательства сходимости $\{\sigma(\varphi_k, h_k)\}$ к $\sigma(\varphi, h)$ в $\mathcal{D}$ достаточно показать, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\lim_{k \to +\infty} \max_{x \in K} |D^j \varphi(x+h_k) - D^j \varphi(x+h)| = 0.$$

Допустим противное, т.е. существуют $j_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon_0 > 0$ и $\{x_k\} \subseteq K$ такие, что

$$|D^{j_0} \varphi(x_k + h_k) - D^{j_0} \varphi(x_k + h)| \ge \varepsilon_0. \tag{4.6.9}$$

Так как K есть компакт, то, не умаляя общности рассуждений, считаем, что $x_k \to x_0$ и, переходя к пределу в (4.6.9), когда $k \to +\infty$, находим

$$0 = |D^{j_0} \varphi(x_0 + h) - D^{j_0} \varphi(x_0 + h)| \ge \varepsilon_0.$$

Последнее неравенство противоречит выбору ε_0. Тем самым требуемое утверждение доказано. Итак, отображение $\sigma : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \to \mathcal{D}$ непрерывно и, следовательно, тройка $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, \sigma)$ есть динамическая система сдвигов на $\mathcal{D}$.

Обозначим через $\mathcal{D}'$ множество всех линейных непрерывных форм на $\mathcal{D}$, наделчнное слабой топологией, т.е. $f_k \to f$ в $\mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ при каждом $\varphi \in \mathcal{D}$. Определчнная таким образом топология на $\mathcal{D}'$ превращает его в локально выпуклое векторное топологическое пространство. Как уже отмечалось выше, пространство $\mathcal{D}$ не является пространством Фреше, тем не менее, слабая и компактная сходимость на $\mathcal{D}'$ совпадают. В самом деле, пусть $f_k \to f$ в слабой топологии и M – произвольный компакт из $\mathcal{D}$. Тогда согласно [**5**],[**42**] существует компакт $K \subset \mathbb{R}$ такой, что $M \subset \mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}_k$ – множество всех функций из $\mathcal{D}$, носители которых лежат в K. Так как $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ при каждом $\varphi \in \mathcal{D}$, то, в частности, $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ и при $\varphi \in \mathcal{D}_k$. Следовательно, $\{f_k\}$ является слабо сходящейся на $\mathcal{D}_k$, но пространство $\mathcal{D}_k$ является пространством Фреше, а для пространств Фреше слабая топология и топология компактной сходимости эквивалентны. Поэтому $f_k \to f$ равномерно на M.

Суммируя сказанное выше заключаем, что на пространстве $\mathcal{D}'$ определена динамическая система $(\mathcal{D}', \mathbb{R}, \sigma')$, которая является сопряженной для $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, \sigma)$.

Динамические системы сдвигов в локальных пространствах. Пространство $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'$ называется [**6**] полулокальным, если $\varphi u \in \mathcal{F}$ для любых $u \in \mathcal{F}$ и $\varphi \in C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Если $\mathcal{F}$ содержит всякое распределение $u \in \mathcal{D}'$, для которого $\varphi u \in \mathcal{F}$ для любого $\varphi \in C_0^\infty$, то $\mathcal{F}$ называется локальным.

Наименьшее локальное пространство, содержащее $\mathcal{F}$, мы обозначим через $\mathcal{F}_{loc}$. $\mathcal{F}_{loc}$ – это пространство, определчнное по следующему правилу [**49**]:

$$\mathcal{F}_{loc} = \{u \,|\, u \in \mathcal{D}',\ \varphi u \in \mathcal{F} \ \text{ для любого } \ \varphi \in C_0^\infty\}. \qquad (4.6.10)$$

Обозначим через $\mathcal{F}^c$ множество всех $u \in \mathcal{F}$ с компактным носителем [**5**]. Если $\mathcal{F}$ полулокально, то согласно [**49**]:

$$\mathcal{F}^c = \mathcal{F}_{loc} \cap \mathcal{E}' \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{loc} = \left(\mathcal{F}^c\right)_{loc},$$

где $\mathcal{E}' = \mathcal{D}'^c$, здесь $\mathcal{D}'^c$ – множество всех $u \in \mathcal{D}'$ с компактным носителем.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'$ – полулокальное нормированное подпространство пространства $\mathcal{D}'$ с нормой $||\cdot||_{\mathcal{F}}$. Индекс $\mathcal{F}$ в дальнейшем будем опускать, если ясно, о какой норме идчт речь. На пространстве $\mathcal{F}_{loc}$ можно определить топологию τ семейством полунорм по следующему правилу. Если $\varphi \in C_0^\infty$, то отображение $p_\varphi : \mathcal{F}_{loc} \to \mathbb{R}_+$, определенное равенством

$$p_\varphi(u) = ||\varphi u||, \tag{4.6.11}$$

задает на $\mathcal{F}_{loc}$ некоторую полунорму. Семейство полунорм $\mathcal{P} = \{p_\varphi \,|\, \varphi \in C_0^\infty\}$ определяет на $\mathcal{F}_{loc}$ некоторую топологию.

Лемма 4.6.2. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'$ – полулокальное нормированное подпространство пространства $\mathcal{D}'$ такое, что умножение на функции из C_0^∞ непрерывно (т.е. для любого $\varphi \in C_0^\infty$ существует положительная константа $M(\varphi) > 0$ такая, что $||u\varphi|| \leq M(\varphi)||u||$ для любого $\varphi \in \mathcal{F}$), тогда топология τ, порожденная семейством полунорм $\mathcal{P}$ на $\mathcal{F}_{loc}$, метризуема.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi_k \in C_0^\infty$ функцию, удовлетворяющую следующим двум условиям:

$$[-k, k] \subseteq supp\, \varphi_k \subseteq [-(k+1), k+1]$$

и

$$\varphi_k(x) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in [-k, k].$$

Известно [**5**], что такие функции существуют. Рассмотрим сччтное семейство полунорм $\mathcal{P}' = \{p_k = p_{\varphi_k} \,|\, k = 1, 2, \ldots\}$. Покажем, что семейство полунорм $\mathcal{P}'$ является разделяющим на $\mathcal{F}_{loc}$ [**32**], [**42**]. В самом деле, пусть $u \in \mathcal{F}_{loc}$ отлично от нуля. Тогда существует $\varphi \in C_0^\infty$ такое, что $p_\varphi(u) = ||u\varphi|| > 0$. Так как $\varphi \in C_0^\infty$, то найдчтся такой номер k, что $supp\, \varphi \subseteq [-k, k]$ и, следовательно, $\varphi\varphi_k = \varphi$. Тогда имеем

$$0 < ||u\varphi|| = ||u\varphi\varphi_k|| \leq M(\varphi)||u\varphi_k|| = M(\varphi)p_k(\varphi).$$

Итак, $p_k(\varphi) > 0$. Таким образом, семейство полунорм $\{p_k\}$ является разделяющим и формула

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \tag{4.6.12}$$

определяет инвариантную метрику на $\mathcal{F}_{loc}$, совместную с топологией τ [**32**], [**42**]. Лемма доказана.

Замечание 4.6.3. *$\mathcal{F}_{loc}$ с метрикой* (4.6.12) *является полным метрическим пространством, если $\mathcal{F}$ – банахово пространство.*

Лемма 4.6.4. *Пусть $(\mathcal{D}', \mathbb{R}, \sigma')$ – динамическая система сдвигов на $\mathcal{D}'$. Если сужение σ' на $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ непрерывно в топологии $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, где $\mathcal{F}$ – подпространство $\mathcal{D}'$, удовлетворяющее условиям леммы* 4.6.2*, тогда сужение σ' на $\mathcal{F}_{loc} \times \mathbb{R}$ непрерывно в топологии $\mathcal{F}_{loc} \times \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $u_p \to u$ в $\mathcal{F}_{loc}$ и $h_p \to h$. Покажем, что $\sigma'(u_p, h_p) \to \sigma'(u,h)$ в $\mathcal{F}_{loc}$. Так как $h_p \to h$, то существует $h_0 > 0$ такое, что $|h_p| \le h_0$ при всех $p = 1, 2, \ldots$. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $B(A, h_0) = \{x + y \,|\, x \in A, \, |y| \le h_0\}$. Оценим

$$p_k(\sigma'(u_p,h_p) - \sigma'(u,h)) = ||\sigma'(u_p,h_p) - \sigma'(u,h)\varphi_k||,$$

для чего выберем $\varphi \in C_0^\infty$ так, чтобы $\varphi(x) = 1$ при всех $x \in B([-k,k], h_0)$. Тогда

$$\varphi(x+\tau)\varphi_k(x) = \varphi_k(x) \quad \text{при всех} \quad x \in [-k,k] \text{ и } |\tau| \le h_0.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} p_k(\sigma'(u_p,h_p) - \sigma'(u,h)) = ||[\sigma'(u_p,h_p) - \sigma'(u,h)]\varphi_k|| = \\ ||\sigma'(u_p,h_p)\varphi_k - \sigma'(u,h)\varphi_k|| = \\ ||\sigma'(u_p,h_p)\sigma(\varphi,h_p)\varphi_k - \sigma'(u,h)\sigma(\varphi,h)\varphi_k|| = \\ ||\sigma'(u_p\varphi,h_p)\varphi_k - \sigma'(u\varphi,h)\varphi_k|| = \\ ||[\sigma'(u_p\varphi,h_p) - \sigma'(u\varphi,h)]\varphi_k|| \le \\ M(\varphi_k)||\sigma'(u_p\varphi,h_p) - \sigma'(u\varphi,h)||. \end{gathered} \tag{4.6.13}$$

Так как $\varphi \in C_0^\infty$, то $u_p\varphi \to u\varphi$ в $\mathcal{F}$ и, следовательно,

$$\lim_{p\to+\infty} ||\sigma'(u_p\varphi, h_p) - \sigma'(u\varphi, h)|| = 0. \qquad (4.6.14)$$

Из (4.6.13) и (4.6.14) вытекает, что

$$\lim_{p\to+\infty} p_k(\sigma'(u_p, h_p) - \sigma'(u, h)) = 0$$

при каждом $= 1, 2, \ldots$. Лемма доказана.

Следствие 4.6.5. *Тройка $(\mathcal{F}_{loc}, \mathbb{R}, \sigma')$ есть динамическая система сдвигов на $\mathcal{F}_{loc}$, где $\mathcal{F}$ – полулокальное нормированное подпространство $\mathcal{D}'$, в котором умножение на функции из C_0^∞ непрерывно.*

Динамические системы сдвигов и асимптотически почти периодические функции в пространствах Соболева H^s. Пусть $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$k(\xi)k^{-1}(\eta) \leq C \cdot (1 + |\xi - \eta|)^l \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{R})$$

при некоторых постоянных C и l, зависящих только от функции k. Обозначим через $L^{k,p}$ множество всех измеримых в $\mathbb{R}$ функций $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, для которых конечен интеграл

$$||u||^p = \int |u(\xi)|^p k^p(\xi) d\xi,$$

где $1 \leq p \leq +\infty$. Если $k(\xi) = 1$, то пространство $L^{k,p}$ совпадает с пространством L^p. Пространства $L^{k,p}$ и L^p изометрически изоморфны [**6**], [**49**]. В частности, $L^{k,p}$ является рефлексивным банаховым пространством.

Пусть $H^{k,p}$ – совокупность тех обобщенных функций $u \in \mathcal{D}'$, Фурье-образ которых $\hat{u} = \mathcal{F}u$ принадлежит пространству $L^{k,p}$. Топология на $H^{k,p}$ задается с помощью нормы

$$||u|| = \Big(\int |\hat{u}(\xi)|^p k^p(\xi) d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Известно [**6**], [**49**], что оператор Фурье $\mathcal{F}$ устанавливает изометрический изоморфизм между $H^{k,p}$ и $L^{k,p}$. Отсюда вытекает, что $H^{k,p}$ является рефлексивным банаховым пространством.

Пусть $(\mathcal{D}', \mathbb{R}, \sigma')$ – динамическая система сдвигов на $\mathcal{D}'$. Покажем, что сужение на $H^{k,p} \times \mathbb{R}$ отображения $\sigma' : \mathcal{D}' \times \mathbb{R} \to \mathcal{D}'$ непрерывно в топологии $H^{k,p} \times \mathbb{R}$. Действительно, если $u_k \to u$ и в $H^{k,p}$ и $h_r \to h$ в $\mathbb{R}$, то

$$||\sigma'(u_r, h_r) - \sigma'(u, h)|| \leq ||\sigma'(u_r, h_r) - \sigma(u, h_r)|| + \\ ||\sigma'(u, h_r) - \sigma'(u, h)||. \tag{4.6.15}$$

Известно [**6**, с.18], что пространство $H^{k,p}$ инвариантно относительно сдвигов τ_a $(a \in \mathbb{R})$, причем для $u \in H^{k,p}$ имеют место равенства

$$||u|| = ||\tau_a u|| \quad \text{и} \quad \lim_{|a| \to 0} ||\tau_a u - u|| = 0. \tag{4.6.16}$$

Из (4.6.15) и (4.6.16) следует, что $\sigma'(u_r, h_r) \to \sigma'(u, h)$ в $H^{k,p}$.

Следствие 4.6.6. *Тройка $(H^{k,p}, \mathbb{R}, \sigma')$ есть динамическая система сдвигов на $H^{k,p}$.*

Таким образом, в пространстве $\mathcal{D}'$ мы выделим банахово подпространство $H^{k,p}$ такое, что сужение σ' на $H^{k,p} \times \mathbb{R}$ непрерывно в топологии $H^{k,p} \times \mathbb{R}$. Из [**6**] и [**49**] следует, что подпространство $H^{k,p}$ полулокально и операция умножения на функции из C_0^∞ непрерывна. Согласно лемме 4.6.2 на подпространстве $H^{k,p}_{loc}$, заданном по формуле (4.6.10), семейство полунорм (4.6.11) определяет метризуемую топологию.

Следствие 4.6.7. *Тройка $(H^{k,p}_{loc}, \mathbb{R}, \sigma')$ является динамической системой сдвигов на $H^{k,p}_{loc}$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из вышесказанного и леммы 4.6.4.

Через H^s и H^s_{loc} обозначим пространства $H^{k,p}$ и $H^{k,p}_{loc}$ соответственно в случае, когда $k(\xi) = (1 + |\xi|^2)^s$ и $p = 2$. Из следствий 4.6.6 и 4.6.7 следует, что на пространствах H^s и H^s_{loc} определены динамические системы сдвигов $(H^s, \mathbb{R}, \sigma')$ и $(H^s_{loc}, \mathbb{R}, \sigma')$ соответственно.

Как и для непрерывных функций, динамические системы $(H^{k,p}_{loc}, \mathbb{R}, \sigma')$ и $(H^{s}_{loc}, \mathbb{R}, \sigma')$ дают удобное средство изучения общих свойств функций из $H^{k,p}_{loc}$ с привлечением общей теории динамических систем.

Например, функцию $u \in H^{k,p}_{loc}$ назовем почти периодической (асимптотически почти периодической), если движение $\sigma'(u, \cdot)$, порождаемое функцией u в динамической системе $(H^{k,p}_{loc}, \mathbb{R}, \sigma')$ является почти периодическим (асимптотически почти периодическим).

4.7. Слабо асимптотические почти периодические функции

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $C_b(\mathbb{T}, E^n)$ банахово пространство всех непрерывных и ограниченных функций $f : \mathbb{T} \to E^n$ с нормой $||f|| = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{T}\}$. Отметим, что пространство $C_b(\mathbb{T}, E^n)$ изоморфно пространству $(C_b(\mathbb{T}, E^n))^n = C_b(\mathbb{T}, E^n) \times C_b(\mathbb{T}, E^n) \times \cdots \times C_b(\mathbb{T}, E^n)$.

Обозначим через $\tau_h f$ сдвиг функции $f \in (C_b(\mathbb{T}, E^n))^n$, т.е. $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$, $(C_b^*(\mathbb{T}, E^n))^n$ – пространство, сопряженное к $(C_b(\mathbb{T}, E^n))^n$. Если $\varphi \in (C_b^*(\mathbb{T}, E^n))^n$ и $f \in (C_b(\mathbb{T}, E^n))^n$, то $\langle \varphi, f \rangle \in E^n$. Знаком $\rightharpoonup$ будем обозначать слабую сходимость последовательностей в $(C_b(\mathbb{T}, E^n))^n$.

Функцию $f \in (C_b(\mathbb{R}_+, E^n))^n$ назовем слабо асимптотически почти периодической (с.а.п.п.), если множество сдвигов $\{\tau_h f : h \in \mathbb{R}_+\}$ образует относительно компактное множество в слабой топологии $(C_b(\mathbb{R}_+, E^n))^n$. Множество всех с.а.п.п. функций обозначим через $\mathcal{A}_{\text{сл}}$.

Учитывая эквивалентность свойств компактности и счетной компактности (см., например, [**88**], теорема 1.2) получим следующее утверждение.

Лемма 4.7.1. $f \in (C_b(\mathbb{R}_+, E^n))^n$ *– с.а.п.п. функция тогда и только тогда, когда для каждой последовательности* $\{h_k\} \subset \mathbb{R}_+$ *существуют подпоследовательность* $\{h_{k_m}\}$ *и функция* $g \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ *такие, что* $\tau_{h_{k_m}} \rightharpoonup g$, *т.е.* $\langle \varphi, \tau_{h_{k_m}} \rangle \to \langle \varphi, g \rangle$ *для каждой функции* $\varphi \in (C_b^*(\mathbb{R}_+, E))^n$.

Лемма 4.7.2. *Если* $f = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k$ *и* $g = \lim\limits_{k\to+\infty} g_k$ *в слабой топологии* $C_b(\mathbb{R}_+, E)$, *то* $fg = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k g_k$ *в слабой топологии* $C_b(\mathbb{R}_+, E)$.

Доказательство. Согласно теореме Гельфанда-Неймарка [**7**] пространство $C_b(\mathbb{R}_+, E)$ изометрически изоморфно кольцу $C(\Omega)$ всех коплекснозначных функций на компактном хаусдорфовом пространстве Ω (где Ω – пространство максимальных идеалов).

Учитывая сказанное выше, можно, не умаляя общности рассуждений, считать что $f_k, g_k \in C(\Omega)$. Так как слабая сходимость $\{f_k\}$ в $C(\Omega)$ эквивалентна ее ограниченности и поточечной сходимости, то $f_k g_k \rightharpoonup fg$. Лемма доказана.

Теорема 4.7.3. *Множество* $\mathcal{A}_{\text{сл}}$ *есть замкнутая подалгебра* $(C_b(\mathbb{R}_+, E))$, *инвариантная по отношению к сдвигам.*

Доказательство. Из определения следует, что если $f \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$, то $\tau_h f \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$ $(h \in \mathbb{R}_+)$. Так как $\mathcal{A}_{\text{сл}}$ – выпуклое подмножество $(C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$, то согласно теореме 1.1 из [**88**] для замкнутости $\mathcal{A}_{\text{сл}}$ в слабой топологии достаточно доказать его замкнутость в топологии $(C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$. Предположим, что $f = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k$ $(\{f_k\} \subset \mathcal{A}_{\text{сл}}$), т.е. $||f_k - f|| \to 0$ при $k \to +\infty$, где $||\cdot||$ – норма в $(C(\mathbb{R}_+, E))^n$, и пусть $\{h_m\} \subset \mathbb{R}_+$. Тогда существуют подпоследовательность $\{h_{m_p}\} \subset \{h_m\}$ и элементы g_m такие, что $\lim\limits_{p\to+\infty} \tau_{h_{m_p}} f_k = g_k$ в слабой топологии $(k = 1, 2, \dots)$. Если мы покажем, что существует $g = \lim\limits_{k\to+\infty} g_k$, то отсюда будет вытекать, что $g = \lim\limits_{p\to+\infty} \tau_{h_{m_p}} f$ в слабой топологии и, следовательно, $f \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$. Из теоремы Хана-Банаха вытекает, что

$$\begin{aligned} ||g_r - g_s|| &= \sup\{|\langle\varphi, g_r - g_s\rangle| : ||\varphi|| \le 1\} = \\ &= \sup_{||\varphi||\le 1} \lim_{p\to+\infty} |\langle\varphi, \tau_{h_{mp}}(f_r - f_s)\rangle| \le ||f_r - f_s||. \end{aligned}$$

Тогда $\{g_k\}$ фундаментальна и, следовательно, существует $\lim\limits_{k\to+\infty} g_k = g$.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что если $f^1, f^2 \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$, то $f^1 \cdot f^2 \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$. Пусть $f^1, f^2 \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$ и $\{h_m\} \subset \mathbb{R}_+$. Выберем подпоследовательность $\{h_{m_p}\}$ и элементы F^1, F^2 в $C_b(\mathbb{R}_+, E)$ такие, что

$$\lim_{p\to+\infty} \tau_{h_{m_p}} f^1 = F^1 \quad \text{и} \quad \lim_{p\to+\infty} \tau_{h_{m_p}} f^2 = F^2$$

в слабой топологии. Чтобы заключить, что

$$\lim_{p\to+\infty} \tau_{h_{m_p}} f^1 \cdot \tau_{h_{m_p}} f^2 = F^1 \cdot F^2$$

в слабой топологии, достаточно сослаться на лемму 4.7.2. Теорема доказана.

Следствие 4.7.4. *$\mathcal{A}_{\text{сл}}$ с нормой $||f|| = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}$ является банаховым пространством.*

Пусть $M \subset E^n$ – открытое множество. Обозначим через $C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E^n) = (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ множество всех непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}_+ \times M$ со значениями в E^n и ограниченных на каждом множестве $\mathbb{R}_+ \times K$, где $K \subset M$ – компактное множество. Для функции $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ через $\tau_h f$ обозначим сдвиг функции f по переменной t на h, т.е. $(\tau_h f)(t,p) = f(t+h,p)$, и $\tau_h f = f^{(h)}$.

Функцию $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ назовем слабо асимптотически почти периодической по t равномерно по $p \in M$, если для каждой последовательности $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ существуют подпоследовательность $\{t_{k_m}\}$ и функция $g \in C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E^n)$ такие, что $\langle \varphi, f^{(t_{k_m})}(\cdot,p)\rangle \to \langle \varphi, g(\cdot,p)\rangle$ при $m \to +\infty$ для каждого $\varphi \in (C_b^*(\mathbb{R}, E))^n$ равномерно по p на каждом компакте $K \subset M$.

Лемма 4.7.5. *Функция $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ слабо асимптотически почти периодична по t равномерно по $p \in M$ тогда и только тогда, когда $f(\cdot,p) \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ с.а.п.п. для каждого $p \in M$ и отображение $M \ni p \to f(\cdot,p) \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f с.а.п.п. по t равномерно по $p \in M$, тогда из соответствующего определения следует, что $f(\cdot,p)$ с.а.п.п. для каждого $p \in M$. Допустим, что отображение $p \to f(\cdot,p)$ не является непрерывным в некоторой точке $p_0 \in M$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{p_k\} \subset K \subset M$ такие, что K – компакт, $p_k \to p_0$ и

$$|f(t_k, p_k) - f(t_k, p_0)| \geq 4\varepsilon_0 \tag{4.7.1}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как f с.а.п.п. по $t \in \mathbb{R}_+$ равномерно по $p \in M$, то существуют $\{t_{k_m}\}$ и $g \in (C(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ такие, что $\tau_{t_{k_m}} f \rightharpoonup g$. Тогда для любого $\varphi \in (C_b^*(\mathbb{R}_+, E))^n$ и компакта K будем иметь

$$|\langle \varphi, \tau_{t_{k_m}} f(\cdot, p)\rangle - \langle \varphi, g(\cdot, p)\rangle| < \varepsilon_0$$

для $n > n_1$ и всех $p \in K$. Для $\varphi = \delta_0$ (δ_0 – мера Дирака, сосредоточенная в точке 0) будем иметь

$$|\tau_{t_{k_m}} f(0, p_{k_m}) - g(0, p_{k_m})| < \varepsilon \tag{4.7.2}$$

и

$$|\tau_{t_{k_m}} f(0, p_0) - g(0, p_0)| < \varepsilon \quad (n > n_1). \tag{4.7.3}$$

Далее из непрерывности g в точке $(0, p_0)$ найдется $n_2 > n_1$ такое, что

$$|g(0, p_{k_m}) - g(0, p_0)| < \varepsilon \quad (m > n_2 > n_1). \tag{4.7.4}$$

Из неравенств (4.7.2) – (4.7.4) получаем для любого $m > n_2$

$$|\tau_{t_{k_m}} f(0, p_{k_m}) - \tau_{t_{k_m}} f(0, p_0)| \leq |\tau_{t_{k_m}} f(0, p_{k_m}) - g(0, p_{k_m})| +$$
$$|\tau_{t_{k_m}} f(0, p_0) - g(0, p_0)| + |g(0, p_{k_m}) - g(0, p_0)| < 3\varepsilon,$$

что противоречит неравенству (4.7.1).

Достаточность. Пусть $\{t_k\}$ – последовательность вещественных чисел. Возьмем счетное всюду плотное множество $\{p_i\}$ из M. Поскольку $f(\cdot, p_i) \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$, то можно найти подпоследовательность $\{t_{k_m}\}$ такую, что $\tau_{t_{k_m}} f(\cdot, p_i) \rightharpoonup g(\cdot, p_i)$ при каждом $i \in \mathbb{N}$. По теореме 1.1 [**88**] можно построить последовательность $\{H_m\}$ из выпуклой оболочки последовательности $\{\tau_{t_{k_m}} f\}$ такую, что $\{H_m(\cdot, p)\}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_+$ к $g(\cdot, p)$ равномерно по $p \in K$. Исходя из этого и из непрерывности $p \to f(\cdot, p)$, получаем, что $\{H_m(\cdot, p)\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерно по p на компактном подмножестве

$K \subset M$. Итак, существует $g(\cdot, p) \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ $(p \in M)$ такой, что для любого компакта $K \subset M$ имеем

$$\lim_{m \to +\infty} \sup_{p \in K} |H(\cdot, p) - g(\cdot, p)| = 0.$$

Следовательно, $p \to g(\cdot, p)$ непрерывно. Для каждого фиксированного $\varphi \in (C^*(\mathbb{R}_+, E))^n$ имеем равномерно по $p \in K \subset M$,

$$\langle \varphi, \tau_{t_{k_m}} f(\cdot, p) \rangle \to \langle \varphi, g(\cdot, p) \rangle.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.7.6. *Если отображение $p \to f(\cdot, p)$ $(p \in M)$ непрерывно, то для каждых компакта $K \subset M$ и $\varepsilon > 0$, существуют $p_1, p_2, \ldots, p_m \in K$ и полиномы Q_i на E^n $(i = \overline{1, m})$ такие, что*

$$|f(t, p) - \sum_{i=1}^{m} f(t, p_i) Q_i(p)| < \varepsilon$$

для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ и $p \in K$.

Доказательство. Пусть K – компакт и $\varepsilon > 0$. Множество $\{f(\cdot, p) : p \in K\}$ компактно, поэтому существует конечная $\varepsilon/2$ сеть $\{f(\cdot, p_i) \mid i = \overline{1, m}\}$. Положим $U_i = \{p : ||f(\cdot, p) - f(\cdot, p_i)|| < \varepsilon/2\}$. Пусть g_i $(i = \overline{1, m})$ – элементы разложения единицы для покрытия $\{U_i\}$ из K, тогда

$$|f(t, p) - \sum_{i=1}^{m} f(t, p_i) g_i(p)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь, если мы аппроксимируем g_i на K полиномом Q_i $(i = \overline{1, m})$, то получим утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 4.7.7. *Если $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ слабо асимптотически почти периодично по t равномерно по $p \in M, y \in \mathcal{A}_{сл}$ и $Q = \overline{y(\mathbb{R}_+)} \subset M$, то $W \in \mathcal{A}_{сл}$, где $W(t) = f(t, y(t))$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По лемме 4.7.6 найдется $g \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ такая, что $|W(t) - g(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, причем

$$g(t) = \sum_{i=1}^{m} f(t, p_i) \cdot Q_i(y(t)).$$

Так как $f(\cdot, p_i) \in \mathcal{A}_{\text{СЛ}}$, Q_i – некоторые полиномы и $\mathcal{A}_{\text{СЛ}}$ – подалгебра алгебры $(C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$, то $g \in \mathcal{A}_{\text{СЛ}}$. Поскольку ε произвольно и $\mathcal{A}_{\text{СЛ}}$ – замкнутое множество, то W с.а.п.п.. Лемма доказана.

Пусть $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M, E))^n$. Через $H^+(f)$ обозначим множество всех слабых предельных точек $\{\tau_n f : h \in \mathbb{R}_+\}$, т.е.

$$H^+(f) = \{g | g \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M, E))^n, \exists \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+, \tau_{t_k} f \rightharpoonup g\}.$$

Установим некоторые дополнительные свойства слабо асимптотически почти периодических функций.

Лемма 4.7.8. *Если $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M, E))^n$ с.а.п.п. по t равномерно по $p \in M$, то и все функции в $H^+(f)$ с.а.п.п. по t равномерно по $p \in M$.*

Доказательство. Пусть $g \in H^+(f), \tau_{t_k} f \rightharpoonup g$. По лемме 4.7.5 и теореме 4.7.3 мы имеем $g(\cdot, p) \in \mathcal{A}_{\text{СЛ}}$ для каждого $p \in M$. При фиксированных $p, q \in M$ будем иметь

$$|g(t,p) - g(t,q)| = \lim_{k \to +\infty} |\tau_{t_k} f(t,p) - \tau_{t_k} f(t,q)| \leq ||f(\cdot,p) - f(\cdot,q)||$$

для каждого $t \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, отображение $p \to g(\cdot, p)$ непрерывно и согласно лемме 4.7.5 $g \in H^+(f)$ – с.а.п.п. по t равномерно по $p \in M$. Лемма доказана.

Лемма 4.7.9. *Если $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M, E))^n$ с.а.п.п. по t равномерно по $p \in M$, то для любого $g \in H^+(f)$ $H^+(g) \subseteq H^+(f)$.*

Доказательство. Пусть $g \in H^+(f)$, тогда существует $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что $\tau_{t_k} f \rightharpoonup g$. Покажем, что при любом $h \in \mathbb{R}_+, \tau_{t_k+h} f \rightharpoonup \tau_h g$. Действительно, $\{\tau_{t_k+h} f\}$ относительно компактна в слабой топологии, ибо $f \in \mathcal{A}_{\text{СЛ}}$. Покажем, что $\{\tau_{t_k+h} f\}$ слабо сходится. Для этого достаточно показать, что она содержит единственную предельную точку. Допустим, что это не так. Тогда существуют $g^1, g^2 \in H^+(f)$ и $\{t_k^i + h\} \subset \{t_k + h\}$ такие, что $\tau_{t_k^i + h} f \rightharpoonup g^i$ $(i = 1, 2)$, следовательно,

$$g^i(t,p) = \lim_{k \to +\infty} \tau_{t_k^i + h} f(t,p).$$

Так как

$$\tau_h g(t,p) = \lim_{k \to +\infty} \tau_{t_k + h} f(t,p)$$

для любого $t \in \mathbb{R}_+$, и $p \in M$, $\{t^i_k + h\} \subseteq \{t_k + h\}$, то мы получим, $g^1(t,p) = g^2(t,p) = g^{(h)}(t,p)$. Таким образом, $\tau_{t_k+h} f \rightharpoonup \tau_h g$ и, следовательно, $H^+(g) = \overline{\{g^{(h)} | h \in \mathbb{R}_+\}} \subseteq H^+(f)$, ибо $\tau_h g \in H^+(f)$ при всех $h \in \mathbb{R}_+$ и $H^+(f)$ замкнуто. Отсюда следует компактность $H^+(g)$ в слабой топологии. Лемма доказана.

Следствие 4.7.10. *$\{\psi_k\} \to y$ слабо в $(C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ тогда и только тогда, когда $\{\psi_k\}$ ограничена и $\langle \varphi, \psi_k \rangle \to \langle \varphi, y \rangle$ для каждого $\varphi \in (C^*_b(\mathbb{R}_+, E))^n$, $\varphi = (\beta, \beta, \ldots, \beta)$, где β – линейный мультипликативный функционал.*

Доказательство. Утверждение следует из теории максимальных идеалов Гельфанда-Неймарка и специфики слабой сходимости в $C(\Omega)$, где Ω – компактное хаусдорфово пространство [**7**].

Следуя [**106**], обозначим через $\hat{f}$ функцию, определяемую правилом $\hat{f}(s,p) = \langle \varphi, f_s(\cdot,p) \rangle$ для $\varphi \in (C^*_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ и $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$.

Лемма 4.7.11. *Если $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M; E))^n$ слабо асимптотически почти периодична по t равномерно по p на котпактах из M и $\varphi \in (C^*_b(\mathbb{R}_+, E))^n, \varphi = (\beta, \beta, \ldots, \beta)$ (β – линейный мультипликативный функционал), то $\hat{f} \in H^+(f)$. Если $\tau_{t_k} f \rightharpoonup g$, то $\tau_{t_k} \hat{f} \rightharpoonup \hat{g}$.*

Доказательство. Множество мер Дирака $\{\delta_s | s \in \mathbb{R}_+\} \subset (C^*_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ плотно на множестве всех линейных непрерывных мультипликативных функционалов в слабой* топологии $(C^*_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ [**7**]. Следовательно, существует $\{t_k\}$ такая, что $\delta_{t_k} \rightharpoonup \varphi$, т.е. $\langle \varphi, f^{(t)}(\cdot,p) \rangle = \lim\limits_{k\to+\infty} \langle \delta_{t_k}, f^{(t)}(\cdot,p) \rangle$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to+\infty} f(t + t_k, p) = \langle \varphi, f^{(t)}(\cdot,p) \rangle$. Но это означает, что $\tau_{t_k} f(t,p) \to \hat{f}(t,p)$. Извлекая, если это необходимо, подпоследовательность $\{\tau_{t_{k_m}} f\}$ из $\{\tau_{t_k} f\}$, получим $f_{t_{n_k}} \rightharpoonup \hat{f}$.

Поскольку $(C_b(\mathbb{R}_+, E))^n \ni y \to \hat{y} \in (C(\mathbb{R}_+, E))^n$ – линейная изометрия, то заключаем, что имеет место и второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 4.7.12. *Если отображение $p \to f(\cdot, p)$ $(p \in M)$ непрерывно, $y \in (C(\mathbb{R}_+, E))^n$, $Q = \overline{y(\mathbb{R}_+)}$ – компактное подмножество в M и $\varphi \in (C_b^*(\mathbb{R}_+, E))^n$, то $\hat{f}(s, \hat{y}(s)) = \langle \varphi, w^{(s)} \rangle$ для $s \in \mathbb{R}_+$, где $w(t) = f(t, y(t))$.*

Доказательство. Пусть τ, η, ψ, χ – отображения, определенные формулами

$$\tau : C_b^*(\mathbb{R}_+, E) \to (C_b^*(\mathbb{R}_+, E))^n, \qquad \tau(\varphi) = (\beta(\varphi), \beta(\varphi), \ldots, \beta(\varphi)),$$
$$\chi : C_b^*(\mathbb{R}_+, E) \to E^n, \qquad \chi(\varphi) = \langle \tau(\varphi), w^{(s)} \rangle,$$
$$\eta : C_b^*(\mathbb{R}_+, E) \to E^n, \qquad \eta(\varphi) = \langle \tau(\varphi), y^{(s)} \rangle,$$
$$\psi : C_b^*(\mathbb{R}_+, E) \times E^n \to E^n, \qquad \psi(\varphi, p) = \langle \tau(\varphi), f^{(s)}(\cdot, p) \rangle.$$

Рассмотрим слабую* топологию в $C(\mathbb{R}_+, E)$. Тогда χ, η, ψ являются непрерывными отображениями. Так что $\beta \to \psi(\beta, \eta(\beta))$ также непрерывно. Поскольку на множестве мер Дирака $\psi(\beta, \eta(\beta)) = \chi(\beta)$, то это же равенство имеет место на множестве мультипликативных функционалов. Лемма доказана.

4.8. Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения со слабо асимптотически почти периодическими коэффициентами

Теорема 4.8.1. *Пусть $f \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M, E))^n$ с.а.п.п. по t равномерно по $p \in M$. Если для каждой функции $g \in \Omega_f = \{g | \exists h_k \to +\infty, \tau_{h_k} f \rightharpoonup g\}$ уравнение*

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \tag{4.8.1}$$

имеет не более одного решения на $\mathbb{R}$ со значениями в компактном множестве $K \subset M \subset E^n$ и $\psi \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ – решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

такое, что $\psi(\mathbb{R}_+) \subseteq K$, то ψ – с.а.п.п. функция.

Доказательство. Пусть $K \subset M$ – компакт такой, что $\psi(\mathbb{R}_+) \subseteq K$ и $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ $(t_k \to +\infty)$. Тогда существуют подпоследовательность $\{t_{k_m}\}$ и функция $g \in (C_b(\mathbb{R}_+ \times M, E))^n$ такие, что $f^{(t_{k_m})} \rightharpoonup g$ и $\{\psi^{(t_{k_m})}\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах из $\mathbb{R}$ к функции $y \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$ и $y(\mathbb{R}) \subseteq K$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\psi^{(t_{k_m})} \rightharpoonup y$.

Допустим, что $\{\psi^{(t_{k_m})}\} \not\rightharpoonup y$. Согласно лемме 4.7.1 существует мультипликативный функционал φ, что $\{\langle \varphi, \psi^{(t_{k_m})}\rangle\}$ не сходится к $\langle \varphi, y\rangle$, где $\varphi \in (C_b^*(\mathbb{R}_+, E))^n$. Из определения g и y следует, что $\dot{y} = g(t, y)$, а из леммы 4.7.5, с учетом соотношения $\langle \varphi, \dot{y}^s\rangle = \hat{\dot{y}}(s)$, получим

$$\hat{\dot{y}} = \hat{g}(t, \hat{y}(t)) \tag{4.8.2}$$

для $t \in \mathbb{R}$. Согласно лемме 4.7.11 $\hat{y} \in H^+(y)$ и, следовательно, $\hat{y} \subseteq K$. Аналогично для $t \in \mathbb{R}$

$$\hat{\dot{\psi}}(t) = \hat{f}(t, \hat{\psi}(t)). \tag{4.8.3}$$

Поскольку $\{\langle \varphi, \psi^{(t_{k_m})}\rangle\}$ не сходится к $\langle \varphi, y\rangle$, то существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{r_m\} \subset \{t_{k_m}\}$ такие, что

$$|\langle \varphi, \psi^{(r_m)}\rangle - \langle \varphi, y\rangle| \geq \varepsilon \tag{4.8.4}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\{\hat{\psi}^{(r_n)}\}$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}$ к функции $z \in (C_b(\mathbb{R}_+, E))^n$. По лемме 4.7.11 $\hat{f}^{(r_m)} \rightharpoonup \hat{g}$ и $\hat{g} \in H^+(f)$. Отсюда с учетом (4.8.3) следует, что

$$\dot{z}(t) = \hat{g}(t, z(t)), \tag{4.8.5}$$

($z(\mathbb{R}) \subseteq K$) для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда из равенств (4.8.2) и (4.8.5) следует, что функция z и y суть решения в K одного и того же уравнения, и согласно условию теоремы $z = y$.

С другой стороны, из неравенства (4.8.4) имеем

$$\begin{aligned} |z(0) - \hat{y}(0)| &= \lim_{m\to+\infty} |\hat{\psi}^{(r_m)}(0) - \langle \varphi, y\rangle| = \\ &= \lim_{m\to+\infty} |\langle \varphi, \psi^{(r_m)}\rangle - \langle \varphi, y\rangle| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что $\psi^{(t_{k_m})} \rightharpoonup y$. Теорема доказана.

Лемма 4.8.2. *Пусть $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, A, $A_k \in C(I, [E]^n)$ и выполнены следующие условия:*

1) $||A_k(t)|| \le M$ *при всех* $t \in [a,b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *где* M – *некоторая положительная константа.*
2) $A_k(t) \to A(t)$ *при каждом* $t \in I$.

Тогда:

1) *Существует* $L > 0$ *такое, что* $||U(t,A_k)|| \le L$ *при всех* $t \in I$ *и* $k \in \mathbb{N}$, *где* $U(t,A_k)$ – *оператор Коши уравнения*
$$\frac{dx}{dt} = A_k(t)x.$$
2) *При каждом* $t \in I$ $U(t,A_k) \to U(t,A)$, *когда* $k \to +\infty$.

Доказательство. Так как $U(t,A_k)$ является решением системы
$$\begin{cases} \dot{U}(t,A_k) = A_k(t)U(t,A_k) \\ U(0,A_k) = Id_{E^n} \ , \end{cases}$$
то из неравенства (3.1.3) из **[53]** следует, что
$$||U(t,A_k)|| \le e^{M[b-a]} = L \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{4.8.6}$$

Докажем второе утверждение леммы. Положим $V_k(t) = U(t,A) - U(t,A_k)$ и заметим, что $V_k(t)$ удовлетворяет системе
$$\begin{cases} \frac{dV_k(t)}{dt} = A(t)V_k(t) + [A(t) - A_k(t)]U(t,A_k) \\ V_k(0) = 0 \ . \end{cases}$$
Откуда следует, что
$$V_k(t) = U(t,A)\int\limits_0^t U^{-1}(\tau,A)[A(\tau) - A_k(\tau)]U(\tau,A_k)d\tau. \tag{4.8.7}$$
Пусть $K = \max\{||U(t,A)||, ||U^{-1}(t,A)|||a \le b\}$. Из (4.8.6) и (4.8.7) следует неравенство
$$||V_k(t)|| \le K^2L|\int\limits_0^t ||A_k(\tau) - A(\tau)||d\tau|. \tag{4.8.8}$$
Переходя к пределу в неравенстве (4.8.8), с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знак интеграла **[21]**, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 4.8.3. *Если $A \in \mathcal{A}_{сл}(\mathbb{R}_+, [E^n])$ и уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$, то каждое уравнение*

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y, \tag{4.8.9}$$

где $B \in \Omega_A = \{B | \exists t_k \to +\infty, A^{(t_k)} \rightharpoonup B\}$, гиперболично на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $B \in \Omega_A$, тогда существует $t_k \to +\infty$, $A^{(t_k)} \rightharpoonup B$. Пусть $P(A)$, $Q(A)$ и N_1, N_2, ν_1, ν_2 – проекторы и константы, участвующие в определении гиперболичности на $\mathbb{R}_+$ уравнения (3.3.1). Положим

$$P(A^{(t_k)}) = U(t_k, A)P(A)U^{-1}(t_k, A)$$

и

$$Q(A^{(t_k)}) = U(t_k, A)Q(A)U^{-1}(t_k, A).$$

Из неравенств (3.3.5) и (3.3.6) следует, что операторы $P(A^{(t_k)})$ и $Q(A^{(t_k)})$ равномерно ограничены и, следовательно, $\{P(A^{(t_k)})\}$ и $\{Q(A^{(t_k)})\}$ можно считать сходящимися. Положим $P(B) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(A^{(t_k)})$ и $Q(B) = \lim\limits_{k\to+\infty} Q(A^{(t_k)})$. Заметим, что

$$P^2(A^{(t_k)}) = P(A^{(t_k)}) \tag{4.8.10}$$

и

$$P(A^{(t_k)}) + Q(A^{(t_k)}) = Id_{E^n} \tag{4.8.11}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу в (4.8.10), когда $k \to +\infty$, получаем $P^2(B) = P(B)$. Аналогично доказывается, что $Q^2(B) = Q(B)$. Наконец, из (4.8.11) следует, что $P(B)+Q(B) = Id_{E^n}$. Таким образом, $P(B)$ и $Q(B)$ – пара взаимно дополнительных проекторов. Покажем, что их можно взять в качестве проекторов в определении гиперболичности на $\mathbb{R}$ уравнения (4.8.9). Действительно, пусть $t \geq \tau$ и $t, \tau \in \mathbb{R}$. Тогда при достаточно больших t_k числа t и τ принадлежат интервалу $]-t_k, +\infty[$. Из равенств

$$\begin{aligned}
&U(t, A^{(t_k)})P(A^{(t_k)})U^{-1}(\tau, A^{(t_k)}) = \\
&U(t, A^{(t_k)})U(t_k, A)P(A)U^{-1}(t_k, A)U^{-1}(\tau, A^{(t_k)}) = \\
&U(t+t_k, A)P(A)U^{-1}(\tau+t_k, A)
\end{aligned}$$

и неравенства (3.3.5), учитывая вышесказанное и лемму 4.8.2, получим неравенство $||U(t,B)P(B)U^{-1}(\tau,B)|| \le N_1 e^{-\nu_1(t-\tau)}$.

Аналогично доказывается, что $||U(t,B)Q(B)U^{-1}(\tau,B)|| \le N_2 e^{\nu_2(t-\tau)}$ при $t \le \tau$ и $t,\tau \in \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Следствие 4.8.4. *Пусть $A \in \mathcal{A}_{сл}(\mathbb{R}_+,[E^n])$ и уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Тогда для любого $B \in \Omega_A$ уравнение* (4.8.1) *не имеет ненулевых ограниченных на $\mathbb{R}$ решений.*

Теорема 4.8.5. *Пусть уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и $A(t) \in \mathcal{A}_{сл}(\mathbb{R}_+,[E^n])$. Если $f \in \mathcal{A}_{сл}(\mathbb{R}_+,[E^n])$, то уравнение* (3.3.2) *имеет хотя бы одно слабо асимптотически почти периодическое решение. Это решение определяется равенством* (3.3.7).

Доказательство. Заметим, что всякая с.а.п.п. функция $f \in \mathcal{A}_{\text{сл}}$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, поэтому из [**8**] следует, что равенством (3.3.7) задается ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (3.3.2). Согласно следствию 4.8.4 для каждого $B \in \Omega_A$ и $g \in \Omega_f$ уравнение (3.3.4) имеет не более одного ограниченного на $\mathbb{R}$ решения. Тогда по теореме 4.8.1 это решение слабо асимптотически почти периодично.

Теорема 4.8.6. *Пусть $A \in \mathcal{A}_{сл}(\mathbb{R}_+,[E^n])$ и уравнение* (3.3.1) *гиперболично на $\mathbb{R}_+$. Если $F \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E^n, E^n)$ слабо асимптотически почти периодично по t равномерно по x на компактах из E^n и удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$ с достаточно малой константой Липшица, то уравнение* (3.7.6) *имеет хотя бы одно слабо асимптотически почти периодическое решение.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$S : \mathcal{A}_{\text{сл}}(\mathbb{R}_+, E^n) \to \mathcal{A}_{\text{сл}}(\mathbb{R}_+, E^n),$$

определенное равенством

$$(Sy)(t) = \int\limits_0^{+\infty} G_A(t,\tau)F(\tau,y(\tau))d\tau. \tag{4.8.12}$$

Согласно лемме 4.7.5 и теореме 4.8.5 равенством (4.8.12) действительно корректно определен оператор $S : \mathcal{A}_{\text{сл}}(\mathbb{R}_+, E^n) \to \mathcal{A}_{\text{сл}}(\mathbb{R}_+, E^n)$. Из оценки $||G_A(t,\tau)|| \leq Ne^{-\nu|t-\tau|}$ и условия Липшица для F следует, что S – сжимающие отображение, если $(\frac{2N}{\nu})L < 1$, где L – константа Липшица функции F. Тогда единственная неподвижная точка отображения S будет с.а.п.п. решением уравнения (3.7.6). Теорема доказана.

Следствие 4.8.7. *Пусть $A \in \mathcal{A}_{сл}(\mathbb{R}_+, [E^n])$, уравнение (3.3.1) гиперболично на $\mathbb{R}_+$ и $F \in C_b(\mathbb{R}_+ \times E^n, E^n)$ слабо асимптотически почти периодично по t равномерно по x на компактах из E^n и удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon F(t,x)$$

имеет по крайней мере одно слабо асимптотически почти периодическое решение φ_ε, причем $||\varphi_\varepsilon|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 4.8.8. *Кадая симптотически почти периодическая в смысле Фреше функция являются слабо асимптотически почти периодической. Далее, если $p \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ слабо почти периодична* **[88]** *(т.е. множество всех сдвигов $\{p_\tau | \tau \in \mathbb{R}\}$ функции p относительно компактно в слабой* топологии $C_b(\mathbb{R}, E^n)$) и $\omega \in C_0(\mathbb{R}, E^n)$, то функция $\varphi = p + \omega$ является слабо асимптотически почти периодической. Заметим, что существуют слабо асимптотически почти периодические функции, которые не являются асимптотически почти периодическими в смысле Фреше. Для подтверждения сказанного достаточно рассмотреть функцию $\varphi(t) = \sin(t + \ln(1 + |t|)) + e^{-t}$. Функция $p(t) = \sin(t + \ln(1+|t|))$ является слабо почти периодической, но не почти периодической по Бору (см., например,* **[99]***).*

Глава 5

Асимптотически почти периодические решения функционально-дифференциальных, интегральных и эволюционных уравнений

5.1. Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) и динамические системы

Пусть $r > 0$, $C([a,b],E^n)$ – банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi : [a,b] \to E^n$ с нормой sup. Если $[a,b] = [-r,0]$, то положим $C = C([-r,0],E^n)$. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ и $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], E^n)$, для любого $t \in [\sigma, \sigma + A]$ определим $u_t \in C$ соотношением $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Пример 5.1.1. Автономные функционально-дифференциальные уравнения (автономные ФДУ). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x_t), \tag{5.1.1}$$

где $f \in C(C, E^n)$. Относительно уравнения (5.1.1) будем предполагать, что выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости решений на $\mathbb{R}_+$. Пусть $\varphi \in C$ и x – решение уравнения (5.1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(s) = \varphi(s) \quad (s \in [-r,0]). \tag{5.1.2}$$

Определим отображение $\pi : C \times \mathbb{R}_+ \to C$ правилом $\pi(\varphi, t) = x_t$, где x – решение задачи Коши (5.1.1) – (5.1.2). Из общих свойств ФДУ **[24]**, **[48]** следует, что π непрерывно, $\pi(\varphi, 0) = \varphi$ $(\varphi \in C)$ и $\pi(\pi(\varphi, t_1), t_2) = \pi(\varphi, t_1 + t_2)$ при всех $\varphi \in C$ и

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ и, следовательно, $(C, \mathbb{R}_+, \pi)$ есть полугупповая динамическая система на C.

Пример 5.1.2. Неавтономные ФДУ с единственностью. Обозначим через $C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ пространство всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \times C \to E^n$ с открыто-компактной топологией и $(C(\mathbb{R} \times C, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическую систему сдвигов на $C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ (см. пример 1.5.4). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t), \tag{5.1.3}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$. Функцию $f \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ назовем регулярной, если для любого $g \in H(f) = \overline{\{f^{(\tau)} : \tau \in \mathbb{R}\}}$, где $f^{(\tau)} = \sigma(f, \tau)$, для уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t, y_t) \tag{5.1.4}$$

выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости решений на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ регулярна. Положим $Y = H(f)$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y, индуцированную динамической системой $(C(\mathbb{R} \times C, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Определим отображение $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \to X$, где $X = C \times Y$, равенством $\pi((\psi, g), \tau) = (y_\tau, g^{(\tau)})$, где y – решение уравнения (5.1.4), удовлетворяющее начальному условию

$$y(s) = \psi(s) \quad (s \in [-r, 0]). \tag{5.1.5}$$

Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и правой части (см., например, [**48**, гл.2]) вытекает, что отображение π непрерывно. Далее, положим $\phi(\psi, \tau, g) = y_\tau$, где $y : [-r, +\infty[\to E^n$ – решение уравнения (5.1.4), удовлетворяющее условию (5.1.5) и $y_\tau \in C$ определено равенством $y_\tau(s) = y(s + \tau)$ $(s \in [-r, 0])$. Легко проверить, что имеет место равенство $\phi(\phi(\psi, \tau, g), t, g_\tau) = \phi(\psi, t + \tau, g)$ при всех $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, $\psi \in C$ и $g \in H(f)$. Откуда следует, что $\pi(\pi(x, t), \tau) = \pi(x, t + \tau)$ при всех $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ и $x \in X = C \times H(f)$. Наконец, заметим что $\pi(x, 0) = x$ при всех $x \in X = C \times H(f)$ и, следовательно, $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ есть полугрупповая динамическая система на $X = C \times H(f)$. Положим $h = pr_2 : X \to Y$. Легко проверить, что h является гомоморфизмом $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно, тройка $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ является неавтономной динамической системой, порожденной уравнением (5.1.3) с регулярной правой частью f.

Пример 5.1.3. Неавтономные ФДУ без единственности. Пусть $\mathbb{R}_r = [-r, +\infty[$ и $C(\mathbb{R}_r, E^n)$ – пространство всех непрерывных функций $f : \mathbb{R}_r \to E^n$ с топологией равномерной сходимости на компактах и $(C(\mathbb{R}_r, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на $C(\mathbb{R}_r, E^n)$ (см. пример 1.5.3). Положим $Y = C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $C(\mathbb{R} \times C, E^n)$. Далее, пусть $X = \{(\varphi, f) : \varphi \in C(\mathbb{R}_r, E^n),\ f \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ и φ – решение уравнения (5.1.3) $\}$. Очевидно, X является положительно инвариантным относительно сдвигов множеством динамической системы $(C(\mathbb{R}_r, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma) \times (C(\mathbb{R} \times C, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Кроме того, из результатов работ [**13**], [**48**, гл.2] следует, что X замкнуто в $C(\mathbb{R}_r, E^n) \times C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ и, следовательно, на X индуцируется полугрупповая динамическая система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$. Легко проверить, что отображение $h = pr_2 : X \to Y$ является гомоморфизмом динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно, $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ есть неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.1.3), правая часть которого не является регулярной.

В ппредыдущих примерах реализовалась концепция ФДУ с конечным запаздыванием. В следующем примере мы рассмотрим ФДУ с неограниченным запаздыванием. Но предварительно введем некоторые функциональные пространства.

Пространства Хейла. Пусть B – векторное пространство функций $\phi : \mathbb{R}_- \to E^n$ ($\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$) с полунормой $|\cdot|_B$.

Для $\sigma \geq 0$ и $\phi \in B$ через ϕ^σ обозначим сужение ϕ на $]-\infty, -\sigma]$ и $B^\sigma = \{\phi^\sigma | \phi \in B\}$. На B^σ определим полунорму $|\cdot|_\sigma$ равенством

$$|\eta|_\sigma = \inf\{|\psi|_B : \psi \in B \text{ и } \psi^\sigma = \eta\}.$$

Если $x :]-\infty, a[\to E^n$ $(a > 0)$, то для каждого $t \in [0, a[$ можно определить функцию x_t соотношением $x_t(s) = x(t+s)$ $(s \in \mathbb{R}_-)$.

Для чисел a и τ ($a > \tau$) через A_τ^a обозначаем класс функций $x :]-\infty, a[\to E^n$ таких, что x непрерывна на $[\tau, a[$ и $x_\tau \in B$.

B называется пространством Хейла (см., например, [**93**]), если выполнены следующие условия:

(I) Если $x \in A_\tau^a$, то $x_\tau \in B$ при всех $t \in [\tau, a[$ и x_t непрерывна по t.

(II) Для любых $\phi \in B$ и $\sigma \geq 0$, если $|\phi|_B = 0$, то $|\tau^\sigma \phi|_\sigma = 0$, где τ^σ – линейный оператор, действующий из B в B^σ и определенный равенством $\tau^\sigma \phi(\theta) = \phi(\theta + \sigma)$ ($\theta \in]-\infty, -\sigma]$).

(III) Если последовательность $\{\phi_k\} \subseteq B$ равномерно ограничена на $\mathbb{R}_-$ по отношению к полунорме $|\cdot|_B$ и сходится к ϕ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}_-$, то $\phi \in B$ и $|\phi_k - \phi|_B \to 0$, когда $k \to +\infty$.

(IV) Существует число $K > 0$ такое, что для всех $\phi \in B$ и $\sigma \geq 0$

$$|\phi|_B \leq K(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| + |\phi^\sigma|_\sigma).$$

(V) Если $\phi \in B$, то $|\tau^\sigma \phi|_\sigma \to 0$ при $\sigma \to +\infty$.

(VI) $|\phi(0)| \leq M_1 \cdot |\phi|_B$ для некоторого $M_1 > 0$.

Примеры пространств Хейла.

а. $C_{bu}(\mathbb{R}_-, E^n) = \{\phi |\ \phi : \mathbb{R}_- \to E^n$, ϕ равномерно непрерывна и ограничена$\}$ с нормой sup.

б. $C_\nu = \{\phi |\ \phi : \mathbb{R}_- \to E^n$, ϕ непрерывна, $\phi(\theta)e^{\nu\theta} \to 0$ п $\theta \to -\infty\}$ с нормой $|\phi|_{C_\nu} = \sup\{|\phi(\theta)| \cdot e^{\nu\theta} : \theta \in]-\infty, 0]\}$.

в. Пусть $r \geq 0$, $p \geq 1$ и $g(\theta)$ – неубывающая функция, положительная и определенная на $\mathbb{R}_-$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{0} g(\theta) d\theta < +\infty$. B состоит из измеримых по Лебегу отображений $\phi : \mathbb{R}_r \to E^n$, непрерывных на $[-r, 0]$ с нормой

$$|\phi|_B = \{\sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|^p + \int\limits_{-\infty}^{0} |\phi(\theta)|^p \cdot g(\theta) d\theta\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пример 5.1.4. ФДУ с неограниченным запаздыванием. Пусть B – пространство Хейла и $W \subseteq B$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.1.3), где $f \in C(\mathbb{R} \times W, E^n)$. Как и в случае с ФДУ из примеров 5.1.2 и 5.1.3, при некоторых стандартных предположениях, по уравнению (5.1.3) можно построить две неавтономные динамические системы: первую – когда правая часть f регулярна и вторую – когда f таковой не является.

5.2. Асимптотически почти периодические решения ФДУ

Применяя результаты главы II к неавтономным динамическим системам, построенным в примерах 5.1.2 – 5.1.4 (как это было сделано в главе III для обыкновенных дифференциальных уравнений), можно получить ряд признаков существования асимптотически почти периодических решений ФДУ с конечным и неограниченным запаздыванием.

Решение $\phi \in C(\mathbb{T}, E^n)$ ($\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$) уравнения (5.1.1) назовем компактным на $\mathbb{T}$, если множество $\{\sigma(\phi,\tau) = \phi^{(\tau)} : \tau \in \mathbb{T}\}$ (где $\phi^{(\tau)}$ – сдвиг функции ϕ на τ) относительно компактно в $C(\mathbb{T}, E^n)$. Как известно, это будет иметь место тогда и только тогда, когда функция ϕ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{T}$.

Пусть $\phi \in C(\mathbb{T}, E^n)$ и множество $\{\sigma(\phi,\tau)|\ \tau \in \mathbb{T}\}$ относительно компактно в $C(\mathbb{T}, E^n)$. Положим $Q_\phi^{\mathbb{T}} = \overline{\{\tilde{\phi}_\tau | \tau \in \mathbb{T}\}}$, где $\tilde{\phi}_\tau = \phi_\tau|_{[-r,0]} \in C([-r,0], E^n)$ и чертой обозначено замыкание в C, тогда $Q_\phi^{\mathbb{T}}$ – компакт в C. Положим $Q_\phi^+ = Q_\phi^{\mathbb{R}_+}$ и $Q_\phi = Q_\phi^{\mathbb{R}}$.

Теорема 5.2.1. *Пусть* $\phi \in C(\mathbb{R}_r, E^n)$ *– компактное на* $\mathbb{R}_+$ *решение уравнения* (5.1.3) *и* f *асимптотически постоянна (асимптотически* τ*-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по переменной* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* $\varphi \in Q_\phi^+$. *Если для любого* $g \in \omega_f$ *уравнение* (5.1.4) *допускает не более одного решения из* ω_ϕ, *то* ϕ *асимптотически постоянно (асимптотически* τ*-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Пусть $\phi \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $M \subset C(\mathbb{R}, E^n)$. Будем говорить, что функция ϕ разделена в M (см. §3.6), если M состоит из одной функции ϕ либо существует число $r > 0$ такое, что для всякой функции $\mu \in M$, отличной от φ, выполнено неравенство

$$\max_{-r \le \theta \le 0} |\phi(t+\theta) - \mu(t+\theta)| \ge r$$

при всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 5.2.2. *Пусть $\phi \in C(\mathbb{R}_r, E^n)$ – компактное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (5.1.3) *и f асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по $\varphi \in Q_\phi^+$. Если для любого $g \in \omega_f$ все решения из ω_ϕ уравнения* (5.1.4) *разделены в ω_ϕ, то ϕ асимптотически постоянно* (*асимптотически $k_0\tau$-периодично для некоторого натурального k_0, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно*).

Теорема 5.2.3. *Пусть $\phi \in C(\mathbb{R}_r, E^n)$ – компактное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения* (5.1.1) *и f асимптотически τ-периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно $\varphi \in \ Q_\phi^+$ и $\overline{g}(t,\varphi) = \lim\limits_{k \to +\infty} f(t + k\tau, \varphi)$* (*равномерно по $t \in [0,\tau]$ и $\varphi \in Q_\varphi^+$*). *Если уравнение*

$$\frac{dy}{dt} = \overline{g}(t, y_t)$$

допускает не более одного решения из ω_ϕ, то решение ϕ асимптотически τ-периодично.

Обозначим через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(C, E^n)$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов $C \to E^n$ с операторной нормой. Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x_t), \tag{5.2.1}$$

где $A : \mathbb{R} \times C \to E^n$ непрерывно и линейно по второй переменной, т.е. $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$. Наряду с уравнением (5.2.1) рассмотрим соответствующее неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} == A(t, x_t) + f(t), \tag{5.2.2}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$.

Для $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ обозначим через ω_A его ω-предельное множество в динамической системе сдвигов $(C(\mathbb{R}, \mathcal{D}), \mathbb{R}, \sigma)$.

Теорема 5.2.4. *Пусть ϕ – компактное на $\mathbb{R}_+$ решение уравнения (5.2.2), $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ совместно асимптотически постоянны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны). Если каждое уравнение семейства*

$$\frac{dy}{dt} = B(t, y_t), \tag{5.2.3}$$

где $B \in \omega_A$, не имеет нетривиальных компактных на $\mathbb{R}$ решений, то ϕ асимптотически постоянно (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).

В связи с теоремой 5.2.4 естественно возникает вопрос: будет ли в условиях теоремы 5.2.3 уравнение (5.2.2) допускать хотя бы одно компактное на $\mathbb{R}_+$ решение? Ответ на этот вопрос вытекает из приводимых в следующем параграфе результатов.

5.3. Линейные ФДУ

Используя некоторые идеи и методы, развитые для изучения диссипативных динамических систем, можно получить ряд условий, эквивалентных асимптотической устойчивости линейных неавтономных динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. В качестве приложений мы получим соответствующие утверждения для линейных ФДУ.

Пусть (X, h, Y) – векторное расслоение со слоем E (E – банахово пространство) и $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}_+$ – норма на X, согласованная с метрикой X, т.е. $||\cdot||$ непрерывно и $||x|| = \rho(x, \theta_y)$, где $x \in X_y$, θ_y – нулевой элемент X_y и ρ – метрика на X.

Систему $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ назовем локально-компактной (вполне непрерывной), если для любого $x \in X$ существуют $\delta_x > 0$ и $l_x > 0$ такие, что множество $\pi^t B(x, \delta_x)$ $(t \geq l_x)$ относительно компактно.

Напомним [**4**], что неавтономная система $\langle (X, \mathbb{S}_-, \pi), (Y, \mathbb{S}_+, \sigma), h\rangle$ называется линейной, если (X, h, Y) является векторным расслоением и при каждом $y \in Y$ и $t \in \mathbb{S}_+$ отображение $\pi^t : X_y \to X_{\sigma(y,t)}$ линейно.

Теорема 5.3.1. *Если линейная неавтономная система $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}_+, \sigma), h\rangle$ локально компактна (т.е. $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ локально компактна) и Y компактно, то следующие условия эквивалентны:*

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} ||xt|| = 0$ *при всех* $x \in X$.
2) *Все движения $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ относительно компактны и в $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ нет нетривиальных компактных продолжаемых на $\mathbb{S}$ движений.*
3) *Существуют положительные числа N и ν такие, что $||xt|| \le Ne^{-\nu t}||x||$ при всех $x \in X$, $t \in \mathbb{S}_+$.*

Доказательство. Из равенства $\lim\limits_{t\to+\infty} ||xt|| = 0$ следует, что Σ_x^+ относительно компактно и $\omega_x \subseteq \theta = \{\theta_y |\ y \in J_Y$, где θ_y – нулевой элемент X_y и J_Y – центр Левинсона динамической системы $(Y, \mathbb{S}_+, \sigma)\}$. Таким образом, динамическая система $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ поточечно диссипативна и согласно [**55**] является компактно диссипативной. Обозначим через J_X центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ и покажем, что $J_X = \theta$. Очевидно, θ является компактным и инвариантным множеством и, следовательно, $\theta \subseteq J_X$. Из последнего включения следует, что $h(J_X) = J_Y$. Если допустить, что $J_X = \theta$, то $J_X \backslash \theta \neq \emptyset$ и, следовательно, найдется $x_0 \in J_X \backslash \theta$. Так как в J_X все движения продолжаемы на $\mathbb{S}$ [**59**], то существует непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \to J_X$ такое, что $\varphi(0) = x_0$ и $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$ при всех $s \in \mathbb{S}$ и $t \in \mathbb{S}_+$. С другой стороны, в силу линейности системы $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}_+, \sigma), h\rangle$ наряду с точкой x_0 множеству J_X принадлежат и все точки λx_0 $(\lambda \in \mathbb{R})$, ибо J_X есть максимальное компактное инвариантное множество в X. Но $\lambda x_0 \in J_X$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $x_0 \in \theta$. Полученное противоречие показывает, что $J_X = \theta$. Таким образом, в $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ нет нетривиальных компактных продолжаемых на $\mathbb{S}$

движений (так как все они находятся в J_X). Таким образом, мы показали, что из 1) следует 2).

Докажем, что из 2) следует 3). Пусть выполнено условие 2). Тогда система $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ локально диссипативна. В силу компактности Y и локальной диссипативности $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup\{||xt|| : ||x|| < \delta\} = 0. \tag{5.3.1}$$

Из (5.3.1) стандартными рассуждениями (см., например, **[95]**, **[104]**) можно показать, что найдутся $N, \nu > 0$ такие, что $||xt|| \leq Ne^{-\nu t}||x||$ при всех $x \in X$ и $t \in S_+$. Наконец, очевидно, из 3) следует 1). Теорема доказана.

Важным классом линейных неавтономных систем с бесконечномерным фазовым пространством, удовлетворяющим условию локальной вполне непрерывности, являются линейные неавтономные ФДУ **[24]**, **[48]**.

Наряду с уравнением (5.2.1) рассмотрим семейство уравнений (5.2.3), где $B \in H^+(A) = \overline{\{A^{(\tau)} : \tau \in \mathbb{R}_+\}}$, чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ ($C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ наделено топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R}$) и $A^{(\tau)}(t) = A(t + \tau)$.

Пусть $\phi(t, \varphi, B)$ – решение уравнения (5.2.3), проходящее через точку $\varphi \in C$ при $t = 0$, определенное при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Положим $Y = H^+(A)$ и через $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ обозначим полугрупповую динамическую систему сдвигов на $H^+(A)$. Пусть $X = C \times Y$, $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ – полугрупповая динамическая система на X, определенная по следующему правилу: $\pi((\varphi, B), \tau) = (\phi(\tau, \varphi, B), B^{(\tau)})$ и $h = pr_2 : X \to Y$. Тогда неавтономная система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h\rangle$ является линейной. Отметим одно важное свойство построенной неавтономной динамической системы. Имеет место следующая

Лемма 5.3.2. *Пусть $H^+(A)$ компактно в $C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$. Тогда для любой точки $x \in X = C \times H^+(A)$ существуют окрестность U_x точки x и число $l_x > 0$ такие, что $\pi^t U_x$ относительно компактно при всех $t \geq l_x$, т.е. динамическая система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ локально вполне непрерывна.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из лемм 2.2.3 и 3.6.1 из [**48**] и компактности $H^+(A)$.

Применяя к построенной линейной неавтономной динамической системе теорему 5.3.1 и учитывая лемму 5.3.2, получим следующее утверждение.

Теорема 5.3.3. *Пусть $H^+(A)$ компактно, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Нулевое решение уравнения* (5.2.1) *равномерно экспоненциально устойчиво, т.е. существуют положительные числа N и $\nu > 0$ такие, что $||\phi(t,\varphi,B)|| \leq Ne^{-\nu t}||\varphi||$ при всех $\varphi \in C$, $B \in H^+(A)$ и $t \in \mathbb{R}_+$.*
2) *Каково бы ни было $B \in H^+(A)$ нулевое решение уравнения* (5.2.3) *асимптотически устойчиво.*
3) *Каково бы ни было $B \in H^+(A)$ все решения уравнения* (5.2.3) *компактны* (*ограничены*) *на $\mathbb{R}_+$ и каково бы ни было $B \in \omega_A$ уравнение* (5.2.3) *не имеет ненулевых компактных* (*ограниченных*) *на $\mathbb{R}$ решений.*

Замечание 5.3.4. 1. Нулевое решение уравнения (5.2.1) равномерно экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда существуют положительные числа N и ν такие, что $||\phi(t,\varphi,A^{(\tau)})|| \leq Ne^{-\nu t}||\varphi||$ при всех $\varphi \in C$ и $t,\tau \in \mathbb{R}_+$.

2. Пусть существуют положительные числа N и ν такие, что $||\phi(t,\varphi,A^{(\tau)})|| \leq Ne^{-\nu t}||\varphi||$ при всех $\varphi \in C$ и $t,\tau \in \mathbb{R}_+$, тогда $||\phi(t,\varphi,A)|| \leq Ne^{-\nu(t-\tau)}||\phi(\tau,\varphi,A)||$ при всех $\varphi \in C$ и $t \geq \tau$ $(t,\tau \in \mathbb{R}_+)$. Обратное, вообще говоря, не верно.

3. Пусть $(X,\mathbb{S}_+,\pi)$ – динамическая система, X компактно и $X = H^+(x_0) = \overline{\{x_0 t | t \in S_+\}}$, где $x_0 \in X$. Тогда $(X,\mathbb{S}_+,\pi)$ компактно диссипативна и $J_X = \omega_{x_0}$, где J_X – центр Левинсона $(X,\mathbb{S}_+,\pi)$.

5.4. Квазилинейные ФДУ

Обозначим через $U_t(\cdot,s)$ оператор Коши [**24**], [**48**] (фундаментальную матрицу) уравнения (5.2.1) и $\phi(t,\varphi,A,f)$ – решение уравнения (5.2.2), проходящее через точку $\varphi \in C$ при $t = 0$. Тогда согласно формуле вариации постоянных (см., например, [**48**, с.177])

$$\phi(t,\varphi,A,f)=\phi(t,\varphi,A)+\int\limits_0^t U_t(\cdot,s)f(s)ds. \qquad (5.4.1)$$

Лемма 5.4.1. *Пусть существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$||\phi(t,\varphi,A)||\leq Ne^{-\nu(t-\tau)}||\phi(\tau,\varphi,A)|| \qquad (5.4.2)$$

при всех $t\geq\tau\geq 0$ и $\varphi\in C$. Если $f\in C_b(\mathbb{R}_+,E^n)$, то

1) *Все решения уравнения* (5.2.2) *ограничены на $\mathbb{R}_+$.*

2) *Решение $\phi(t,0,A,f) = \int\limits_0^t U_t(0,s)f(s)ds$ уравнения* (5.2.2) *подчиняется оценке*

$$||\phi||_{C_b(\mathbb{R}_+,C)}\leq e^{\nu r}\frac{N}{\nu}||f||_{C_b(\mathbb{R}_+,E^n)}. \qquad (5.4.3)$$

Доказательство. В условиях леммы имеем

$$||\phi(t,0,A,f)||=||\int\limits_0^t U_t(\cdot,s)f(s)ds||\leq\int\limits_0^t||U_t(\cdot,s)|||f(s)|ds\leq$$
$$\int\limits_0^t Ne^{-\nu(t-s)}e^{\nu r}|f(s)|ds\leq Ne^{\nu r}\sup_{t\geq 0}|f(t)|\tfrac{e^{-\nu(t-s)}}{\nu}|_0^t=$$
$$Ne^{\nu r}||f||_{C_b(\mathbb{R}_+,E^n)}\tfrac{1-e^{-\nu t}}{\nu}\leq\tfrac{N}{\nu}e^{\nu r}||f||_{C_b(\mathbb{R}_+,E^n)}.$$

Таким образом, (5.4.3) установлено.

Первое утверждение леммы вытекает из формулы (5.4.1) и неравенств (5.4.2) и (5.4.3).

Замечание 5.4.2. *Если $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$, оператор $A\in C(\mathbb{R},\mathcal{D})$ и $f\in C(\mathbb{R},E^n)$ ограничены на $\mathbb{T}$ и $\varphi:\mathbb{T}\to C$ – ограниченное на $\mathbb{T}$ решение уравнения* (5.2.2)*, то φ компактно на $\mathbb{T}$.*

Сформулированное утверждение вытекает из теоремы Арцела-Асколи.

Следствие 5.4.3. *В условиях леммы* 5.4.1*, если оператор $A\in C(\mathbb{R},\mathcal{D})$ ограничен на $\mathbb{R}_+$, то все решения уравнения* (5.2.2) *компактны на $\mathbb{R}_+$.*

Теорема 5.4.4. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ совместно асимптотически постоянны (асимптотически τ-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны) и нулевое решение уравнения* (5.2.1) *равномерно экспоненциально устойчиво, т.е. существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$||\phi(t, \varphi, A_s)|| \leq Ne^{-\nu t}||\varphi|| \tag{5.4.4}$$

при всех $t, \rho \in \mathbb{R}_+$ и $\varphi \in C$. Тогда каково бы ни было $\varphi \in C$ решение $\phi(t, \varphi, A, f)$ уравнения (5.2.2) *асимптотически постоянно (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно).*

Доказательство. Из неравенства (5.4.4), согласно замечанию 5.3.4, следует (5.4.2) и по лемме 5.4.1 все решения уравнения (5.2.2) ограничены на $\mathbb{R}_+$. Более того, из замечания 5.4.2 и следствия 5.4.3 следует, что все решения уравнения (5.2.2) компактны на $\mathbb{R}_+$. Согласно теореме 5.3.3 каково бы ни было $B \in \omega_A$ уравнение (5.2.3) не имеет ненулевых компактных на $\mathbb{R}$ решений. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 5.2.4.

Теорема 5.4.5. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ – асимптотически почти периодические функции и функция $F \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ асимптотически почти периодична по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по φ на компактах из C и удовлетворяет условию Липшица по $\varphi \in C$ с константой Липшица $L < \frac{\nu}{N}e^{-\nu r}$ (константы N и ν из* (5.4.4)*). Если нулевое решение уравнения* (5.2.1) *равномерно экспоненциально устойчиво, то уравнение*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x_t + f(t) + F(t, x_t)$$

имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение.

Доказательство. Обозначим через $AP(\mathbb{R}_+, C)$ банахово пространство всех асимптотически почти периодических функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to C$ с нормой sup. Определим оператор Φ :

$AP(\mathbb{R}_+, C) \to AP(\mathbb{R}_+, C)$ по следующему правилу: $\Phi(\psi) = \varphi$, где $\psi \in AP(\mathbb{R}_+, C)$ и

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t U_t(\cdot, s)[F(s, \psi_s) + f(s)]ds,$$

т.е. φ – единственное асимптотически почти периодическое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x_t + f(t) + F(t, \psi_t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = 0$.

Покажем, что отображение Φ является сжимающим. В самом деле. Пусть $\psi_1, \psi_2 \in AP(\mathbb{R}_+, E^n)$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \Phi(\psi_1) - \Phi(\psi_2)$, тогда

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi_t + F(t, \psi_{1t}) - F(t, \psi_{2t})$$

и $\varphi(0) = 0$. Согласно лемме 5.4.1

$$||\varphi||_{AP(\mathbb{R}_+, E^n)} \le \tfrac{N}{\nu} e^{\nu r} \sup_{t\ge 0} |F(t, \psi_{1t}) - F(t, \psi_{2t})| \le$$
$$\tfrac{N}{\nu} e^{\nu r} L \sup_{t \ge 0} ||\psi_{1t} - \psi_{2t}|| = \tfrac{N}{\nu} e^{\nu r} L ||\psi_1 - \psi_2||_{AP(\mathbb{R}_+, E^n)}$$

и, следовательно,

$$||\Phi(\psi_1) - \Phi(\psi_2)||_{AP(\mathbb{R}_+, E^n)} \le N\nu^{-1} e^{\nu r} L ||\psi_1 - \psi_2||_{AP(\mathbb{R}_+, E^n)}.$$

Таким образом, отображение Φ имеет единственную неподвижную точку $\varphi \in AP(\mathbb{R}_+, E^n)$, которая является искомым решением. Теорема доказана.

Следствие 5.4.6. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ асимптотически почти периодичны и нулевое решение уравнения* (5.2.1) *равномерно экспоненциально устойчиво. Если отображение $F \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ асимптотически почти периодично по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по φ на компактах из C и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, уравнение*

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x_t + f(t) + \varepsilon F(t, x_t)$$

имеет по крайней мере одно асимптотически почти периодическое решение φ_ε, причем $\varphi_\varepsilon \to \varphi_0$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $AP(\mathbb{R}_+, E^n)$, где φ_0 – единственное асимптотически почти периодическое решение уравнения (5.2.2)*, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_0(0) = 0$.*

Теорема 5.4.7. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times C, E^n)$ асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по φ на компактах из C. Если существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$Re\langle \varphi_1(0) - \varphi_2(0), f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)\rangle \leq -\alpha|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)|^2$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in C$, то уравнение (5.1.3) *конвергентно.*

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 3.8.5, поэтому ее доказательство мы опустим.

5.5. Интегральные уравнения Вольтерра и порождаемые ими неавтономные динамические системы

Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра. Пусть $(C(\mathbb{R}, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов в пространстве $C(\mathbb{R}, E^n)$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в E^n с открыто-компактной топологией. Если на $\mathbb{R}^2 \times E^n$ определить динамическую систему по правилу $\pi(((t,s),x),\tau) = ((t+\tau, s+\tau), x)$, то согласно следствию 1.5.2 и на пространстве $C(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$ всех непрерывных функций $f : \mathbb{R}^2 \times E^n \to E^n$ с открыто-компактной топологией естественно определяется динамическая система сдвигов $(C(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Положим $C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n) = \{f \mid f \in C(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n),\ f(t,s,x) = 0$ при всех $s \geq t$ и $x \in E^n\}$ и заметим, что $C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$ является замкнутым инвариантным подмножеством $(C(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ и, следовательно, на $C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$ определена динамическая система сдвигов $(C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = f(t) + \int_0^t F(t, s, x(s))ds, \tag{5.5.1}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $F \in C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$. Обозначим через $H(F) = \overline{\{F^{(\tau)} : \tau \in \mathbb{R}\}}$, где $F^{(\tau)}(t, s, x) = F(t + \tau, s + \tau, x)$ и чертой обозначено замыкание в $C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$.

Функцию $F \in C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$ назовчм регулярной, если каковы бы ни были $G \in H(F)$ и $g \in C(\mathbb{R}, E^n)$ уравнение

$$y(t) = g(t) + \int_0^t G(t, s, y(s))ds \tag{5.5.2}$$

имеет единственное решение.

Всюду в этом параграфе мы будем рассматривать только уравнения (5.5.1) с регулярной правой частью F.

Из уравнения (5.5.1) следует, что

$$\begin{aligned} x(t+\tau) &= \Big\{ f(t+\tau) + \int_0^\tau F(t+\tau, s, x(s))ds \Big\} \\ &+ \int_0^t F(t+\tau, s+\tau, x(s+\tau))ds. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Обозначим через $\varphi(t, f, F)$ единственное решение уравнения (5.5.1), тогда из общих свойств интегральных уравнений Вольтерра **[96]** следует, что отображение $\varphi : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, E^n) \times C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n) \to E^n$ непрерывно. Определим отображение $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, E^n) \times C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n) \to E^n$ равенством

$$\mathcal{F}(\tau, \varphi, F)(t) = \int_0^\tau F(t + \tau, s, \varphi(s))ds$$

и отображение

$$T : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, E^n) \times C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n) \to C(\mathbb{R}, E^n)$$

правилом

$$T(\tau, f, F) = f^{(\tau)} + \mathcal{F}(\tau, \varphi(\cdot, f, F), F).$$

Из равенства (5.5.3) следует, что
$$\varphi(t+\tau, f, F) = \varphi(t, T(\tau, f, F), F^{(\tau)}) \tag{5.5.4}$$
при всех $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $t, \tau \in \mathbb{R}$, и, кроме того,
$$\varphi(\tau, f, F) = T(\tau, f, F)(0).$$
Непосредственно из определения T следует равенство
$$T(t+\tau, f, F) = T(t, T(\tau, f, F), F^{(\tau)})$$
при всех $t, \tau \in \mathbb{R}$ и $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$.

Пример 5.5.1. Положим $Y = H(F)$ и пусть $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на Y. Обозначим через $X = C(\mathbb{R}, E^n) \times Y$ и определим отображение $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ по следующему правилу: $\pi((g, G), \tau) = (T(\tau, g, G), G^{(\tau)})$ при всех $(g, G) \in X = C(\mathbb{R}_+, E^n) \times H(F)$ и $\tau \in \mathbb{R}_+$. Из сказанного выше следует, что тройка $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ является динамической системой (более детально об этом см. [**96**]). Положим $h = pr : X \to Y$, тогда тройка $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ является неавтономной динамической системой, порождчнной уравнением (5.5.1).

Пусть $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ – динамическая система на $X = C(\mathbb{R}, E^n) \times H(F)$, построенная в примере 5.5.1, и определим отображение $\lambda : X \times \mathbb{R}_+ \to E^n$ по следующему правилу: $\lambda((g, G), \tau) = \varphi(\tau, g, G)$. Из равенства (5.5.4) следует, что
$$\lambda(\pi(x, t), \tau) = \lambda(x, t+\tau) \quad \text{и} \quad \lambda(x, 0) = x \tag{5.5.5}$$
при всех $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ и $x \in X$.

Пусть $\lambda : X \times \mathbb{T} \to Y$ – непрерывное отображение. Будем говорить, что семейство отображений $\{\lambda(\cdot, t) : t \in \mathbb{T}\}$ из $X \to Y$ разделяют точки, если для любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$ существует $t = t(x_1, x_2) \in \mathbb{T}$ такое, что $\lambda(x_1, t) \neq \lambda(x_2, t)$.

Имеет место следующая

Лемма 5.5.2. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ – динамическая система, Y – полное метрическое пространство и $\lambda : X \times \mathbb{R} \to Y$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условию* (5.5.5) *и $(C(\mathbb{T}, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на $C(\mathbb{T}, Y)$.*

Если семейство отображений $\{\lambda(\cdot, t) : t \in \mathbb{T}\}$ *разделяет точки, то отображение* $p : X \to C(\mathbb{T}, Y)$*, определчнное равенством* $p(x) = \varphi_x \in C(\mathbb{T}, Y)$*, где* $\varphi_x(t) = \lambda(x, t)$ *при всех* $t \in \mathbb{T}$*, является гомеоморфизмом* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *на* $(p(X), \mathbb{T}, \sigma)$*, т.е.*

1) h *непрерывно, взаимнооднозначно и* $h^{-1} : p(X) \to X$ *также непрерывно;*

2) $p(\pi(x, t)) = \sigma(p(x), t)$ *при всех* $t \in \mathbb{T}$ *и* $x \in X$.

Доказательство. Покажем, что отображение h непрерывно. Пусть $x_k \to x_0$. Покажем, что $p(x_k) \to p(x_0)$. Допустим, что это не так, тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$, компакт $K_0 \subset \mathbb{T}$ и подпоследовательность m_k такие, что

$$\max_{t \in K_0} \rho(\varphi_{x_{m_k}}(t), \varphi_x(t)) \geq \varepsilon_0. \tag{5.5.6}$$

Тогда найдчтся последовательность $\{t_k\} \subset K$ такая, что

$$\rho(\lambda(x_{m_k}, t_k), \lambda(x_0, t_k)) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактности K_0 последовательность $\{t_k\}$ можем считать сходящейся. Положим $t_0 = \lim\limits_{k \to \infty} t_k$ и в неравенстве (5.5.6) перейдем к пределу, когда $k \to +\infty$. Тогда получим $\varepsilon_0 \leq 0$, что противоречит выбору ε_0. Полученное противоречие доказывает непрерывность p.

Из того, что семейство $\{\lambda(\cdot, t) : t \in \pi\}$ разделяет точки вытекает взаимнооднозначность отображения p. Очевидно, $p^{-1} : p(X) \to X$ непрерывно.

Наконец, заметим, что

$$p(\pi(x, t))(s) = \lambda(\pi(x, t), s) = \lambda(x, t+s) = \varphi_x(t+s) = \sigma(\varphi_x, t)(s),$$

т.е. $p(\pi(x, t)) = \sigma(p(x), t)$ при всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{T}$. Лемма доказана.

Следствие 5.5.3. *Динамическая система* $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$*, построенная в примере* 5.5.1*, гомероморфно вкладывается в динамическую систему сдвигов* $(C(\mathbb{R}, E^n), \mathbb{R}_+, \sigma)$.

Пример 5.5.4. Пусть $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система, построенная в примере 5.5.1. Согласно следствию 5.5.3 существует гомеоморфизм p динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(W, \mathbb{R}_+, \sigma)$, где $W =$

$p(X)$. Положим $q = h \circ p : W \to Y$, тогда $\langle (W, \mathbb{R}_+, \sigma), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), q \rangle$ также является неавтономное динамической системой, ассоциированной уравнением (5.5.1).

Линейные интегральные уравнения Вольтерра. Пусть $(C(\mathbb{R}^2, [E^n]), \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на пространстве $C(\mathbb{R}^2, [E^n])$ всех непрерывных матриц-функций $A : \mathbb{R}^2 \to [E^n]$ с открыто-компактной топологией, т.е. $\sigma(A, \tau) = A^{(\tau)}$ и $A^{(\tau)}(t, s) = A(t + \tau, s + \tau)$. Через $C_0(\mathbb{R}^2, [E^n])$ обозначим множество всех $A \in C(\mathbb{R}^2, [E^n])$, удовлетворяющих условию $A(t, s) = 0$ при всех $s \geq t$. Понятно, что $C_0(\mathbb{R}^2, [E^n])$ является замкнутым и инвариантным множеством в динамической системе сдвигов $(C(\mathbb{R}^2, [E^n]), \mathbb{R}, \sigma)$. Поэтому на $C_0(\mathbb{R}^2, [E^n])$ индицируется динамическая система сдвигов $(C_0(\mathbb{R}^2, [E^n]), \mathbb{R}, \sigma)$.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(t) = f(t) + \int_0^t A(t, s)x(s)ds, \tag{5.5.7}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $A \in C_0(\mathbb{R}^2, [E^n])$. Обозначим через $\varphi(t, f, A)$ единственное решение уравнения (5.5.7), определчнное на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi(t + \tau, f, A) = T(\tau, f, A)(t) + \int_0^t A^{(\tau)}(t, s)\varphi(s + \tau, f, A)ds,$$

где $T(\tau, f, A)(t) = f^{(\tau)}(t) + \int_0^t A(t + \tau, s)\varphi(s, f, A)ds$.

Пример 5.5.5. Пусть $Y = H(A) = \overline{\{A^\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\}}$ и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов. Положим $X = C(\mathbb{R}, E^n) \times H(A)$ и определим динамическую систему $(X, \mathbb{R}, \pi)$ по следующему правилу: $\pi((f, A), \tau) = (T(\tau, f, A), A^\tau)$. Тогда $\langle (X, \mathbb{R}, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, где $h = pr_2 : X \to Y$, есть линейная неавтономная динамическая система, порождчнная уравнением (5.5.7).

5.6. Асимптотически почти периодические решения интегральных уравнений Вольтерра

Для интегральных уравнений Вольтерра, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений и ФДУ, можно получить ряд признаков асимптотической почти периодичности, если к динамическим системам из примеров 5.5.1, 5.5.4 и 5.5.5 применить результаты главы II. Прежде чем сформулировать соответствующие утверждения, сделаем следующее

Замечание 5.6.1. а) *Пусть* $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ *или* $\mathbb{R}$ *и* $\varphi(t,f,F)$ – *решение уравнения (5.5.1) такое, что* $\{\varphi(t+\tau,f,F) \,|\, \tau \in \mathbb{T}\} \subset C(\mathbb{R},E^n)$ *относительно компактно. Если* $\{F^{(\tau)} \,|\, \tau \in \mathbb{T}\} \subset C(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$ *относительно компактно, то и* $\{T(\tau,f,F) : \tau \in \mathbb{T}\}$ *относительно компактно в* $C(\mathbb{R},E^n)$.

в) *Пусть* $A \in C(\mathbb{R}^2,[E^n])$ *и* $\{A^{(\tau)} \,|\, \tau \in \mathbb{T}\}$ *относительно компактно. Если* $\varphi(t,f,A)$ – *решение уравнения (5.5.7) такое, что* $\{\varphi(t+\tau,f,A) : \tau \in \mathbb{T}\}$ *относительно компактно, то* $\{T(\tau,f,A) \,|\, \tau \in \mathbb{T}\}$ *относительно компактно.*

Теорема 5.6.2. *Пусть* $F \in C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n)$ *асимптотически почти периодична (т.е. движение* $\sigma(F,\cdot)$ *динамической системы* $(C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$ *асимптотически почти периодично) и* $\varphi(t,f,F)$ – *решение уравнения* (5.5.1) *такое, что множество* $\{\varphi(t+\tau,f,F) \,|\, \tau \in \mathbb{R}_+\}$ *относительно компактно в* $C(\mathbb{R},E^n)$. *Если при любых* $G \in \omega_F = \{G \,|\, G \in C_0(\mathbb{R}^2 \times E^n, E^n),\ \exists t_n \to +\infty,$ *что* $F^{(\tau_n)} \to G\}$ *и* $g \in C(\mathbb{R},E^n)$ *уравнение* (5.5.2) *имеет не более одного решения из* ω_φ, *то решение* φ *асимптотически почти периодично.*

Теорема 5.6.3. *Пусть* $A \in C(\mathbb{R},[E^n])$ *и* $f \in C(\mathbb{R},E^n)$ *асимптотически почти периодичны,* $B \in C(\mathbb{R}^2,[E^n])$ *асимптотически почти периодична (т.е. движение* $\sigma(B,\tau)$ *асимптотически почти периодично в* $(C(\mathbb{R}^2,[E^n]),\mathbb{R},\sigma))$. *Если* φ – *решение уравнения*

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + f(t) + \int\limits_0^t B(t,s)x(s)ds \qquad (5.6.1)$$

такое, что $\{\varphi(t+\tau)\,|\,\tau \in \mathbb{R}_+\} \subset C(\mathbb{R}, E^n)$ *относительно компактно и для любого* $\tilde{A} \in \omega_A$, $\tilde{f} \in \omega_f$ *и* $\tilde{B} \in \omega_B$ *уравнение*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \hat{A}(t)y(t) + \tilde{f}(t) + \int\limits_0^t \tilde{B}(t,s)y(s)ds$$

имеет не более одного решения из ω_φ, *то* φ *асимптотически почти периодично.*

Замечание 5.6.4. *Каждое решение* $\varphi(t, x_0, f, A, B)$ *уравнения* (5.6.1) *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = \hat{f}(t) + \int\limits_0^t \hat{A}(t,s)x(s)ds,$$

где $\hat{f}(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(s)ds$ *и* $\hat{A}(t,s) = A(s) + \int\limits_s^t B(u,s)du$.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра конволюционного типа

$$x(t) = f(t) + \int\limits_0^t A(t,s)x(s)ds, \tag{5.6.2}$$

где $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ и $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$.

Резольвентой интегрального уравнения (5.6.2) называют матрицу-функцию $R \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, удовлетворяющую уравнению

$$R(t) = -A(t) + \int\limits_0^t A(t-s)R(s)ds. \tag{5.6.3}$$

Решение уравнения (5.6.2) задаұтся формулой

$$x(t) = f(t) - \int\limits_0^t R(t-s)f(s)ds, \tag{5.6.4}$$

где R – резольвента уравнения (5.6.2).

Говорят, что резольвента R уравнения (5.6.2) гиперболична (удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$), если существует пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 и положительные числа N и ν такие, что

$$||R(t)P_1|| \leq Ne^{+\nu t} \qquad (t \in \mathbb{R}_-)$$

и

$$||R(t)P_2|| \leq Ne^{-\nu t} \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Теорема 5.6.5. *Пусть $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$ ограничена на $\mathbb{R}$, $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и резольвента $R(t)$ уравнения* (5.6.3) *гиперболична на $\mathbb{R}$. Тогда решение φ уравнения* (5.6.2) *равномерно согласовано в пределе, т.е. $\mathfrak{L}_f \subseteq \mathfrak{L}_\varphi$.*

Доказательство. Введчм в рассмотрение два оператора L и B по следующим правилам:

$$(Lf)(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} R(t-s)P_2 f(s)ds - \int\limits_{0}^{+\infty} R(t-s)P_1 f(s)ds$$

и

$$(Bf)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)P_2 f(s)ds - \int\limits_{0}^{+\infty} R(t-s)P_1 f(s)ds.$$

Согласно [**103**] равенство (5.6.4) можно переписать следующим образом

$$x = f - Lf + Bf$$

и, следовательно, $x+Lf = f+Bf$. Полагая $y = x+Lf = f+Bf$, можно показать [**103**], что y является решением интегрального уравнения

$$y(t) = f^*(t) + \int\limits_{0}^{t} A(t-s)y(s)ds,$$

где $f^* = (I-A)(I+B)f$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{L}_f \subseteq \mathfrak{L}_y$. Пусть $\{\tau_k\} \in \mathfrak{L}_f$, тогда $|\tau_n| \to +\infty$ и существует $g \in C(\mathbb{R}, E^n)$ такое, что $f^{(\tau_k)} \to g$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$. Так как $y = f + Bf$, то достаточно показать, что $(Bf)^{(\tau_k)} \to Bg$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$. Пусть $K \subset \mathbb{R}$ – некоторый компакт и $t \in K$. Так как $(Bf)^{(\tau)} = B(f^{(\tau)})$, то

$$|(Bf)(t+\tau_k) - (Bg)(t)| \leq \Big|\int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)P_2[f(s+\tau_n) - g(s)]ds\Big|$$

$$+\Big|\int\limits_{t}^{+\infty} R(t-s)P_1[f(s+\tau_k) - g(s)]ds\Big|. \tag{5.6.5}$$

Покажем, что

$$\sup_{t\in K}\Big|\int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)P_2[f(s+\tau_k) - g(s)]ds\Big| \to 0,$$

когда $k \to +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)P_2[f(s+\tau_k) - g(s)]ds =$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} R(u)P_2[f(t-u+\tau_k) - g(t-u)]du$$

является абсолютно сходящимся равномерно по k, то существует число $L = L(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Big|\int\limits_{L}^{+\infty} R(u)P_2[f(t-u+\tau_k) - g(t-u)]d\tau\Big| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{5.6.6}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ и $t \in K$. С другой стороны,

$$\Big|\int\limits_0^L R(u)P_2[f(t-u+\tau_k)-g(t-u)]du\Big| \leq$$

$$\sup_{0\leq u\leq L}|f(t-u+\tau_k)-g(t-u)|\int\limits_0^L ||R(u)P_2||du \leq$$

$$\sup_{s\in K'}|f(s+\tau_k)-g(s)|\int\limits_0^{+\infty}||R(u)P_2||du\frac{N}{\nu}\sup_{s\in K'}|f(s+\tau_k)-g(s)|,$$

где $K' = \{t-u\,|\,t\in K, u\in[0,L]\}$ – некоторый компакт из $\mathbb{R}$. Так, как $f_{\tau_k}\to g$, то найдчтся $k_1(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\sup_{s\in K_1}|f(s+\tau_k)-g(s)| < \frac{\nu\varepsilon}{4N} \tag{5.6.7}$$

при всех $k \geq k_1(\varepsilon)$. Из неравенств (5.6.6), (5.6.7) следует, что

$$\sup_{t\in K}\Big|\int\limits_{-\infty}^t R(t-s)P_2[f(s+\tau_k)-g(s)]ds\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.6.8}$$

при всех $k \geq k_1(\varepsilon)$.

Аналогично, существует $k_2(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\sup_{t\in K}\Big|\int\limits_t^{+\infty} R(t-s)P_1[f(s+\tau_k)-g(s)]ds\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.6.9}$$

при всех $k \geq k_2(\varepsilon)$. Положим $k(\varepsilon)=\max(k_1(\varepsilon),k_2(\varepsilon))$. Тогда из (5.6.5), (5.6.8) и (5.6.9) вытекает

$$\sup_{t\in K}|(Bf)(t+\tau_k)-(Bg)(t)| < \varepsilon$$

при всех $k \geq k(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Следствие 5.6.6. *Пусть резольвента $R(t)$ уравнения (5.6.3) гиперболична на $\mathbb{R}$, тогда имеют место следующие утверждения.*

1) *Если f двояко асимптотически постоянна (периодична, почти периодична, рекуррентна), то и решение φ уравнения (5.6.3) обладает этим свойством.*
2) *Если f стационарно (периодично, почти периодично, рекуррентно) гомоклинично, то и φ обладает этим свойством.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.6.5 и замечания 2.5.5.

5.7. Конвергентность некоторых эволюционных уравнений

1. Пусть $\mathcal{H}$ – вещественное гильбертово пространство, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ – область определения оператора $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Напомним [**27**], [**84**], что оператор A называется:

- монотонным, если для любых $u_1, u_2 \in D(A)$: $\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0$;

- полунепрерывным, если функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная равенством $\varphi(\lambda) = \langle A(u + \lambda v, w) \rangle$, непрерывна;

- равномерно монотонным, если существует положительное число α такое, что $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha |u - v|^2$ при всех $u, v \in D(A)$ ($| \cdot | = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}$).

Заметим, что семейство монотонных операторов можно частично упорядочить по включению графиков. Монотонный оператор называется максимальным, если он является максимальным среди монотонных операторов.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t), \tag{5.7.1}$$

где $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и A – максимальный монотонный оператор с областью определения $D(A)$. Согласно [**84**] для любого $x_0 \in \overline{D(A)}$ существует единственное слабое решение $\varphi(t, x_0, f)$ уравнения (5.7.1), удовлетворяющее условию $\varphi(0, x_0, f) = x_0$ и определенное на $\mathbb{R}_+$. Пусть $Y = H(f) = \overline{\{f^{(\tau)} | \tau \in \mathbb{R}\}}$, ($Y^+ = H^+(f) = \overline{\{f^{(\tau)} | \tau \in \mathbb{R}_+\}}$), где чертой обозначено замыкание в

$L_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$. Через $(Y,\mathbb{R},\sigma)$ $((Y^+,\mathbb{R}_+,\sigma))$ обозначаем динамическую систему сдвигов на Y (Y^+), индуцированную динамической системой $(L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathcal{H}),\mathbb{R},\sigma)$. Положим $X = \overline{D(A)}\times Y$ $(X=\overline{D(A)}\times Y^+)$ и определим $\pi:\overline{D(A)}\times Y\times\mathbb{R}_+\to\overline{D(A)}\times Y$ $(\pi:\overline{D(A)}\times Y^+\times\mathbb{R}_+\to\overline{D(A)}\times Y^+)$ равенством $\pi((v,g),t) = (\varphi(t,v,g),g^{(t)})$ и $h=pr_2:X\to Y$. Как показано в работе [**98**], тройка $\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y,\mathbb{R},\sigma),h\rangle$ $(\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y^+,\mathbb{R}_+,\sigma),h\rangle)$ является неавтономной динамической системой. Примененяя к построенным неавтономным динамическим системам результатов главы II, получим соответствующие утверждения для уравнения (5.7.1). Приведем одно из утверждений такого рода.

Теорема 5.7.1. *Пусть отображение* $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *асимптотически постоянно (асимптотически τ-периодично, асимптотически почти периодично, асимптотически рекуррентно). Если максимальный монотонный оператор A является полунепрерывным и равномерно монотонным, то уравнение* (5.7.1) *конвергентно.*

Доказательство. Доказательство проводится по схеме, что и доказательство теоремы 3.8.5, с учетом того, что согласно результатам работы [**98**] из равномерной монотонности оператора A следует существование положительных чисел N и ν таких, что

$$|\varphi(t,u_1,g)-\varphi(t,u_2,g)|\le Ne^{-\nu t}|u_1-u_2|$$

при всех $u_1,u_2\in\overline{D(A)}$ и $g\in H(f)$.

Отметим, что в почти периодическом случае теорема 5.7.1 уточняет и усиливает один результат из [**27**, с.164].

Приведем пример уравнения вида (5.7.1).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \phi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + f(t) \tag{5.7.2}$$

в открытой ограниченной области $\Omega\subset E^n$ с граничным условием $u=0$ на $\partial\Omega$. Предположим, что функция $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $\phi(0)=0$ и $0<c_1\le\phi'(\xi)\le c_2$ $(\xi\in\mathbb{R})$.

Тогда уравнение (5.7.2) перепишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \triangle u - \phi(v) + f(t). \end{cases}$$

Наконец, положим $\mathcal{H} = W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и определим на $\mathcal{H}$ скалярное произведение

$$\langle (u,v),(u^*,v^*)\rangle = \int\limits_{\Omega} [vv^* + \nabla u \nabla u^* + \lambda uv^* + \lambda u^* v]dx,$$

где λ – некоторая положительная константа, зависящая только от c_1 и c_2. Можно проверить (см., например, [**87**]), что при сделанных предположениях все условия теоремы 5.7.1 выполнены, если $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ асимптотически постоянна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна).

2. Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство, $I \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathfrak{B}$ и $\mathcal{H}$ - комплексное гильбертово пространство.

Рассмотрим уравнение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} [\langle u(t), \varphi'(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle + \langle f(t), \varphi(t)\rangle]dt = 0, \quad (5.7.3)$$

где $A \in C(\mathbb{R},[\mathcal{H}])$, $f \in C(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\langle \cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Функцию $\varphi \in C(I,\mathcal{H})$ называют решением (5.7.3), если равенство (5.7.3) имеет место для любого $\varphi \in \mathcal{D}(I,\mathcal{H})$. Пусть $x \in \mathcal{H}$ и $\varphi(t,x,A,f)$ – решение уравнения (5.7.3), определенное на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0,x,A,f) = x$.

Обозначим через $(C(\mathbb{R},[\mathcal{H}]),\mathbb{R},\sigma)$ и $(C(\mathbb{R},\mathcal{H}),\mathbb{R},\sigma)$ динамические системы сдвигов на $C(\mathbb{R},[\mathcal{H}])$ и $C(\mathbb{R},\mathcal{H})$ соответственно и пусть $(C(\mathbb{R},[\mathcal{H}])\times C(\mathbb{R},\mathcal{H}),\mathbb{R},\sigma)$ – их произведение. Положим $H(A,f) = \overline{\{(A^{(\tau)}, f^{(\tau)}) : \tau \in \mathbb{R}\}}$ и пусть $(H(A,f),\mathbb{R},\sigma)$ – динамическая система сдвигов на $H(A,f)$. Аналогично, $H^+(A,f) = \overline{\{(A^{(\tau)}, f^{(\tau)}) : \tau \in \mathbb{R}_+\}}$ и $(H^+(A,f),\mathbb{R}_+,\sigma)$ – полугрупповая динамическая система на $H^+(A,f)$. Наряду с уравнением (5.7.3) будем рассматривать семейство уравнений

$$\int\limits_{\mathbb{R}} [\langle u(t), \varphi'(t)\rangle + \langle B(t)u(t), \varphi(t)\rangle + \langle g(t), \varphi(t)\rangle] dt = 0, \qquad (5.7.4)$$

где $(B, g) \in H(A, f)$ (или $(B, g) \in H^+(A, f)$).

Всюду в этом пункте будет предполагаться, что оператор-функция $A(t)$ является самосопряженной и отрицательно определенной, т.е. $A(t) = -A_1(t) + iA_2(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где $A_1(t)$ и $A_2(t)$ – самосопряженные операторы и

$$\langle A_1(t)x, x\rangle \geq \alpha |x|^2$$

при всех $x \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, $|\cdot|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\alpha > 0$.

Лемма 5.7.2. [1] *При всех $t > 0$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t, x, A, f)|^2 = -\langle A_1(t)\varphi(t, x, A, f), \qquad (5.7.5)$$
$$\varphi(t, x, A, f)\rangle + Re\langle f(t), \varphi(t, x, A, f)\rangle.$$

Лемма 5.7.3. *При всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(t, x, A, f)| \leq |x| + \int\limits_0^t |f(\tau)| d\tau.$$

Доказательство. Из равенства (5.7.5) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t, x, A, f)|^2 \leq |f(t)||\varphi(t, x, A, f)|.$$

Положим $v(t) = |\varphi(t, x, A, f)|^2$, тогда $\frac{dv}{dt} \leq 2|f(t)|\sqrt{v(t)}$ и, следовательно, $\sqrt{v(t)} - \sqrt{v(\tau)} \leq \int\limits_\tau^t |f(s)| ds$. Откуда следует, что $|\varphi(t, x, A, f)| \leq |x| + \int\limits_0^t |f(\tau)| d\tau$. Лемма доказана.

Лемма 5.7.4. *Пусть l, r и $\beta > 0$, $x_0 \in \mathcal{H}$, $A \in C(\mathbb{R}, [\mathcal{H}])$ и $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Тогда существует число $M = M(f, l, r, \beta, x_0) > 0$*

такое, что

$$|\varphi(t,x,B,g)-\varphi(t,x_0,A,f)| \le |x-x_0| + M\int_0^t |B(\tau)-A(\tau)|d\tau + \int_0^t |g(\tau)-f(\tau)|d\tau \qquad (5.7.6)$$

при всех $t \in [0,l]$ *и* $x \in B[x_0,r_0]$, *если* $|g(t)-f(t)| \le \beta$ *и* $Re\langle B(t)x,x\rangle \le \sigma$ *при всех* $t\in[0,l]$ *и* $x \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть $v(t) = [\varphi(t,x,B,g)-\varphi(t,x_0,A,f)]$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}}\{\langle v(t),\varphi'(t)\rangle + \langle A(t)v(t),\varphi(t)\rangle + \langle (B(t)-A(t))v(t),\varphi(t)\rangle + \langle g(t)-f(t),\varphi(t)\rangle\}dt = 0$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathcal{H})$. Согласно лемме 5.7.2

$$\frac{d}{2dt}|v(t)|^2 = Re\langle A(t)v(t),v(t)\rangle + Re[\langle (B(t)-A(t))\varphi(t,x,B,g),v(t)\rangle + \langle g(t)-f(t),v(t)\rangle]$$

и из леммы 5.7.3 имеем

$$|v(t)| \le |v(0)| + \int_0^t |(B(\tau)-A(\tau))v(\tau)+g(\tau)-f(\tau)|d\tau \le$$
$$\le |v(0)| + \int_0^t |B(\tau)-A(\tau)||\varphi(\tau,x,B,g)|d\tau + \int_0^t |g(\tau)-f(\tau)|d\tau \qquad (5.7.7)$$

С другой стороны, согласно лемме 5.7.3 для $\varphi(\tau,x,B,g)$ имеем

$$|\varphi(t,x,B,g)| \le |x| + \int_0^t |g(\tau)|d\tau \le |x_0| + r + \beta l + l\max_{0\le t\le l}|f(t)| = M(f,l,r,\beta,x_0). \qquad (5.7.8)$$

Из неравенств (5.7.7) и (5.7.8) вытекает (5.7.6). Лемма доказана.

Положим $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\times H(A,f)$ и через X обозначим множество всех пар $(u,(B,g))$ из $\mathcal{H}\times H(A,f)$ таких, что через точку $x \in$

$\mathcal{H}$ при $t = 0$ проходит решение $\varphi(t, u, B, g)$ уравнения (5.7.4), определенное на $\mathbb{R}_+$.

Лемма 5.7.5. *Множество X замкнуто в $\mathcal{H} \times H(A, f)$.*

Доказательство. Пусть $(x, (A, f)) \in \overline{X}$. Тогда существует последовательность $\langle x_k, (B_k, g_k)\rangle \in X$ такая, что $x_k \to x$ в $\mathcal{H}$, $B_k \to A$ в $C(\mathbb{R}, [\mathcal{H}])$ и $f_k \to f$ в $C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Пусть $l, \varepsilon > 0$, тогда существует $k_0 = k_0(\varepsilon, l) > 0$ такое, что

$$|x_k - x_l| < \varepsilon,\ |f_k(t) - f_l(t)| < \varepsilon \text{ и } |B_k(t) - B_l(t)| < \varepsilon$$

при всех $t \in [0, l]$ и $k, l \geq k_0$. Положим $r = \sup\{|x_k|| \ k \in \mathbb{N}\}$. Тогда согласно лемме 5.7.3

$$\begin{gathered} |\varphi(t, x_k, B_k, f_k) - \varphi(t, x_l, B_l, f_l)| \leq \\ |x_k - x_l| + M \int\limits_0^t |B_k(\tau) - B_l(\tau)| d\tau + \\ \int\limits_0^t |f_k(\tau) - f_l(\tau)| d\tau \leq \varepsilon + M\varepsilon l + \varepsilon l \end{gathered} \tag{5.7.9}$$

при всех $t \in [0, l]$ и $k, l \geq k_0$, где M – некоторая положительная константа, зависящая только от r, l и f. Из (5.7.9) следует, что последовательность $\{\varphi(t, x_k, B_k, f_k)\}$ является фундаментальной в пространстве $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ и, следовательно, является сходящейся в $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$. Из (5.7.9) следует $\varphi(t, x_k, B_k, f_k) \to \varphi(t, x, A, f)$ в $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ при $k \to +\infty$. Таким образом, $(x, A(t)) \in X$, т.е. $\overline{X} \subseteq X$. Лемма доказана.

Замечание 5.7.6. *Положим $\tilde{X}^+ = \mathcal{H} \times H^+(A, f)$ и через X^+ обозначим множество всех пар $(u, (B, g)) \in \mathcal{H} \times H^+(A, f)$ таких, что через точку $u \in \mathcal{H}$ при $t = 0$ приходит решение $\varphi(t, u, B, g)$ уравнения* (5.7.4), *определенное на $\mathbb{R}_+$. Аналогично, как и в лемме* 5.7.5, *устанавливается замкнутость X^+ в $\mathcal{H} \times H^+(A, f)$.*

Лемма 5.7.7. *Отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{H}$ по правилу $(t, (u, Bg)) \to \varphi(t, u, B, g)$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $t_k \to t,\ x_k \to x,\ B_k \to B$ и $g_k \to g$. Тогда

$$\begin{gathered} |\varphi(t_k, x_k, B_k, g_k) - \varphi(t, x, B, g)| \le |\varphi(t_k, x_k, B_k, g_k) - \\ \varphi(t_k, x, B, g)| + |\varphi(t_k, x, B, g) - \varphi(t, x, B, g)| \le \\ \max_{0 \le t \le l} |\varphi(t, x_k, B_k, g_k) - \varphi(t, x, B, g)| + \\ |\varphi(t_k, x, B, g) - \varphi(t, x, B, g)| \end{gathered} \tag{5.7.10}$$

Из (5.7.10) и леммы 5.7.4 получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

Леммы 5.7.5, 5.7.7 и общие свойства решений уравнений вида (5.7.3) позволяют нам определить на X (X^+) динамическую систему $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ ($(X^+, \mathbb{R}_+, \pi)$) следующим образом: $\pi(x,t) = \pi((u,(B,g)),t) = (\varphi(t,u,B,g), B^{(t)}, g^{(t)})$ при всех $(u,(B,g)) \in X$ ($(u,(B,g)) \in X^+$) и $t \in \mathbb{R}_+$.

Положим $Y = H(A,f)$ ($Y^+ = H^+(A,f)$). Через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ ($(Y^+, \mathbb{R}_+, \sigma)$) обозначим динамическую систему сдвигов на Y (Y^+). Пусть $h = pr_2 : X \to Y$ ($h = pr_2 : X^+ \to Y$), тогда тройка $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ ($\langle (X^+, \mathbb{R}_+, \pi), (Y^+, \mathbb{R}_+, \sigma), h\rangle$) является неавтономной динамической системой, порожденной уравнением (5.7.3).

Имеет место следующая

Лемма 5.7.8. *Для любых $(B,g) \in H(A,f) = Y$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ ($(x_i, B, g) \in X,\ i = 1,2$) имеет место неравенство*

$$|\varphi(t, x_1, B, g) - \varphi(t, x_2, B, g)| \le e^{-\alpha t}|x_1 - x_2|$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, т.е. неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ является сжимающей.

Доказательство. Сформулированная лемма непосредственно вытекает из леммы 5.7.2. Действительно, положим $\omega(t) = \varphi(t, x_1, B, g) - \varphi(t, x_2, B, g)$, тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega(t)|^2 = Re\langle B(t)\omega(t), \omega(t)\rangle \le -\alpha|\omega(t)|^2$$

и, следовательно, $|\omega(t)| \le |\omega(0)|e^{-\alpha t}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

Теорема 5.7.9. *Пусть* $A \in C(\mathbb{R}, [\mathcal{H}])$ *и* $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *совместно асимптотически постоянны (асимптотически* τ*-периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны), тогда уравнение* (5.7.3) *конвергентно, т.е. конвергентна неавтономная динамическая система* $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y^+, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$*, порожденная уравнением* (5.7.3).

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается по схеме, что и доказательство теоремы 3.8.5 с использованием построенных выше неавтономных динамических систем $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ и $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y^+, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ и леммы 5.7.7.

Отметим, что в случае асимптотической почти периодичности $A(t)$ и $f(t)$ теорема 5.7.9 усиливает один результат из работы [**1**].

Следуя [**1**], приведем пример краевой задачи, сводящейся к уравнению вида (5.7.3). Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$; $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $S = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$. Рассмотрим в Q первую начальную краевую задачу для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + g(t, u),\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u|_S = 0.$$

Здесь $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(t)\frac{\partial u}{\partial x_j}) - a(t, x)u$ – равномерно эллиптический оператор, т.е. для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \le \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

$\lambda > 0$. Оператор $A(t)$ в силу теоремы Рисса определяется из условия

$$\langle A(t)u, \varphi \rangle = -\int_{\Omega} [\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a(t, x)u\varphi] d\Omega.$$

В качестве пространства $\mathcal{H}$ возьмем $L_2(\Omega)$. Тогда, если обычным образом определить обобщенное решение, получим уравнение вида (5.7.3).

3. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Рассмотрим уравнение
$$\dot{y} = -y|y| + f(t), \tag{5.7.11}$$
где $y \in \mathcal{H}$ и $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Имеет место следующая

Теорема 5.7.10. **[82]** *Какова бы ни была ограниченная на $\mathbb{R}$ функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ уравнение* (5.7.11) *имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение φ и $|\varphi(t)| \le \sqrt{2||f||}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где $||f|| = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}$.*

Следствие 5.7.11. *Какова бы ни была ограниченная на $\mathbb{R}_+$ функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ уравнение* (5.7.11) *имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.7.10. Действительно, если $F \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, то функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, равная $F(t)$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и $F(0)$ при $t \in \mathbb{R}_-$, ограничена на $\mathbb{R}$ и согласно теореме 5.7.1 уравнение (5.7.11) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение φ. Очевидно, сужение функции φ на $\mathbb{R}_+$ является искомым решением.

Лемма 5.7.12. *Если функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, то все решения уравнения* (5.7.11) *ограничены на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t, x, f)$ – решение уравнения (5.7.11), проходящее через точку x при $t = 0$. Тогда согласно лемме 1 из **[82]**
$$|\varphi(t, x_1, f) - \varphi(t, x_2, f)| \le \frac{2|x_1 - x_2|}{2 + |x_1 - x_2|t} \tag{5.7.12}$$
при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$. Следовательно,
$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, x_1, f) - \varphi(t, x_2, f)| = 0 \tag{5.7.13}$$
при всех $x_1, x_2 \in H$. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на следствие 5.7.11.

Лемма 5.7.13. *Какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ уравнение* (5.7.11) *имеет по крайнем мере одно асимптотически почти периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ асимптотически почти периодична и

$$f(t) = p(t) + \omega(t) \tag{5.7.14}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$, где функция $p \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ почти периодична и $\lim\limits_{t\to+\infty} |\omega(t)| = 0$. Согласно лемме 4 [**82**] уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x|x| + p(t)$$

имеет единственное почти периодическое решение $q \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Наряду с уравнением (5.7.14) рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x|x| + p(t) + \tilde{\omega}(t), \tag{5.7.15}$$

где $\tilde{\omega}(t) = \omega(t)$ при всех $t \geq 0$ и $\tilde{\omega}(t) = \omega(0)$ при $t < 0$. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (5.7.15) Пусть $\tau \geq 0$, тогда $\tilde{\varphi}^{(\tau)}(t) = \tilde{\varphi}(t + \tau)$ является единственным ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -y|y| + p_\tau(t) + \tilde{\omega}^{(\tau)}(t).$$

Согласно теореме 5.7.10

$$|\overline{\varphi}^{(\tau)}(t) - q^{(\tau)}(t)| \leq \sqrt{2||\tilde{\omega}^{(\tau)}||}. \tag{5.7.16}$$

Заметим, что $\tilde{\omega}^{(\tau)}(t) = \omega^{(\tau)}(t)$ при всех $t \geq 0$ и $\tilde{\omega}^{(\tau)}(t) = \omega^{(\tau)}(0)$ при $t < 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\tau\to+\infty} ||\tilde{\omega}^{(\tau)}|| = 0 \tag{5.7.17}$$

Из (5.7.16) и (5.7.17) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |\tilde{\varphi}(t) - q(t)| = 0$. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что сужение на $\mathbb{R}_+$ функции $\tilde{\varphi}$ является асимптотически почти периодическим решением уравнения (5.7.11).

Следствие 5.7.14. *Какова бы ни была асимптотически почти периодическая функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ все решения уравнения* (5.7.11) *асимптотически почти периодичны.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из леммы 5.7.12 и равенства (5.7.13).

Теорема 5.7.15. *Если отображение $f \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ асимптотически почти периодично, то уравнение* (5.7.11) *конвергентно.*

Доказательство. Пусть $Y = H^+(f) = \overline{\{f^{(\tau)} | \tau \in \mathbb{R}_+\}}$ (чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R}, H)$) и $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на $H^+(f)$. Положим $X = \mathcal{H} \times Y$ и определим на X динамическую систему $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ по следующему правилу: $\pi((x, g), \tau) = (\varphi(t, x, g), g^{(\tau)})$, где $\varphi(t, x, g)$ – решение уравнения

$$\frac{du}{dt} = -u|u| + g(t), \tag{5.7.18}$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x, g) = x$. Положим $h = pr_2 : X \to Y$ и рассмотрим неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$. Покажем, что построенная неавтономная динамическая система конвергентна.

Прежде всего покажем, что система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ компактно диссипативна. Согласно лемме 5.7.12 система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ поточечно диссипативна, ибо $\omega_x = \omega_{(p,q)} = H(p, q)$ каково бы ни было $x \in X$ и, следовательно, $\Omega_X = H(p, q)$ компактно.

Пусть $K \subset X$ – произвольный компакт и $\Sigma_K^+ = \{\pi^t x | \ x \in K, \ t \in \mathbb{R}_+\}$. Покажем, что Σ_K^+ компактно. Пусть $\{\overline{x}_n\} \subset \Sigma_K^+$. Тогда существуют $\{x_n\} \subset K$ и $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ такие, что $\overline{x}_n = \pi(x_n, t_n)$. Пусть $x_n = (u_n, g_n) \in \mathcal{H} \times H^+(f)$. Так как K – компакт, то последовательности $\{u_n\}$ и $\{g_n\}$ можно считать сходящимися. Положим $u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ и $g = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n$. В силу асимптотической почти периодичности f имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \ge 0} |g_n(t) - g(t)| = 0. \tag{5.7.19}$$

Так, как $g \in H^+(f)$, то решение $\varphi(t, u, g)$ уравнения (5.7.18) асимптотически почти периодично и, следовательно, последовательность $\{\varphi(t_n, u, g)\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\overline{u} = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(t_n, u, g)$. Покажем, что $\overline{x}_n \to \overline{x} = (\overline{u}, g)$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} &|\varphi(t_n, u_n, g_n) - \varphi(t_n, u, g)| \le \\ &|\varphi(t_n, u_n, g_n) - \varphi(t_n, u, g_n)| + |\varphi(t, u, g_n) - \varphi(t, u, g)|. \end{aligned} \tag{5.7.20}$$

Положим $w_n(t) = |\varphi(t,u,g_n) - \varphi(t,u,g)|$ и $\delta_n = \sup\{|g_n(t) - g(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}$. Согласно [**82**, с.73]

$$\frac{dw_n(t)}{dt} \leq -\frac{1}{2}w_n^2(t) + \delta_n \tag{5.7.21}$$

и, учитывая, что $w_n(0) = 0$, получаем

$$w_n(t) \leq \sqrt{2\delta_n} \tag{5.7.22}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Из (5.7.12), (5.7.19) – (5.7.22) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} |\varphi(t_n,u_n,g_n) - \varphi(t_n,u,g)| = 0$$

и, следовательно, $\overline{x}_n = (\varphi(t_n,u_n,g_n),g_n) \to (\overline{u},g) = \overline{x}$. Таким образом, Σ_K^+ компактно. Положим $M = H^+(K) = \overline{\Sigma_K^+}$ и $J = \Omega(M) = \cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq t}\pi^\tau M}$. Согласно [**55**] множество J является компактным и инвариантным. Из теоремы 5.7.10 и леммы 5.7.12 следует, что единственным компактным инвариантным множеством динамической системы $(X,\mathbb{R}_+,\pi)$ является множество $\Omega_X = H(p,q)$. Таким образом, $\Omega(M) = J = \Omega(X)$ и, следовательно, $(X,\mathbb{R}_+,\pi)$ является компактно диссипативной динамической системой и ее центр Левинсона $J_X = \Omega_X$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что согласно теореме 5.7.10 $J_X \cap X_y$ содержит не более одной точки каково бы ни было $y \in \omega_f = J_Y$. Теорема доказана.

4. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. В этом пункте мы рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{5.7.23}$$

где $f \in C(\mathbb{R}\times\mathcal{H},\mathcal{H})$ удовлетворяет условию

$$Re\langle x_1 - x_2, f(t,x_1) - f(t,x_2)\rangle \leq -\kappa|x_1 - x_2|^\alpha \tag{5.7.24}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathcal{H}$ ($\kappa > 0$ и $\alpha > 2$). Наряду с уравнением (5.7.23) рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y), \quad (g \in H^+(f)) \tag{5.7.25}$$

где $H^+(f) = \overline{\{f^{(\tau)}|\tau \in \mathbb{R}_+\}}$, где $f^{(\tau)}$ – сдвиг f на τ по переменной t и чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R}\times\mathcal{H},\mathcal{H})$. Заметим, что наряду с функцией f условию (5.7.24) удовлетворяет и всякая функция $g \in H^+(f)$ с теми же константами κ и α. Согласно результатам [**45**, гл.2], если функция $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ удовлетворяет условию (5.7.24), то для любых $u \in \mathcal{H}$ и $g \in H^+(f)$ уравнение (5.7.25) имеет единственное решение $\varphi(t, u, g)$, определенное на $\mathbb{R}_+$ и проходящее через точку $u \in \mathcal{H}$ при $t = 0$; кроме того, отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{H} \times H^+(f) \to \mathcal{H}$ непрерывно. Положим теперь $Y = H^+(f)$ и через $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $H^+(f)$. Далее, пусть $X = \mathcal{H} \times H^+(f)$ и $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \to X$ – отображение, определенное равенством $\pi((u, g), t) = (\varphi(t, u, g), g^{(t)})$. Тогда $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ – полугрупповая динамическая система. Наконец, положим $h = pr_2 : X \to Y$, тогда $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ есть неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.7.23).

Как и ранее, уравнение (5.7.23) назовем конвергентным, если неавтономная система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$, порожденная уравнением (5.7.23),конвергентна.

В главе III нами установлена (см. теорему 3.8.5 и замечание 3.8.8) конвергентность уравнения (5.7.23), если правая часть f асимптотически почти периодична по t и удовлетворяет условию (5.7.24) с показателем $\alpha = 2$. Ниже будет установлена конвергентность уравнения (5.7.23), когда f удовлетворяет условию (5.7.24) с показателем $\alpha > 2$. Предварительно приведем две вспомогательные леммы.

Лемма 5.7.16. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ таково, что множество $\{f^{(\tau)} |\ \tau \in \mathbb{R}_+\}$ относительно компактно в $C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ и выполнено условие (5.7.24), тогда:*

1) *Каково бы ни было $u \in \mathcal{H}$ решение $\varphi(t, u, f)$ уравнения (5.7.23) компактно на $\mathbb{R}_+$, т.е. $\varphi(\mathbb{R}_+, u, f)$ относительно компактно в $\mathcal{H}$.*
2) *При всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$*

$$|\varphi(t, x_1, f) - \varphi(t, x_2, f)| \le (|x_1 - x_2|^{2-\alpha} + (\alpha - 2)t)^{\frac{1}{2-\alpha}} = \frac{|x_1 - x_2|}{(1 + |x_1 - x_2|^{\alpha-2}(\alpha - 2)t)^{\frac{1}{\alpha-2}}}. \tag{5.7.26}$$

Доказательство. Определим функцию $F \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ по следующему правилу

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x) \text{ при } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{H} \\ f(0,x) \text{ при } (t,x) \in \mathbb{R}_- \times \mathcal{H}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция F обладает следующими свойствами:

а) $\{F^{(\tau)} | \ \tau \in \mathbb{R}\}$ относительно компактно в $C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$.

б) $Re\langle x_1 - x_2, F(t,x_1) - F(t,x_2)\rangle \leq -\kappa |x_1 - x_2|^{\alpha}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$.

Согласно теореме 2.2.3.1 из **[45]** уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \tag{5.7.27}$$

имеет единственное компактное на $\mathbb{R}$ решение $\varphi(t, x_0, F)$ и для любых двух решений $\varphi(t, x_1, F)$ и $\varphi(t, x_2, F)$ имеет место неравенство

$$|\varphi(t,x_1,F) - \varphi(t,x_2,F)| \leq (|x_1 - x_2|^{2-\alpha} + (2-\alpha)t)^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ и, следовательно, $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t,x_1,F) - \varphi(t,x_0,F)| = 0$ при всех $x \in \mathcal{H}$. Из последнего соотношения следует, что все решения уравнения (5.7.27) компактны на $\mathbb{R}_+$. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что $\varphi(t,x,f) = \varphi(t,x,F)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

Лемма 5.7.17. *Пусть α, κ и ε – положительные числа, тогда скалярное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = -\kappa x^{\alpha} + \varepsilon$$

определяет на $\mathbb{R}_+$ полупоток $\varphi_\varepsilon(x,t)$, который имеет единственную точку покоя $x_\varepsilon = (\frac{\varepsilon}{\kappa})^{1/\alpha}$ и

$$0 \leq \varphi_\varepsilon(x,t) \leq x_\varepsilon \tag{5.7.28}$$

при всех $x \in [0, x_\varepsilon]$ и $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Доказательство очевидно.

Теорема 5.7.18. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}\times\mathcal{H},\mathcal{H})$ *асимптотически почти периодична по* $t \in \mathbb{R}$ *равномерно по* x *на компактах из* $\mathcal{H}$ *и удовлетворяет условию* (5.7.24). *Тогда уравнение* (5.7.23) *конвергентно.*

Доказательство. Пусть $\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y,\mathbb{R}_+,\sigma),h\rangle$ – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.7.23). Так как $Y = H^+(f)$ и f асимптотически почти периодична, то $(Y,\mathbb{R}_+,\sigma)$ компактно диссипативна и $J_Y = \omega_f$.

Покажем, что для любого компакта $K \subset \mathcal{H}$, множество $\varphi(\mathbb{R}_+,K,H^+(f)) = \{\varphi(t,x,g)|\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in K,\ g \in H^+(f)\}$ относительно компактно. Пусть $\{y_n\} \subseteq \varphi(\mathbb{R}_+,K,H^+(f))$. Тогда существуют $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{x_n\} \subseteq K$ и $\{g_n\} \subseteq H^+(f)$ такие, что $y_n = \varphi(t_n,x_n,g_n)$. В силу компактности K и $H^+(f)$ последовательности $\{x_n\}$ и $\{g_n\}$ можно считать сходящимися. Положим $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ и $g = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n$. Если последовательность $\{t_n\}$ ограничена, то последовательность $\{\varphi(t_n,x_n,g_n)\}$ относительно компактна и требуемое утверждение доказано. Пусть теперь $\{t_n\}$ неограничена, тогда, не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Так как согласно лемме 5.7.16 множество $\varphi(\mathbb{R}_+,x,g)$ относительно компактно, то последовательность $\{\varphi(t_n,x,g)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(t_n,x,g)$ и покажем, что $\varphi(t_n,x_n,g_n) \to \overline{x}$ при $n \to +\infty$. Для этого заметим, что

$$|\varphi(t_n,x_n,g_n) - \varphi(t_n,x,g)| \le |\varphi(t_n,x_n,g_n) - \varphi(t_n,x,g_n)| + \\ |\varphi(t_n,x,g_n) - \varphi(t_n,x,g)|. \tag{5.7.29}$$

Оценим слагаемые, входящие в правую часть (5.7.29). Согласно (5.7.26)

$$|\varphi(t_n,x_n,g_n) - \varphi(t_n,x,g_n)| \le |x_n - x|. \tag{5.7.30}$$

С другой стороны, если $\omega_n(t) = |\varphi(t,x,g_n) - \varphi(t,x,g)|^2$, то

$$\frac{d}{dt}\omega_n(t) = 2Re\langle g_n(t,\varphi(t,x,g_n)) - g(t,\varphi(t,x,g)),\\ \varphi(t,x,g_n) - \varphi(t,x,g)\rangle \le 2Re\langle g_n(t,\varphi(t,x,g_n)) -\\ g_n(t,\varphi(t,x,g)), \varphi(t,x,g_n) - \varphi(t,x,g)\rangle +\\ +2Re\langle g_n(t,\varphi(t,x,g)) - g(t,\varphi(t,x,g)), \varphi(t,x,g_n) -\\ \varphi(t,x,g)\rangle \le -2\kappa|\varphi(t,x,g_n) - \varphi(t,x,g)|^{\alpha} +\\ 2\varepsilon_n|\varphi(t,x,g_n) - \varphi(t,x,g)|$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, где

$$\varepsilon_n = \sup_{x \in \overline{\varphi(\mathbb{R}_+,x,g)}, t \in \mathbb{R}_+} |g_n(t,x) - g(t,x)|.$$

В силу асимптотической почти периодичности $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ и компактности на $\mathbb{R}_+$ решения $\varphi(t,x,g)$ имеем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Согласно теореме 1.1.1.2 из [**45**]

$$\omega_n(t) \le \psi_n(t,0),$$

где $\psi_n(t,x)$ – решение уравнения

$$\frac{du}{dt} = -2\kappa u^{\frac{\alpha}{2}} + 2\varepsilon_n u^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.7.31)$$

проходящее через точку x при $t = 0$. Положим $y = u^{\frac{1}{2}}$, тогда из (5.7.31) получим

$$\frac{dy}{dt} = -\kappa y^{\alpha} + \varepsilon_n. \qquad (5.7.32)$$

Таким образом, $\sqrt{\psi_n(t,x)}$ – решение уравнения (5.7.32) и согласно лемме 5.7.16 $\sqrt{\psi_n(t,0)} \le \sqrt{x_{\varepsilon_n}} = (\frac{\varepsilon_n}{x})^{\frac{1}{2\alpha}}$ и, следовательно,

$$|\varphi(t,x,g_n) - \varphi(t,x,g)| \le (\frac{\varepsilon_n}{x})^{\frac{1}{2\alpha}} \qquad (5.7.33)$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Из неравенств (5.7.29), (5.7.30) и (5.7.33) следует, что

$$\lim_{n \to +\infty} |\varphi(t_n,x_n,g_n) - \varphi(t_n,x,g)| = 0.$$

и, следовательно, $\{y_n\}$ является сходящейся и требуемое утверждение доказано.

Поскольку наряду с функцией $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ условию (5.7.24) удовлетворяет и любая функция $g \in H^+(f)$, то, согласно лемме 5.7.8,

$$|\varphi(t, u_1, g) - \varphi(t, u_2, g)| \leq \frac{|u_1 - u_2|}{(1 + |u_1 - u_2|^{\alpha-2}(\alpha - 2)t)^{\frac{1}{\alpha-2}}}$$

при всех $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ и $g \in H^+(f)$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.6.3.

Теорема 5.7.19. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$ асимптотически рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на компактах из $\mathcal{H}$, пространство $\mathcal{H}$ конечномерно и функция f удовлетворяет условию* (5.7.24) *с показателем $\alpha > 1$. Тогда уравнение* (5.7.23) *конвергентно.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$, порожденная уравнением (5.7.23) (см. пример 3.1.1 и замечание 3.1.2). Положим $M = \sup\{|f(t, 0)| : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $u(t) = |\varphi(t, x, g)|^2$, где $u \in \mathcal{H}$ и $g \in H^+(f)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\tfrac{du}{dt} = 2Re\langle g(t, \varphi(t, x, g)), \varphi(t, x, g)\rangle = \\
&2Re\langle g(t, \varphi(t, u, g)) - g(t, 0), \varphi(t, u, g)\rangle + \\
&+2Re\langle g(t, 0), \varphi(t, u, g)\rangle \leq -2\kappa u^{\frac{\alpha}{2}}(t) + 2Mu^{\frac{1}{2}}(t).
\end{aligned}$$

Согласно теореме 1.1.1.2 из [**45**]

$$|\varphi(t, u, g)|^2 \leq \psi(t, |u|^2) \tag{5.7.34}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$, где $\psi(t, x)$ $(x \geq 0)$ – решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -2\kappa x^{\frac{\alpha}{2}} + 2Mx^{\frac{1}{2}},$$

проходящее через точку x при $t = 0$. Нетрудно сообразить, что

$$\lim_{t \to +\infty} |\psi(t, x)| \leq (\frac{M}{\kappa})^{\frac{2}{\alpha-1}} \tag{5.7.35}$$

при всех $x \geq 0$. Из (5.7.34) и (5.7.35) вытекает требуемое утверждение.

Так как $Y = H^+(f)$, то $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ компактно диссипативна и $J_Y = \omega_f$. Далее, в силу конечномерности пространства

$\mathcal{H}$, динамическая система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ также компактно диссипативна. Обозначим через J_X ее центр Левинсона и покажем, что при любом $y \in J_X$ множество $J_X \cap X_y$ содержит не более одной точки. Положим $V(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|^2$, тогда

$$V(\varphi(t, u_1, g), \varphi(t, u_2, g)) = |\varphi(t, u_1, g) - \varphi(t, u_2, g)|^2$$

и

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}V(\varphi(t, u_1, g), \varphi(t, u_2, g)) = 2Re\langle g(t, \varphi(t, u_1, g)) -\\ &g(t, \varphi(t, u_2, g)), \varphi(t, u_1, g) - \varphi(t, u_2, g)\rangle \leq\\ &-2\kappa|\varphi(t, u_1, g) - \varphi(t, u_2, g)|^{\alpha} =\\ &-2\kappa V^{\frac{\alpha}{2}}(\varphi(t, u_1, g), \varphi(t, u_2, g))\end{aligned} \tag{5.7.36}$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Из (5.7.36) следует, что

$$|\varphi(t, u_1, g) - \varphi(t, u_2, g)| < |u_1 - u_2| \tag{5.7.37}$$

при всех $t > 0$ и $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ $(u_1 \neq u_2)$. Пусть теперь $g \in \omega_f = J_Y$ и $(u_1, g), (u_2, g) \in J_X \cap X_g$. Тогда, согласно теореме 1 из [**59**], решения $\varphi(t, u_1, g)$ и $\varphi(t, u_2, g)$ совместно рекуррентны и, если $u_1 \neq u_2$, то имеет место (5.7.37), что противоречит рекуррентности $|\varphi(t, u_1, g) - \varphi(t, u_2, g)|$. Полученное противоречие показывает, что $J_X \cap X_y$ содержит не более одной точки каково бы ни было $y \in J_Y$. Теорема доказана.

Предметный указатель

Литература

[1] Б.Г. Араркцян. Асимптотически почти периодические решения некоторых линейных эволюционных уравнений. *Математический сборник*, 133 (175), 1(5) с. 3 – 10, 1987.

[2] И.У. Бронштейн. *Расширение минимальных групп преобразований.* Штиинца, Кишинев, 1975.

[3] И.У. Бронштейн и А.И. Герко. О вложении некоторых топологических полугрупп преобразований в топологические группы преобразований. *Известия АН Молдавской ССР, серия физ.-техн. и матем. наук*, 3:18-24, 1970.

[4] И.У. Бронштейн. *Неавтономные динамические системы.* Штиинца, Кишинев, 1984.

[5] В.С. Владимиров. *Обобщенные функции в математической физике.* М., Наука, 1976.

[6] Л.Р. Волевич и Б.П. Панеях. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. *Успехи математических наук*, 20(1(121)):3–74, 1965.

[7] Е. Гамелин. *Равномерные алгебры.* М., Мир, 1973.

[8] Ю.Л. Далецкий и М.Г. Крейн. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М., 1970.

[9] Б.П. Демидович. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I. *Вестник МГУ*, (6):19–27, 1961.

[10] Б.П. Демидович. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, II. *Вестник МГУ*, (1):3–8, 1962.

[11] Б.П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости.* М., 1967.

[12] И.К. Донтви. Ограниченные, почти-периодические и асимптотически почти-периодические решения линейных дифференциальных уравнений с обобщенными возмущениями. *Диссерт. канд. физ.-мат. наук*, Одесса, 1988.
[13] В.К. Дуболарь. О рекуррентных решениях дифференциальных уравнений с последействием в банаховом пространстве. *Дифференциальные уравнения*, 6(6):1395–1401, 1970.
[14] В.В. Жиков. К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений. *Научные труды ВВПИ, математика*, (8):94–188, 1969.
[15] В.В. Жиков. Об устойчивости и неустойчивости центра Левинсона. *Дифференциальные уравнения*, 8(12):2167–2170, 1972.
[16] В.И. Зубов. *Методы А.М. Ляпунова и их приложения.* Л., 1957.
[17] В.И. Зубов. *Устойчивость движения.* М., Высшая школа, 1973.
[18] В.И. Зубов. *Теория колебаний.* М., Наука, 1979.
[19] Дж.Л. Келли. *Общая топология.* М., Наука, 1981.
[20] Э.А. Коддингтон и Н. Левинсон. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., 1958.
[21] А.Н. Колмогоров и С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., Наука, 1972.
[22] М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд и Ю.С. Колесов. *Нелинейнык почти периодические колебания.* М., Наука, 1970.
[23] М.А. Красносельский и П.П. Забрейко. *Геометрические методы нелинейного анализа.* М.,Наука, 1975.
[24] Н.Н. Красовский. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М., Физматгиз, 1959.
[25] К. Куратовский. *Топология.* М., 1966 В 2-х томах, том 1.
[26] К. Куратовский. *Топология.* М., 1969 В 2-х томах, том 2.
[27] Б.М. Левитан и В.В. Жиков. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* М., МГУ, 1978.
[28] Б.М. Левитан. *Почти периодические функции.* М., ГИТТЛ, 1953.

[29] В.М. Миллионщиков. Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР*, 161(1):43–44, 1965.

[30] В.М. Миллионщиков. О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем. *Дифференциальные уравнения*, 4(9):1555–1559, 1968.

[31] В.М. Миллионщиков. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 7(3):387–390, 1971.

[32] С. Мизохата. *Теория уравнений в частных производных.* М., Мир, 1977.

[33] Э.М. Мухамадиев. Об одном критерии обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций. *ДАН ТаджССР*, 15(9):7–10, 1972.

[34] В.В. Немыцкий и В.В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1949.

[35] В.В. Немыцкий. О некоторых методах качественного исследования в "большом"многомерных автономных систем. *Труды ММО*, 5:455–482, 1956.

[36] В.В. Немыцкий. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. *УМН*, 22(4):3–36, 1965.

[37] З. Нитецки. *Ввеление в дифференциальную динамику.* М., Мир, 1975.

[38] А.И. Перов и Ю.В. Трубников. Монотонные дифференциальные уравнения, I. *Дифференциальные уравнения*, 10(5):804–815, 1974.

[39] А.И. Перов и Ю.В. Трубников. Монотонные дифференциальные уравнения, II. *Дифференциальные уравнения*, 12(7):1223–1237, 1976.

[40] В.А. Плисс. *Нелокальные проблемы теории колебаний.* М., Наука, 1964.

[41] В.А. Плисс. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1977.

[42] У. Рудин. *Функциональный анализ.* М., Мир, 1975.

[43] К.С. Сибирский. *Введение в топологическую динамику.* Кишинев, РИО АН МССР, 1970.

[44] К.С. Сибирский и А.С. Шубэ. *Полудинамические системы (топологическая теория).* Кишинев, Штиинца, 1970.

[45] Ю.В. Трубников, А.И. Перов *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями.* Минск, Наука и техника, 1986.

[46] А. Халанай и Д. Векслер. *Качественная теория импульсных систем.* М., Мир, 1971.

[47] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., Мир, 1970.

[48] Дж. Хейл. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* М., Мир, 1984.

[49] Л. Хермандер. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* М., Мир, 1965.

[50] Д. Хьюзмоллер. *Расслоенные пространства.* М., Мир, 1970.

[51] Д.Н. Чебан. Асимтпотически устойчивые по Пуассону решения операторных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 13(8):1411–1417, 1977.

[52] Д.Н. Чебан. О сравнимости точек динамических систем по характеру возвращаемости в пределе. *Математические науки*, Кишинев, Штиинца, 1:66-71, 1977.

[53] Д.Н. Чебан. *Теория линейных дифференциальных уравнений (избранные главы).* Кишинев, Штиинца, 1980.

[54] Д.Н. Чебан. Об устойчивости центра Левинсона неавтономных диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 20(11):2016-2018, 1984.

[55] Д.Н. Чебан. Квазипериодические решения диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*, 22(2):267–278, 1986.

[56] Д.Н. Чебан. Один признак конвергентности нелинейных систем в гильбертовом пространстве. *Дифференциальные уравнения и их инварианты (Математические исследования)*, 88:136–143, Кишинев, Штиинца, 1986.

[57] Д.Н. Чебан. Признак конвергентности нелинейных систем по первому приближению. *Дифференциальные уравнения и их инварианты (Математические исследования)*, 88:144–150, Кишинев, Штиинца, 1986.

[58] Д.Н. Чебан. Неавтономные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Тезисы докладов 6-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, стр. 197–198, Иркутск, 1986.

[59] Д.Н. Чебан. С-аналитические диссипативные динамические системы. *Дифференциальные уравнения*, 22(11):1915–1922, 1986.

[60] Д.Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 23(3):464–474, 1987.

[61] Д.Н. Чебан. Ограниченность, диссипативность и почти периодичность решений линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Динамические системы и краевые задачи*, Кишинев, Штиинца, стр. 143–159, 1987.

[62] Д.Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 56–54, 1988.

[63] Д.Н. Чебан. Импульсные и разностные диссипативные системы с периодическими коэффициентами. *Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому анализу*, Кишинев, Штиинца, 127–142, 1988.

[64] Д.Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы. *Дифференциальные уравнения*, 24(9):1564–1576, 1988.

[65] Д.Н. Чебан. Принцип усреднения на полуоси для диссипативных систем. *Динамические системы и уравнения математической физики (Математические исследования)*, 99:149–161, Кишинев, Штиинца, 1988.

[66] Д.Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы с гиперболическим подмножеством центра (одномерный случай). *Математические заметки*, 45(6):93-98, 1989.

[67] Д.Н. Чебан. Неавтономные динамические системы с конвергенцией. *Дифференциальные уравнения*, 25(9):1633–1635, 1989.

[68] Д.Н. Чебан. Диссипативные функционально-дифференциальные уравнения. *Известия АН РМ, Математика*, (2(5)):3–12, 1991.

[69] Д.Н. Чебан и Д.С. Факих. *Глобальные аттракторы дисперсных динамических систем.* Кишинев, Сигма, 1994.

[70] Д.Н. Чебан. Асимптотика решений бесконечномерных однородных динамических систем. *Математическме заметки*, 63(1):111-126, 1998.

[71] Д.Н. Чебан. Глобальные аттракторы неавтономных динамических систем. Кишинев, Издательский центр МолдГУ, 2002.

[72] А.Н. Шарковский. О притягивающих и притягивающихся множествах. *Докл. АН СССР*, 160(5):1036-1038, 1965.

[73] Л. Шварц. *Анализ*, том 1. М., Мир, 1972.

[74] Л. Шварц. *Анализ*, том 2. М., Мир, 1972.

[75] Б.А. Щербаков. *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1972.

[76] Б.А. Щербаков. *О согласованной возвращаемости ограниченных решений дифференциальных уравнений 1-ого порядка.* Дифференциальные уравнения, 10(2):270-275, 1974.

[77] Б.А. Щербаков. *О сравнимости по характеру возвращаемости движений динамических систем.* Дифференциальные уравнения, 11(7):1246-1255, 1975.

[78] Б.А. Щербаков и Д.Н. Чебан. Асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем и сравнимость их возвращаемости в пределе. *Дифференциальные уравнения*, 13(5):898–906, 1977.

[79] Б.А. Щербаков. *Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1985.

[80] Z. Artstein. Uniform Asymptotic Stability via the Limiting Equations. *Journal of Differential Equations*, 27(2):172–189, 1978.

[81] D. Barac. Asymptotically almost periodic solutions of the systems of differential equations. *Mathematica - Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation. Mathematica.* 19(42), 2:123-127, 1977.

[82] A. Bayliss. Forced Oscilations in Quadratically Damped Systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31:69-88, 1978.

[83] N.P. Bhatia and G.P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[84] H. Brezis. *Operateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, volume 5 of *Math. Studies.* North Holland, 1973.

[85] D.N. Cheban. The global attractors of nonautonomous dynamical systems and almost periodic limit regimes of some classes of evolution equations. *Anale Fac. de Mat. şi Inform.,* v. 1, 1999, pp. 1-26.

[86] W.A. Coppel. Almost periodic properties of ordinary differential equations. *Ann. Mat. Pura. Appl.* 76:27-49, 1976.

[87] C.M. Dafermos. Almost Periodic Process and Almost Periodic Solutions of Evolution Equations. *Dynamical Systems. Proceedings of a University of Florida international symposium*, pages 43–58, 1977.

[88] W.F. Eberlein. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. *Transactions of American Math. Society*, 67(1):217-240, 1949. 43–58, 1977.

[89] A.M. Fink. Semi-separated conditions for almost periodic solutions. *J. Diff. Equat.*, 11(2):245-251, 1972.

[90] M. Frechet. Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques. *Revue scientifique*, 79(7-8):341-354, 1941.

[91] N. Gheorghiu. Soluţii aproape periodice şi asimptotic aproape periodice ale unor ecuaţii diferenţiale nelineare de ordine 1. *An. Ştiinţ. Univ. "Al.I. Cuza"din Iaşi.*, No.1, s.1, Fasc. 1-2, 17-20, 1955.

[92] W.H. Gottschalk and G.A. Hedlund. Topological dynamics. *Amer. Math. Soc. Colloquim Publications*, 36, 1955.

[93] J.K. Hale and J. Kato. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcialaj Ekvacioj*, 21:11-41, 1978.

[94] J.K. Hale. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. *Mathematical surveys and Monographs*, number 25, pages 198+. American Math. Soc., Providence, R.I., 1988.

[95] J. Kato and F. Nakajima. On Sacker-Sell's theorem for a linear skew product flow. *Tôhoku Math. Journ.*, 28:79-88, 1976.

[96] R.K. Miller. Non linear Voltera intergral equations. *Math. Lecture Notes Serie*, 1971.

[97] I. Muntean. Exponential convergence of solutions of differential equations. *Revue Romaine de math. pure et appl.*, 17:1411-1417, 1972.

[98] H. Nacer. Systems Dynamiques Nonautonomes Contractants et leur Applications. Thése de magister. Algerie, USTHB, 1983.

[99] W.M. Ruess and Summers W.H. Positive limit sets consisting of a single periodic motion. *Journal of Differential Equations*, 71(1):261-269, 1988.

[100] G.R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I. The basic theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:241–262, 1967.

[101] G.R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, II. Limiting equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:263–283, 1967.

[102] G.R. Sell. Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations, *Van Nostrand–Reinbold, London,* 1971.

[103] G.R. Sell. Dichotomies for differential and integral equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 312:188–193, 1973.

[104] R.J. Sacker and G.R. Sell. Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems, I. *Journal of Differential Equations*, 15:429–458, 1974.

[105] R.J. Sacker. Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems, IV. *Journal of Differential Equations*, 27(1):106–137, 1978.

[106] J. Traple. Weak almost periodic soluions of differential equations. *J. Diff. Equat.*, 45:199-206, 1972.

[107] T. Yoshizawa. Asymptotically almost periodic solutions an almost periodic system. *Funkcialaj Ekvacioj,* 12:23-40, 1969.

Rezumat

Lucrarea de faţa este consacrată studierii soluţiilor asimptotic aproape periodice ale ecuaţiilor diferenţiale cu partea dreapta asimptotic aproape periodică. Studierea stărilor de trecere şi de limita ale sistemelor dinamice ocupa un rol deosebit şi important in teoria calitativa a ecuaţiilor diferenţiale. In prezenta monografie sunt definite şi studiate diverse clase de mişcari asimptotic stabile dupa Poisson (asimptotic periodice, asimptotic aproape periodice, asimptotic recurente s.a.) ale sistemelor dinamice, precum şi stabilite diverse relaţii intre aceste noţiuni. Sunt prezentate diverse criterii de existenţa a soluţiilor asimptotic stabile dupa Poisson ale ecuaţiilor operatoriale. Sunt ilustrate aplicaţii ale rezultatelor stabilite lase de ecuatii diferentiale. Monografia este pusa la indemana specialistilor in domeniul ecuaţiilor diferenţiale, sistemelor dinamice si a aplicaţiilor lor, precum şi profesorilor şi studenţilor cursurilor superioare.

Summary

The book is devoted to the study of the asymptotic almost periodic solutions of differential equations with asymptotic almost periodic right hand side. The study of the transitional and limit rergims of dynamical systems occupies an important position in the modern qualitative theory of differential equations. In the book there are introduced and studied different classes of asymptotic stable in the sense of Poisson (asymptotical periodic, asymptotical almost periodic, asymptotical recurrrent etc) motions of dynamical systems and there is established the relation between them. The different tests of existence of asymptotical stable in the sense of Poisson solutions of operational equations are given.

The book is intended to the experts in qualitative theory of differential equations, dynamical systems and their applications, and also for the university professors and senior students.

Рекомендовано кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений

Рецензенты: **Б. А. Щербаков**, доктор хабилитат
физико-математических наук,
профессор университар;
Н. И. Вулпе, доктор хабилитат
физико-математических наук,
профессор университар.

Ответственный редактор: **А. И Герко**,
доктор физико-математических наук,
конференциар университар.

Давид Николаевич ЧЕБАН

Асимптотически почти периодические
решения дифференциальных уравнений

Подписано в печать 30.01.02
Формат 60 $\times$ 84 1/16.
Печ. л. 24,0. Уч.-изд. л. 21,0.
Заказ 51(16/02). Тираж 50+50

Издательский Центр
Молдавского государственного университета.
MD 2009, Кишинев, ул. Матеевича, 60.