Д.Н.Чебан

Глобальные аттракторы неавтономных динамических систем

Молдавский государственный университет

**Кафедра математического анализа и
дифференциальных уравнений**

Д.Н.Чебан

Глобальные аттракторы неавтономных динамических систем

Утверждено Советом
факультета математики
и информатики

Кишинев-2002
Издательский центр
Молдавского госуниверситета

CZU 517.938
C33

Рекомендовано кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений

Рецензенты: **Б. А. Щербаков**, доктор хабилитат
физико-математических наук,
профессор университар;
Н. И. Вулпе, доктор хабилитат
физико-математических наук,
профессор университар.

Ответственный редактор: **А. И Герко**,
доктор физико-математических наук,
конференциар университар.

Книга посвящена изучению динамических систем (как автономных, так и неавтономных), допускающих компактный глобальный аттрактор. Аттракторы описывают поведение динамической системы на бесконечности. Их изучение занимает важное место в современной качественной теории дифференциальных уравнений. Вводятся и изучаются различные типы диссипативности и притягиваемости и устанавливаются связи между ними. Даются приложения полученных результатов к различным классам дифференциальных уравнений.

Монография предназначена для специалистов по теории дифференциальных уравнений, динамических систем и их приложений, а также преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii
Чебан Д.Н.
Глобальные аттракторы неавтономных динамических систем/ Д.Н.Чебан; Молд. гос. ун-т. Кафедра математ. анализа и дифференц. уравнений. – Ch.: Centrul ed.-poligr. al USM, 2002. – 387 p.
ISBN 9975-70-094-2
100 ex.
517.938

Оглавление

Введение [1]

В качественной теории дифференциальных уравнений важную роль играют нелокальные проблемы. К ним относятся вопросы ограниченности, периодичности, почти периодичности, устойчивости по Пуассону, вопросы существования различного рода предельных режимов, конвергентность, диссипативность и т.д. Этому направлению принадлежит и настоящая работа, которая посвящена изучению абстрактных неавтономных диссипативных динамических систем и приложению таких систем к дифференциальным уравнениям.

В приложениях часто встречаются системы

$$u' = f(t, u), \tag{1}$$

у которых из-за естественной диссипации каждое решение в некоторый момент времени попадает в фиксированную ограниченную область и в ней остается при дальнейшем возрастании времени. Такие системы называются диссипативными [**30**]-[**32**],[**79**]-[**81**],[**266**], [**267**] и возникают они в гидродинамике при изучении явления турбулентности, в теории колебаний, биологии, радиотехнике и других областях науки и техники в связи с изучением различных предельных режимов. В последнее время интерес к диссипативным системам еще больше возрос в связи с интенсивной разработкой странных аттракторов (см., например, [**62**],[**85**], [**145**],[**197**]).

Изучению диссипативных систем, начиная с классических работ Н. Левинсона, посвящено большое число работ. Среди них можно условно выделить два направления.

[1]Настоящая работа написана при частичной финансовой поддержке Молдавской Ассоциации Поддержки Исследований и Американского Фонда Поддержки Исследований и Развития для Государств Бывшего Советского Союза (грант No. MM1-3016).

Первому направлению принадлежат работы, в которых содержатся те или иные условия, обеспечивающие диссипативность системы (1), какого-то класса или конкретной системы (квазилинейные системы, монотонные, квазиоднородные, $\mathbb{C}$-аналитические системы и т.д.), представляющей теоретический или прикладной интерес. Отметим здесь работы П. В. Атрашенока [**5**], Б. П. Демидовича [**30**]-[**32**], В. И. Зубова [**38**]-[**40**], В. М. Матросова [**66**], В. В. Немыцкого [**73**]-[**74**], В. А. Плисса [**79**], В. Н. Щенникова [**150**],[**151**], К. Кордуняну [**187**], Н. Левинсона [**232**], Н. Павел [**243**]-[**245**], Р. Рейсига [**81**], Т. Талпалару [**257**] и многих других авторов.

Ко второму направлению относятся те работы, в которых изучаются внутренние свойства диссипативных систем, т.е. свойства, связанные с характером поведения решений системы в предположении ее диссипативности. Этому кругу вопросов посвящены работы В. М. Герштейна [**23**]-[**27**], В. В. Жикова [**33**]-[**34**], И. Л. Зинченко [**36**], М. А. Красносельского [**23**], С. Ю. Пилюгина [**78**], В. А. Плисса [**79**]-[**80**], М. Л. Картрайта и Дж. Е. Литлвуда [**167**]-[**169**], Н. Левинсона [**232**], Дж. Фуско и М. Олива [**202**], Ж. Сковронского и С. Зембы [**256**] и других авторов.

Многие важные результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений [**79**]-[**80**] в работах Дж. Биллоти, Дж. Купермана, Дж. ЛаСалля, О. Лопеса, П. Массата, М. Слемрода, Дж. Хейла [**96**],[**162**],
[**186**], [**207**]-[**213**],[**231**],[**236**]-[**238**] и других авторов обобщены на функционально-дифференциальные уравнения.

Работы А. В. Бабина и М. И. Вишика [**6**]-[**9**],[**159**], Ю. С. Ильяшенко [**43**]-[**46**], О. А. Ладыженской [**56**]-[**60**], Р. Темам [**260**], И. Д. Чуешова [**143**], А. Н. Шарковского [**145**] и других авторов посвящены эволюционным уравнениям с частными производными, допускающие максимальный компактный аттрактор (диссипативные эволюционные уравнения).

Следует отметить, что во всех упомянутых выше работах за редким исключением изучаются периодические или автономные системы. Эти результаты отражены в монографиях [**79**]-[**81**],[**260**],[**96**],[**145**].

Если правая часть f уравнения (1) непериодична, например, квазипериодична (почти периодична по Бору, рекуррентна в смысле Биркгофа, почти периодична по Левитану, устойчива по Пуассону) или более сложным образом зависти от времени, то ситуация здесь значительно усложняется (уже в классе почти периодических систем). Это обусловлено по крайней мере двумя причинами.

Во-первых, определение диссипативности в неавтономном случае необходимо уточнить, т.к. определение Левинсона в классе непериодических систем расщепляется на несколько неэквивалентных друг другу определений и необходимо выбрать то из них, которое позволяет построить достаточно содержательную теорию, которая содержала бы в качестве частного случая наиболее существенные результаты, полученные для периодических диссипативных систем.

Во-вторых, при изучении периодических диссипативных систем важную роль играет дискретная динамическая система (каскад), порожденная степенями преобразования Пуанкаре. Для непериодических систем, как известно, нет преобразования Пуанкаре и, следовательно, техника, созданная для исследования периодических диссипативных систем, непригодна в более общей ситуации. Поэтому для изучения непериодических диссипативных систем нужны новые идеи, т.е. построение теории неавтономных диссипативных динамических систем требует и построения соответствующих методов исследования.

Наш подход к изучению диссипативных систем дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы привлечь к изучению неавтономных диссипативных систем идеи и методы, развитые в теории абстрактных динамических систем. При этом выделяется класс динамических систем, которые в работе называются диссипативными, моделирующих свойства диссипативных дифференциальных уравнений. Выделенный класс динамических систем подвергается систематическому исследованию, затем полученные общие результаты применяются при изучении диссипатвных дифференциальных и некоторых других классов уравнений.

Идея применения методов теории динамических систем к изучению неавтономных дифференциальных уравнений сама по себе не нова. Она уже более двух десятилетий успешно применяется для решения различных задач в теории линейных и нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Впервые такой подход к неавтономным дифференциальным уравнениям был применен в работах В. М. Миллионщикова [**67**]-[**69**], Б. А. Щербакова [**152**],[**154**], Л. Г. Дейсача и Дж. Селла [**195**], Р. К. Миллера [**239**], Дж. Сейферта [**249**], Дж. Селла [**250**]-[**251**], позднее в работах В. В. Жикова [**33**], И. У. Бронштейна [**15**], а затем и многих других авторов. Этот подход состоит в том, что с каждым уравнением (1) естественным образом связывается пара динамических систем и гомоморфизм первой на вторую. При этом в одну динамическую систему, грубо говоря, закладывается информация о правой части уравнения (1), а во вторую – информация о решениях уравнения (1).

Следует отметить, что существует и другой подход к изучению неавтономных дифференциальных уравнений, предложенный в работах В. И. Зубова [**38**], а затем развитый в работах С. М. Дафермоса [**190**]-[**193**], Дж. Хейла [**96**], И. Хитоши [**219**] и многих других авторов (подробнее об этом см. обзор [**149**]). Он состоит в том, что с каждым неавтономным дифференциальным уравнением связывается двухпараметрическое семейство отображений (по терминологии некоторых авторов – процесс).

В начале оба эти подхода развивались независимо, однако позднее была установлена связь между ними (см., например, [**192**],[**241**]).

Автор придерживается первого подхода к изучению неавтономных дифференциальных уравнений. Этот подход на наш взгляд лучше приспособлен к решению тех задач, которые изучаются в настоящей работе.

В последние годы появились ряд работ (см. например [**183**], [**184**],[**196**],[**198**],[**203**], [**217**],[**240**],[**247**],[**248**],[**253**],[**264**], а также ссылки в них) посвященных изучению компактных глобальных аттракторов неавтономных дифференциальных уравнений в частных производных, а также оттягивающих назад (pullback) аттракторов стохастических динамических систем (см. [**156**],[**166**],[**188**],[**189**], [**200**], а также библиографию в них).

Предлагаемая работа состоит из шести глав.

В первой главе для автономных динамических систем вводятся и изучаются различные типы диссипативности: поточечная, компактная и локальная. Приводятся критерии поточечной, компактной и локальной диссипативности. Показано, что для динамических систем в локально компактных пространствах все три типа диссипативности эквивалентны. Приводятся примеры, показывающие, что в общем случае понятия поточечной, компактной и локальной диссипативности различны. Вводится понятие центра Левинсона, являющееся важной характеристикой компактно диссипативной динамической системы. Дается решение одной проблемы Дж.Хейла для локально ограниченных динамических систем. Устанавливаются некоторые топологические свойства центра Левинсона компактно диссипативной динамической системы.В частности, показано, что центр Левинсона является неразложимым, если таковым является фазовое пространство динамической системы. Доказано, что в связном локально связном пространстве центр Левинсона компактно диссипативной динамической системы как с непрерывным, так и с дискретным временем, является связным множеством.

Вторая глава посвящена неавтономным диссипативным динамическим систе мам. Отмечено, что в общем случае центр Левинсона неавтономной диссипативной динамической системы не является орбитально устойчивым. Изучается вопрос об устойчивости центра Левинсона неавтономной диссипативной системы. Приводится простое геометрическое условие, гарантирующее устойчивость центр Левинсона. Дается описание центра Левинсона неавтономной системы, удовлетворяющей условию равномерной положительной устойчивости. Указываются условия, при которых свойство диссипативности сохраняется при гомоморфизмах. Выделяется класс динамических систем, допускающих полное описание структуры центра Левинсона, названных в работе системами с конвергенцией. Приводятся некоторые признаки конвергентности абстрактных неавтономных динамических систем. Приводится ряд условий, эквивалентных диссипативности в конечномерном пространстве. Наконец, для линейных систем доказано, что диссипативность сводится к конвергенции и приводится ряд условий, эквивалентных диссипативности.

В третьей главе изучается главным образом один специальный класс неавтономных диссипативных динамических систем, названных в работе $\mathbb{C}$-аналитическими. Доказано, что $\mathbb{C}$-аналитическая диссипативная динамическая система обладает свойством равномерной положительной устойчивости на компактах. Дается полное описание структуры центра Левинсона этих систем. Приводится одна общая конструкция, позволяющая естественным образом связать с заданной неавтономной динамической системой некоторую автономную динамическую систему в пространстве непрерывных сечений. С помощью этой конструкции изучаются квазипериодические решения $\mathbb{C}$-аналитических диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами. В заключение приводятся условия, обеспечивающие диссипативность слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений, а также приводится признак, гарантирующий наличие в центре Левинсона слабо нелинейной системы с почти периодическими коэффициентами почти периодического решения .

Четвертая глава посвящена изучению структуры центра Левинсона с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. Устанавливаются некоторые свойства множества цепно рекуррентных движений диссипативной системы. Доказана теорема о спектральном разложении центра Левинсона, аналогичная известной теореме С. Смейла. Для одномерных диссипативных динамических систем устанавливается теорема, уточняющая теорему о спектральном разложении центра Левинсона и, в частности, показано, что центр Левинсона таких систем содержит локально максимальное гиперболическое марковское множество. В конце этой главы даются приложения полученных результатов к периодическим системам.

В пятой главе развивается метод функций Ляпунова для исследования неавтономных диссипативных динамических систем. Приводятся некоторые критерии диссипативности в терминах функций Ляпунова, с помощью которых удается получить достаточные признаки диссипативности, удобные в приложениях. Доказывается ряд признаков диссипативности многомерных неавтономных дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. На основе развитых для исследования неавтономных диссипативных систем методов удается получить критерий асимптотической устойчивости нулевого сечения неавтономных систем. В частности, для неавтономных динамических систем доказывается аналог известной теоремы Барбашина–Красовского. Устанавливаются некоторые признаки конвергентности систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова, зависящих от двух пространственных переменных. Доказываются признаки диссипативности и конвергентности некоторых систем дифференциальных уравнений 2-ого и 3-его порядков, встречающихся в приложениях.

Шестая глава посвящена некоторым приложениям общих результатов, полученных в предыдущих главах, к разностным уравнениям, к уравнениям с импульсами, к функционально-дифференциальным уравнениям и к эволюционным уравнениям $x' + Ax = f$ с равномерно монотонным оператором A. В частности, приводятся признаки диссипативности и конвергентности слабо нелинейных систем разностных уравнений и уравнений с импульсами. Доказывается критерий асимптотической устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений. Устанавливается признак конвергентности эволюционного уравнения $x' + Ax = f$ с равномерно монотонным оператором A.

В седьмой главе для неавтономных динамических систем с малым параметром изучается зависимость глобальных аттракторов от параметра. Устанавливается связность и покомпонентная связность оттягивающих назад аттракторов. Приводится ряд признаков полунепрерывной сверху зависимости от параметра глобальных аттракторов абстрактных неавтономных динамических систем и даются приложения этих результатов к некоторым классам неавтономных эволюционных уравнений как-то: квазиоднородные, монотонные, квазилинейные системы и двумерные уравнения Навье-Стокса.

Приводимые в работе результаты принадлежат в основном автору и опубликованы в его работах (см. библиографию), а часть из них (параграфы 1.10, 5.6, 5.7, 5.8, 6.6 и глава 7) публикуется здесь впервые.

В книге для лучшего структурирования материала и подчеркивания мест той или иной степени важности мы выделяем не только леммы и теоремы, но и большое количество следствий, замечаний и примеров. Все они нумеруются тремя цифрами, первая из которых указывает номер главы, вторая - номер параграфа, а третья - номер, теоремы, леммы и т.д. в данном параграфе. Таким же образом нумеруются и формулы.

Основные результаты книги входили в специальные курсы, которые автор читал в течении ряда лет студентам Молдавского государственного университета.

Автор надеется, что предлагаемая книга будет полезна как начинающим, так и более опытным математикам, интересующимся динамическими системами и их приложениями.

Обозначения

В работе употребляются следующие обозначения:

$\forall$	для любого;
$\exists$	существует;
$:=$	равно (совпадает) по определению;
0	число ноль, а также нулевой элемент всякой аддитивной группы (полугруппы);
$\mathbb{N}$	множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$	множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$	множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$	множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$	множество всех комплексных чисел;
$\mathbb{S}$	одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$;
$\mathbb{S}_+(\mathbb{S}_-)$	множество всех неотрицательных (неположительных) чисел из $\mathbb{S}$;
$X \times Y$	декартово произведение двух множеств;
M^n	прямое произведение n экземпляров множества M;
E^n	вещественное или комплексное n-мерное евклидово пространство;
$\{x_n\}$	последовательность;
$x \in X$	есть элемент множества X;
∂X	граница множества X;
$X \subseteq Y$	множество X составляет часть или совпадает с множеством Y;
$X \bigcup Y$	объединение множеств X и Y;
$X \setminus Y$	дополнение множества Y в X;
$X \bigcap Y$	пересечение множеств X и Y;
$\emptyset$	пустое множество;
(X, ρ)	полное метрическое пространство с метрикой ρ;

2^X	пространство всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X, наделенное метрикой Хаусдорфа;
$\overline{M}$	замыкание множества M;
f^{-1}	отображение, обратное к f;
$f(M)$	образ множества $M \subseteq X$ при отображении $f : X \to Y$, т.е. $\{y \in Y : y = f(x), x \in M\}$;
$f \circ g$	композиция отображений f и g, т.е. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$;
$f\|_M$	сужение отображения f на множество M;
$f(\cdot, x)$	частное отображение, задаваемое функцией x при значении x второго аргумента;
Id_X	тождественное отображение X в X;
$Im(f)$	область значений функции f;
$D(f)$	область определения функции f;
$\|x\|$ или $\|\|x\|\|$	норма элемента x;
(x, y)	упорядоченная пара;
$C(X, Y)$	множество всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, наделен–ное открыто-компактной топологией;
$C^k(U, M)$	множество всех k-раз непрерывно диф–ференцируемых отображений многообразия U в многообразие M;
$f : X \to Y$	отображение X в Y;
$B(M, \varepsilon)$	открытая ε-окрестность множества M в метрическом пространстве X;
$B[M, \varepsilon]$	замкнутая ε-окрестность множества M в метрическом пространстве X;
$\{x, y, ..., z\}$	множество, состоящее из $x, y, ..., z$;
$\overline{1, n}$	множество, состоящее из $1, 2, ..., n$;
$\{x \in X \mid \mathbb{R}(x)\}$	множество всех элементов из X, обладающих свойством $\mathbb{R}$;
$f^{-1}(M)$	прообраз множества $M \subseteq Y$ при отображении $f : X \to Y$, т.е. $\{x \in X : f(x) \in M\}$;
$F(t, \cdot) := f^t$	частное отображение, задаваемое функцией f при значении t первого аргумента;

$\rho(\xi, \eta)$	расстояние в метрическом пространстве X;
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$	предел последовательности;
$\varepsilon_k \downarrow 0$	монотонно убывающая к 0 последовательность;
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	предел отображения f при $x \to a$;
$\bigcup\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$	объединение семейства множеств $\{M_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$;
$\bigcap\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$	пересечение семейства множеств $\{M_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$;
$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$	гильбертово пространсво со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$;
$cardM$	мощность множества M;
$C(X)$	семейство всех компактов из X;
$B(X)$	семейство всех ограниченных подмножеств из X;
$\lambda(A)$	мера некомпактности множества $A \in B(X)$;
$(X, \mathbb{T}, \pi)$	динамическя система;
(X, P)	каскад, порожденный положительными степенями P;
$\omega_x(\alpha_x)$	$\omega(\alpha)$-предельное множество точки x;
α_{φ_x}	α-предельное множество целой траектории $\varphi_x \in \Phi_x$;
Φ_x	множество всех целых траекторий динами–ческой системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, выходящих из точки x при $t = 0$.
$W^s(M)$	устойчивое многообразие (область притяжения) множества M;
M уст. L^+	множество M устойчиво по Лагранжу в положительном направлении;
D_x^+ (J_x^+)	положительное (положительное предельное) продолжение точки x;

$xt = \pi^t x = \pi(t, x)$	положение точки x в момент времени t;
$pr_i : X_1 \times X_2 \to X_i$	проекция $X_1 \times X_2$ на i-ую ($i = 1, 2$) компоненту X_i;
$D^+(M) = \bigcup\{D_x^+ \vert x \in M\}$	положительное продолжение множества M;
$J^+(M) = \bigcup\{J_x^+ \vert x \in M\}$	положительное предельное продолжение множества M;
$\Sigma_x^+ := \{xt \mid t \in \mathbb{S}_+\}$	положительная полутректория точки x;
$\Sigma^+(M) := \cup\{\Sigma_x \mid x \in M\}$	положительная полутраектория множества M;
$H^+(x) := \overline{\Sigma_x^+}$	замыкание положительной полутраектории точки x;
$\Sigma_x := \{xt \mid t \in \mathbb{S}\}$	траектория точки x;
$H(x) := \overline{\Sigma_x}$	замыкание траектории точки x;
$\Omega := \overline{\cup\{\omega_x \mid x \in X\}}$	замыкание объединения всех ω - предельных точек $(X, \mathbb{T}, \pi)$;
$\beta(A, B)$	полуотклонение множества A от множества B ($A, B \in 2^X$);
$\alpha(A, B)$	метрика Хаусдорфа ($A, B \in 2^X$).

Глава 1

Автономные диссипативные динамические системы

1.1. Некоторые понятия, обозначения и факты

1. Ниже приводятся некоторые понятия, обозначения и факты из теории динамических систем [**15**],[**17**],[**72**],[**75**], [**86**], [**152**],[**154**], которыми мы будем пользоваться в этой книге.

Пусть X - топологическое пространство, $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$) - группа действительных (целых) чисел, $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{Z}_+$) - полугруппа неотрицательных действительных (целых) чисел и $\mathbb{S}$ одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}$ ($\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}$) - подполугруппа аддитивной группы $\mathbb{S}$.

Тройку $(X, \mathbb{T}, \pi)$, где $\pi : \mathbb{T} \times X \to X$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:

$$\pi(0, x) = x; \tag{1.1.1}$$

$$\pi(s, \pi(t, x)) = \pi(t + s, x); \tag{1.1.2}$$

называют динамической системой. При этом, если $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$) или $\mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}$), то система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется полугрупповой (групповой). В случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$ динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется потоком, а если $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$, то $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется каскадом. Иногда, для краткости, будем писать вместо $\pi(t, x)$ просто xt.

В дальнейшем X полное метрическое пространство с метрикой ρ.

Функцию $\pi(\cdot, x) : \mathbb{T} \to X$ при фиксированном $x \in X$ называют движением, а множество $\Sigma_x := \pi(\mathbb{T}, x)$ траекторией этого движения.

Непустое множество $M \subseteq X$ называют полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным) по отношению к данной динамической системе $(X, \mathbb{T}, \pi)$ или, просто, полуинвариантным (квазиинвариантным, инвариантным), если $\pi(t, M) \subseteq M$ $(M \supseteq \pi(t, M), \pi(t, M) = M)$ при каждом $t \in \mathbb{T}$.

Отметим, что введенные понятия инвариантности различны для полугрупповых систем и эквивалентны для групповых систем.

Замкнутое полуинвариантное множество, не содержащее собственного подмножества, являющегося замкнутым и полуинвариантным, называется минимальным.

Легко заметить, что всякое полуинвариантное минимальное множество инвариантно.

Замкнутое полуинвариантное (инвариантное) множество называют неразложимым, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых полуинвариантных (инвариантных) подмножеств.

Пусть $M \subseteq X$. Множество

$$\omega(M) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \pi(\tau, M)}$$

называют ω - предельным для M. Если $\mathbb{T} = \mathbb{S}$, то множество

$$\alpha(M) := \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{\tau \leq t} \pi(\tau, M)}$$

называют α предельным для M.

Положим $\Sigma(M) := \pi(\mathbb{S}, M)$ $(\Sigma^+(M) := \pi(\mathbb{S}_+, M))$ и $H(M) := \overline{\pi(\mathbb{S}, M)}$ $(H^+(M) := \overline{\pi(\mathbb{S}_+, M)})$. Если $M = \{x\}$, то пологают $\omega_x := \omega(\{x\})$, $\alpha_x := \alpha(\{x\})$, $\Sigma_x^+ := \Sigma^+(\{x\})$, $H^+(x) := H^+(\{x\})$ и $H(x) := H(\{x\})$.

Точку x называют точкой покоя, если $xt = x$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и τ периодической, если $x\tau = x$ $(\tau > 0, \tau \in \mathbb{T})$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\tau \in \mathbb{T}$ называют ε смещением (почти периодом) точки x, если $\rho(x\tau, x) < \varepsilon$ $(\rho(x(t+\tau), xt) < \varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{T})$. Точка $x \in X$ называется почти рекуррентной (почти периодической), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l > 0$ такое, что на любом отрезке длины l, найдется ε - смещение (почти период) точки x.

Если точка $x \in X$ почти рекуррентна и множество $H(x)$ компактно, то x называют рекуррентной.

Говорят, что точка $x \in X$ устойчива по Пуассону в положительном направлении, если $x \in \omega_x$. Если система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ групповая и $x \in \alpha_x$, то говорят, что x устойчива по Пуассону в отрицательном направлении. И, наконец, если x устойчива по Пуассону в обоих направлениях, то говорят, что x устойчива по Пуассону.

Говорят, что движение $\pi(\cdot, x) : \mathbb{T}_{\nVdash} \to X$ полугрупповой динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ продолжаемо на $\mathbb{S}$, если существует целая траектория φ (т.е. непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \to X$ такое, что $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $s \in \mathbb{S}$) такая, что $\varphi(0) = x$. При этом через α_{φ_x} обозначим $\{y : \exists t_n \to -\infty,\ t_n \in \mathbb{S}$ и $\varphi(t_n) \to y\}$, где φ - продолжение на $\mathbb{S}$ движение $\pi(\cdot, x)$.

Через $W^s(\Lambda)$ $(W^u(\Lambda))$ обозначают множество, определяемое равенством

$$W^s(\Lambda) := \{x \in X | \lim_{t \to +\infty} \rho(xt, \Lambda) = 0\}$$

$$(W^u(\Lambda) := \{x \in X | \lim_{t \to -\infty} \rho(xt, \Lambda) = 0\}),$$

и называют устойчивым (неустойчивым) многообразием множества $\Lambda \subseteq X$.

Множество M называют:

- орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, M) < \delta$ влечет $\rho(xt, M) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;
- притягивающим, если существует $\gamma > 0$ такое, что $B(M, \gamma) \subset W^s(M)$;
- асимптотически устойчивым, если оно орбитально устойчиво и является притягивающим;
- асимптотически устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво и $W^s(M) = X$;
- равномерно притягивающим, если существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in B(M, \gamma)} \rho(xt, M) = 0. \tag{1.1.3}$$

Теорема 1.1.1. **[87]** *Пусть $M \subseteq X$ непустое компактное инвариантное множество, тогда каждое движение в M продолжаемо на $\mathbb{S}$.*

Теорема 1.1.2. [**87**] *Для того чтобы компактное множество $M \subseteq X$ было квазиинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in M$ существовала целая траектория φ, проходящая через точку $x \in M$, такая что $\varphi(t) \in M$ при всех $t \leq 0$.*

Теорема 1.1.3. [**87**] *Объединение и замыкание полуинвариантных (квазиинвариантных, инвариантных) множеств полуинвариантно (квазиинвариантно, инвариантно).*

Теорема 1.1.4. [**87**] *Имеют место следующие утверждения:*

(1) $\forall\, x \in X$ ω_x *полуинвариантно;*
(2) $\forall\, x \in X$ *и* $\varphi \in \Phi_x$ α_{φ_x} *полуинвариантно.*

2. В этом пункте указывается один общий способ построения динамических систем в пространстве непрерывных функций. Указанным способом получаются многие известные динамические системы в функциональных пространствах (см., например, [**15**],[**152**]).

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - динамическая система на X, Y - полное псевдометрическое пространство и $\mathcal{P}$ - комплект псевдометрик на Y. Через $C(X,Y)$ обозначим семейство всех непрерывных функций $f : X \to Y$, наделенное открыто-компактной топологией. Эта топология задается следующим семейство псевдометрик $\{d_K^p\}$ $(p \in \mathcal{P},\ \ K \in C(X))$, где

$$d_K^p(f,g) := \sup_{x \in K} p(f(x), g(x))$$

и $C(X)$ - семейство всех компактных подмножеств X. Определим при каждом $\tau \in \mathbb{T}$ отображение $\sigma_\tau : C(X,Y) \to C(X,Y)$ по следующему правилу $(\sigma_\tau f)(x) := f(\pi(\tau, x))$ $(x \in X)$. Отметим следующие свойства отображений $\{\sigma_\tau : \tau \in \mathbb{T}\}$:

a. $\sigma_0 = id_{C(X,Y)}$;
b. $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$ $\sigma_{\tau_1} \circ \sigma_{\tau_2} = \sigma_{\tau_1 + \tau_2}$;
c. $\forall \tau \in \mathbb{T}$ σ_τ - непрерывно.

Лемма 1.1.5. *Отображение $\sigma : \mathbb{T} \times C(X,Y) \to C(X,Y)$, определенное равенством $\sigma(\tau, f) = \sigma_\tau f$ $(f \in C(X,Y),\ \tau \in \mathbb{T})$, непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f \in C(X,Y)$, $\tau \in \mathbb{T}$ и $\{f_\nu\}, \{\tau_\nu\}$ - произвольные направленности сходящиеся к f и τ соответственно. Тогда

$$d_K^p(\sigma(\tau_\nu, f_\nu), \sigma(\tau, f)) = \sup_{x\in K} p(\sigma(\tau_\nu, f_\nu)(x),\, \sigma(\tau, f)(x)) =$$

$$\sup_{x\in K} p((f_\nu(\pi(\tau_\nu, x)),\, f(\pi(\tau, x))) : x \in K\} \leq$$

$$\sup_{x\in K} p(f_\nu(\pi(\tau_\nu, x)),\, f(\pi(\tau_\nu, x))) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)),\, f(\pi(\tau, x))) \leq$$

$$\sup_{x\in K,\ s\in Q} p(f_\nu(\pi(s, x)),\, f(\pi(s, x))) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)),\, f(\pi(\tau, x)))$$

$$\leq \sup_{m\in\pi(Q,K)} p(f_\nu(m), f(m)) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)),\, f(\pi(\tau, x))) =$$

$$d^p_{\pi(Q,K)}(f_\nu, f) + \sup_{x\in K} p(f(\pi(\tau_\nu, x)),\, f(\pi(\tau, x))), \tag{1.1.4}$$

где $Q = \overline{\{\tau_\nu\}}$. Переходя к пределу в неравенстве (1.1.4) получим требуемое утверждение.

Следствие 1.1.6. *Тройка $(C(X,Y), \mathbb{T}, \sigma)$ есть динамическая система на $C(X,Y)$.*

Замечание 1.1.7. *Лемма 1.1.5 имеет место и в том случае, когда X есть произвольное топологическое хаусдорфово пространство.*

Рассмотрим некоторые примеры динамических систем вида $(C(X, Y), \mathbb{T}, \sigma)$, встречающихся в приложениях.

Пример 1.1.8. Положим $X = \mathbb{T}$ и через $(X, \mathbb{T}, \pi)$ обозначим динамическую систему на $\mathbb{T}$, где $\pi(t, x) := x + t$. Динамическая система $(C(\mathbb{T}, Y), \mathbb{T}, \sigma)$ называется системой Бебутова [**152**] (динамическая система сдвигов). Динамическая система Бебутова является удобным средством исследования общих свойств непрерывных функций.

Будем говорить, что функция $\varphi \in C(\mathbb{T}, Y)$ обладает свойством A, если этим свойством обладает движение $\sigma(\cdot, \varphi) : \mathbb{T} \to C(\mathbb{T}, Y)$ в динамической системе Бебутова $(C(\mathbb{T}, Y), \mathbb{T}, \sigma)$, порожденное функцией φ. В качестве свойства A может быть периодичность, почти периодичность, рекуррентность, асимптотическая почти периодичность и. т. д.

Пример 1.1.9. Положим $X := \mathbb{T} \times W$, где W - некоторое метрическое пространство, и через $(X, \mathbb{T}, \pi)$ обозначим динамическую систему на X определенную по следующему правилу: $\pi(t, (s, w)) := (s + t, w)$. Приведенная выше конструкция позволяет естественным образом определить на $C(\mathbb{T} \times W, Y)$ динамическую систему сдвигов $(C(\mathbb{T} \times W, Y), \mathbb{T}, \sigma)$.

Будем говорить, что функция $f \in C(\mathbb{T} \times W, Y)$ почти периодична (рекуррентна и т.д.) по переменной $t \in \mathbb{T}$ равномерно по w на компактах из W, если движение $\sigma(\cdot, f)$ почти периодично (рекуррентно и т.д.) в динамической системе $(C(\mathbb{T} \times W, Y), \mathbb{T}, \sigma)$.

Пример 1.1.10. Пусть $W := \mathbb{C}^n$, $Y := \mathbb{C}^m$ и $A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ - множество всех функций $f \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, голоморфных по второму аргументу. Нетрудно проверить, что множество $A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ является замкнутым инвариантным подмножеством динамической системы $(C(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), \mathbb{T}, \sigma)$ и, следовательно, на $A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ индуцируется динамическая система сдвигов $(A(\mathbb{T} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), \mathbb{T}, \sigma)$.

Пример 1.1.11. Пусть W и X полные псевдометрические пространства [**50**]. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ - множество всех непрерывных функций $f : \mathbb{T} \times W \to X$, ограниченных на ограниченных множествах из $\mathbb{T} \times W$ и непрерывных по $t \in \mathbb{T}$ равномерно по w на ограниченных множествах из W, снабженное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из $\mathbb{T} \times W$. Эту топологию можно задать при помощи следующего семейства псевдометрик $\{d_B^p\}$ $(p \in \mathcal{P},\ B \in B(\mathbb{T} \times W))$, где

$$d_B^p(f, g) = \sup_{(t,w) \in B} p(f(t, w), g(t, w)), \tag{1.1.5}$$

$\mathcal{B}(\mathbb{T} \times W)$ семейство всех ограниченных подмножеств $\mathbb{T} \times W$ и $\mathcal{P}$ - комплект псевдометрик на X. Отметим, что множество $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$, наделенное комплектом псевдометрик $\{d_B^p | p \in \mathcal{P},\ B \in B(\mathbb{T} \times W)\}$ превращается в полное псевдометрическое пространство, инвариантное относительно сдвигов по $t \in \mathbb{T}$. При каждом $\tau \in \mathbb{T}$ обозначим через f_τ сдвиг функции $f \in \mathbb{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ на τ по переменной $t \in \mathbb{T}$, т.е.

$f_\tau(t,w) = f(t+\tau,w)$ ($(t,w) \in \mathbb{T} \times W$). Определим отображение $\sigma : \mathbb{T} \times \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X) \to \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ по следующему правилу: $\sigma(\tau, f) := f_\tau$ при всех $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Легко проверить, что $\sigma(0,f) = f$ и $\sigma(\tau_2, \sigma(\tau_1, f)) = \sigma(\tau_1 + \tau_2, f)$ при всех $f \in \mathbb{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ и $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$. Также как и в лемме 1.1.5 проверяется непрерывность отображения σ и, следовательно, тройка $(\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X), \mathbb{T}, \sigma)$ является динамической системой на $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$.

Замечание 1.1.12. *Если функция $f \in C(\mathbb{T} \times W, X)$ равномерно непрерывна на любом ограниченном подмножестве из $\mathbb{T} \times W$, то $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$. Обозначим через $U(\mathbb{T} \times W, X)$ множество всех функций $f \in C(\mathbb{T} \times W, X)$ равномерно непрерывных на ограниченных подмножествах из $\mathbb{T} \times W$. Тогда $U(\mathbb{T} \times W, X)$ инвариантно относительно сдвигов по $t \in \mathbb{T}$ и замкнуто в $\mathcal{P}(\mathbb{T} \times W, X)$ и, следовательно, на $U(\mathbb{T} \times W, X)$ индицируется динамическая система сдвигов $(U(\mathbb{T} \times W, X), \mathbb{T}, \sigma)$ (см., например,* [**15**],[**152**] *и* [**154**]*).*

Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ $(\mathbb{S}_+ \subseteq \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \subseteq \mathbb{S})$ две динамические системы. Отображение $h : X \to Y$ называется гомоморфизмом (соответственно изоморфизмом) динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, если отображение h непрерывно (соответственно гомеоморфно) и $h(\pi(x,t)) = \sigma(h(x),t)$ ($t \in \mathbb{T}_1,\ x \in X$). При этом говорят, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ есть расширение [1] динамической системы $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ при помощи гомоморфизма h, а $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ - фактор динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ при гомоморфизме h. Динамическую систему $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ называют также базой расширения $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Тройку $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$, где h - гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1\ , \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ и (X, h, Y) локально-тривиальное расслоение [**97**], будем называть неавтономной динамической системой.

---

[1] В последние годы в работах И.У.Бронштейна и его учеников (см. например [**15**],[**17**], [**18**],[**22**] и ссылки в них) расширением называют тройку $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, h), h \rangle$ т.е. то, что мы здесь называем неавтономной динамической системой.

Тройка $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$, где $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ – динамическая система на Y, W – полное метрическое пространство и φ – непрерывное отображение $\mathbb{T}_1 \times W \times Y$ в W, удовлетворяющее следующим условиям:

a. $\varphi(0, u, y) = u$ $(u \in W, y \in Y)$;
b. $\varphi(t + \tau, u, y) = \varphi(\tau, \varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$ $(t, \tau \in \mathbb{T}_1,\ u \in W, y \in Y)$,

называется [**156**], [**250**] – [**251**] коциклом над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W.

Положим $X := W \times Y$ и определим отображение $\pi : X \times \mathbb{T}_1 \to X$ правилом: $\pi((u, y), t) := (\varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$ (то есть $\pi = (\varphi, \sigma)$. Тогда легко проверить, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ – динамическая система на X, называемая косым произведением [**1**], [**252**], а $h = pr_2 : X \to Y$ – гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ и, следовательно, $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ есть неавтономная динамическая система.

Таким образом, если задан коцикл $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над динамической системой $(Y, \mathbb{T}_2,\ \sigma)$ со слоем W, то по нему естественным образом строится неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ $(X := W \times Y)$, которую назовем неавтономной динамической системой, ассоциированной коциклом $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$.

Неавтономные динамические системы (коциклы), как это уже отмечалось во введении, играют важную роль при изучении неавтономных эволюционных дифференциальных уравнений. При определенных условиях с данным неавтономным уравнением можно связать некоторый коцикл (неавтономную динамическую систему). Ниже приводится пример такого рода.

Пример 1.1.13. Пусть E^n – n-мерное вещественное или комплексное евклидово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u' = f(t, u), \tag{1.1.6}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$. Наряду с уравнением (3.1.1) рассмотрим и его H-класс [**15**],[**32**],[**61**], [**152**],[**154**], т.е. семейство уравнений

$$v' = g(t, v), \tag{1.1.7}$$

где $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ и $f_\tau(t,u) = f(t+\tau,u)$. В дальнейшем будем предполагать, что функция f регулярна, то есть для каждого уравнения (1.1.7) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $\varphi(\cdot,v,g)$ решение уравнения (1.1.7), проходящее через точку $v \in E^n$ при $t=0$. Тогда $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \to E^n$ и при этом выполнены следующие условия (см., например, [**15**],[**250**],[**251**]):

1) $\varphi(0,v,g) = v$ для любых $v \in E^n$ и $g \in H(f)$;
2) $\varphi(t,\varphi(\tau,v,g),g_\tau) = \varphi(t+\tau,v,g)$ для любых $v \in E^n$, $g \in H(f)$ и $t,\tau \in \mathbb{R}_+$;
3) $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \to E^n$ непрерывно.

Обозначим через $Y = H(f)$ и $(Y,\mathbb{R}_+,\sigma)$ - динамическую систему сдвигов (полугрупповую) на Y, индуцированную динамической системой сдвигов $(C(\mathbb{R} \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Тройка $\langle E^n, \varphi, (Y,\mathbb{R}_+,\sigma)\rangle$ является коциклом над $(Y,\mathbb{R}_+,\sigma)$ со слоем E^n. Следовательно, уравнение (1.1.6) естественно порождает коцикл $\langle E^n, \varphi, (Y,\mathbb{R}_+,\sigma)\rangle$ и неавтономную динамическую систему $\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi), (Y,\mathbb{R}_+,\sigma), h\rangle$, где $X := E^n \times Y$, $\pi = (\varphi,\sigma)$ и $h = pr_2 : X \to$.

1.2. Предельные свойства динамических систем

Пусть $M \subseteq X$ и $\omega(M)$ ω-предельное множество M. Непосредственно из определения $\omega(M)$ вытекает следующая

Лемма 1.2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *для того чтобы точка $y \in \omega(M)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательности $\{x_n\} \subseteq M$ и $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}$ такие, что $t_n \to +\infty$ и $y = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$;*
(2) *множество $\omega(M)$ замкнуто и полуинвариантно;*
(3) *если $A \subseteq B$, то $\omega(A) \subseteq \omega(B)$;*
(4) *$\omega(A \cup B) \subseteq \omega(A) \cup \omega(B)$ для любой пары подмножеств A и B из X;*
(5) *если множество A полуинвариантно (квазиинвариантно, инвариантно), то $\omega(A) \subseteq \overline{A}$ ($\overline{A} \subseteq \omega(A)$, $\omega(A)$ $\overline{A}$);*

(6) $\overline{\cup\{\omega_x \mid x \in M\}} \subseteq \omega(M)$;
(7) *если* $\Sigma^+(M)$ *относительно компактно, то* $\omega(M)$ *инвариантно.*

Лемма 1.2.2. *Пусть* $B \subseteq X$, *тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *каковы бы ни были* $\{x_k\} \subseteq B$ *и* $t_k \to +\infty$ *последовательность* $\{x_k t_k\}$ *относительно компактна;*
(2) (a) $\omega(B)$ *непусто и компактно;*
(b) $\omega(B)$ *инвариантно и имеет место равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in B} \rho(xt, \omega(B)) = 0; \tag{1.2.1}$$

(3) *существует непустой компакт* $K \subseteq X$ *такой, что*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in B} \rho(xt, K) = 0. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Покажем, что из 1. следует 2.. Пусть $\{x_k\} \subseteq B$ и $t_k \to +\infty$, тогда согласно 1. последовательность $\{x_k t_k\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k t_k$, тогда $\overline{x} \in \omega(B)$ и, следовательно, $\omega(B) \neq \emptyset$. Покажем, что $\omega(B)$ компактно. Пусть $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\{y_k\} \subseteq \omega(B)$, тогда существуют $x_k \in B$ и $t_k \geq k$ такие, что

$$\rho(x_k t_k, y_k) < \varepsilon_k \tag{1.2.3}$$

По условию 1. последовательность $\{x_k t_k\}$ относительно компактна и так как $\varepsilon_k \downarrow 0$, то и $\{y_k\}$ относительно компактна. Из определения $\omega(B)$ следует его полуинвариантность и, следовательно, для инвариантности $\omega(B)$ достаточно показать, что оно квазиинвариантно. Пусть $y \in \omega(B)$ и $t \in \mathbb{T}$, тогда существуют $\{x_k\} \subseteq B$ и $t_k \to +\infty$ такие, что $y = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k t_k = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k(t_k - t + t) = \lim\limits_{k\to+\infty} \pi^t(x_k(t_k - t))$. Так как $t_k - t \to +\infty$, то согласно 1. последовательность $\{x_k(t_k - t)\}$ можно считать сходящейся. Положим $y_t = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k(t_k - t)$, тогда $y = \pi^t y_t$ и $y_t \in \omega(B)$, т.е. $y \in \pi^t \omega(B)$. Таким образом инвариантность $\omega(B)$ доказана. Теперь покажем, что имеет место равенство (1.2.1). Если допустить, что (1.2.1) не имеет места, то найдутся

$\varepsilon_0 > 0$, $t_k \to +\infty$ и $x_k \in B$ такие, что

$$\rho(x_k t_k, \omega(B)) \geq \varepsilon_0. \tag{1.2.4}$$

Согласно условию 1. последовательность $\{x_k t_k\}$ можно считать сходящейся. Пусть $y = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k t_k$, тогда $y \in \omega(B)$. С другой стороны, переходя в (1.2.4) к пределу, когда $k \to +\infty$, получим $y \notin \omega(B)$. Полученное противоречие завершает доказательство импликации 1. $\Rightarrow$ 2.

Очевидно, из 2. следует 3., а из 3. следует 1. Лемма доказана.

Следствие 1.2.3. *Пусть $M \subseteq X$ непусто и $\Sigma^+(M)$ относительно компактно, тогда $\omega(M) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in M} \rho(xt, \omega(M)) = 0. \tag{1.2.5}$$

Имеет место и утверждение, обратное к следствию 1.2.3, но прежде, чем сформулировать его мы напомним понятие меры некомпактности.

Мерой некомпактности λ на X называют [**84**],[**96**], [**215**] отображение $\lambda : B(X) \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\lambda(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \in B(X)$ относительно компактно;

(2) $\lambda(A \cup B) = \max(\lambda(A), \lambda(B))$ для любых A, $B \in B(X)$.

Мера некомпактности Куратовского $\lambda : B(X) \to \mathbb{R}_+$ определяется равенством $\lambda(A) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A$ допускает конечное ε покрытие $\}$.

Лемма 1.2.4. *Пусть $M \subseteq X$ непусто и относительно компактно. Если множество $\omega(M)$ непусто, компактно и имеет место равенство (1.2.5), то $\Sigma^+(M)$ относительно компактно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда из равенства (1.2.5) следует существование положительного числа $L(\varepsilon)$ такого, что

$$M_\varepsilon := \bigcup_{t \geq L(\varepsilon)} \pi^t M \subseteq B(\omega(M), \varepsilon). \tag{1.2.6}$$

Обозначим через $\lambda(K)$ меру некомпактности Куратовского множества K. Из включения (1.2.6) следует, что

$$\lambda(\Sigma^+(M)) = \lambda(\pi(M,[0,L(\varepsilon)]) \cup M_\varepsilon) =$$

$$\max(\lambda(\pi(M,[0,L_\varepsilon]),\lambda(M_\varepsilon)) = \lambda(M_\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

Откуда получаем равенство $\lambda(\Sigma^+(M)) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 1.2.5. *Пусть $M \subseteq X$ непусто и относительно компактно. Для того чтобы множество $\Sigma^+(M)$ было относительно компактно, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:*

(1) $\omega(M) \neq \emptyset$;
(2) $\omega(M)$ *компактно;*
(3) *имеет место равенство (1.2.5).*

Сформулированное утверждение вытекает из следствия 1.2.3 и леммы 1.2.4.

1.3. Центр Левинсона

Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое семейство подмножеств из X. Динамическую систему $(X,\mathbb{T},\pi)$ назовем $\mathfrak{M}$ диссипативной, если для любых $\varepsilon > 0$ и $M \in \mathfrak{M}$ существует $L(\varepsilon, M) > 0$ такое, что $\pi^t M \subseteq B(K,\varepsilon)$ при всех $t \geq L(\varepsilon, M)$, где K некоторое фиксированное подмножество из X, зависящее только от $\mathfrak{M}$. При этом множество K назовем аттрактором для $\mathfrak{M}$.

Наиболее важными для приложений являются случаи, когда K ограничено или компактно и $\mathfrak{M} = \{\{x\} \mid x \in X\}$, либо $\mathfrak{M} = C(X)$, либо $\mathfrak{M} = \{B(x,\delta_x) \mid x \in X,\ \delta_x > 0\}$, либо $\mathfrak{M} = B(X)$.

Систему $(X,\mathbb{T},\pi)$ назовем:

– поточечно диссипативной, если существует $K \subseteq X$ такое, что при всех $x \in X$

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt,K) = 0; \tag{1.3.1}$$

– компактно диссипативной, если равенство (1.3.1) имеет место равномерно по x на компактах из X;

– локально диссипативной, если для любой точки $p \in X$ существует $\delta_p > 0$ такое, что равенство (1.3.1) имеет место равномерно по $x \in B(p, \delta_p)$;
– ограниченно диссипативной, если равенство (1.3.1) имеет место равномерно по x на каждом ограниченном подмножестве из X.

Как уже отмечалось выше, для приложений наибольший интерес представляют случаи когда K компактно или ограничено. В соответствии с этим систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем поточечно k (b)-диссипативной, если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна и множество K, фигурирующее в (1.3.1), компактно (ограничено). Аналогично определяются понятие компактно k (b)-диссипативной системы и другие типы k (b)-диссипативности.

Из приведенных выше определений следует, что ограниченная k (b)- диссипативность влечет локальную k (b)-диссипативность, локальная диссипативность влечет (см. лемму 1.3.1) компактную k (b)-диссипативность, а компактная k (b)-диссипативность влечет поточечную $k(b)$-диссипативность.

Как будет показано ниже, в общем случае, введенные нами классы диссипативных систем различны.

Нас будут интересовать следующие задачи:

(1) Какова связь между различными типами диссипативности?
(2) Условия при которых диссипативная система допускает максимальное компактное инвариантное множество.
(3) Структура центра Левинсона (максимального компактного инвариантного аттрактора) для различных классов динамических систем.
(4) Условия асимптотической и равномерной асимптотической устойчивости центра Левинсона.

Лемма 1.3.1. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально k (b)-диссипативна, тогда она компактно k (b)-диссипативна.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально k (b)-диссипативна. Тогда существует непустое компактное (ограниченное) множество $K \subseteq X$, такое что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ существуют $\delta(x) > 0$ и $l = l(\varepsilon, x) > 0$ для которых

$$\rho(yt, K) < \varepsilon \tag{1.3.2}$$

при всех $t \geq l$ и $y \in B(x, \delta(x))$.

Пусть M - некоторый компакт из X. Тогда для любого $x \in M$ существуют $\delta = \delta(x) > 0$ и $l = l(\varepsilon, x) > 0$ такие, что имеет место неравенство (1.3.2). Рассмотрим открытое покрытие $\{B(x, \delta(x)) \mid x \in M\}$ множества M. В силу компактности M и полноты пространства X из построенного покрытия множества M можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(x_i, \delta(x_i)) \mid i \in \overline{1,m}\}$. Положим $L(\varepsilon, M) = \max\{l(\varepsilon, x_i) \mid i \in \overline{1,m}\}$, тогда из (1.3.2) следует, что $\rho(xt, K) < \varepsilon$ при всех $x \in M$ и $t \geq L(\varepsilon, M)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3.2. *Пусть $M \subseteq X$ и множество $\Sigma^+(M)$ относительно компактно. Если $\omega(M) \subseteq M$, то*

$$\omega(M) = \cap\{\pi^t M \mid t \in \mathbb{T}\}. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Обозначим через $I(M) := \cap\{\pi^t M | t \in \mathbb{T}\}$. Ясно, что $I(M) \subseteq \omega(M)$. Покажем, что имеет место и обратное включение, если $\omega(M) \subseteq M$. Действительно, согласно лемме 1.2.2 и следствию 1.2.3 множество $\omega(M)$ инвариантно и, следовательно, $\omega(M) = \pi^t \omega(M) \subseteq \pi^t M$ для любого $t \in \mathbb{T}$. Откуда вытекает включение $\omega(M) \subseteq I(M)$. Лемма доказана.

Замечание 1.3.3. *Всюду ниже мы будем рассматривать в основном, k-диссипативные динамические системы. Поэтому значок k-мы будем опускать везде, где это не приведет к недоразумению.*

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и K - непустое компактное множество, являющееся аттрактором для компактных подмножеств X. Тогда для любого компакта $M \subseteq X$ имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in M} \rho(xt, K) = 0.$$

Поэтому $\omega(K) \subseteq K$ и, следовательно,

$$J := \omega(K) = \cap\{\pi^t K \mid t \in \mathbb{T}\}. \tag{1.3.4}$$

Покажем, что множество J не зависит от выбора множества K, притягивающего все компактные подмножества пространства X. Действительно, если мы обозначим через $J(K) := \omega(K)$ и K_1 - любое другое компактное множество, притягивающее все компакты из X, то найдется $L = L(K, K_1, \varepsilon) > 0$, что $\pi^t J(K) \subseteq K_1$ и $\pi^t J(K_1) \subseteq K$ при всех $t \geq L$. Так как $J(K) = \omega(K) \subseteq K$ и $J(K_1) = \omega(K_1) \subseteq K_1$, то из инвариантности $J(K_1)$ и $J(K)$ следует, что $J(K) \subseteq K_1$, $J(K_1) \subseteq K$, $J(K) \subseteq \pi^t K_1$ и $J(K_1) \subseteq \pi^t K$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и, следовательно, $J(K) = J(K_1)$.

Таким образом множество J, определенное равенством (1.3.4), не зависит от выбора аттрактора K, а определяется только внутренними свойствами динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Множество J, определенное равенством (1.3.4), следуя [**34**], назовем центром Левинсона компактно диссипативной динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Теорема 1.3.4. [**59**],[**96**],[**132**] *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - компактно диссипативная система и J - ее центр Левинсона. Тогда:*

(1) *J - компактное инвариантное множество;*
(2) *J орбитально устойчиво;*
(3) *J является аттрактором семейства всех компактов X;*
(4) *J является максимальным компактным инвариантным множеством в $(X, \mathbb{T}, \pi)$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из определения J и леммы 1.2.2.

Покажем, что множество J орбитально устойчиво. Допустив противное, мы получим существование $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \to 0$ $(\delta_n > 0)$, $x_n \in B(J, \delta_n)$ и $t_n \to +\infty$ таких, что

$$\rho(x_n t_n, J) \geq \varepsilon_0. \tag{1.3.5}$$

Так как $x_n \in B(J, \delta_n)$, $\delta_n \to 0$ и J компактно, то, не умаляя общности рассуждений, последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. В силу компактной диссипативности системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ множество $\Sigma^+(\{x_n\})$ относительно компактно. Заметим, что, наряду с множеством K, и множество $K' =$

$K \cup H^+(\{x_n\})$ является аттрактором для семейства всех компактов из X и, следовательно, $\omega(K') = \omega(K) = J$. В частности, $\omega(H^+(\{x_n\})) \subseteq \omega(K) = J$. В силу компактности $H^+(\{x_n\})$ последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$, тогда с одной стороны, $p \in \omega(H^+(\{x_n\}))$. С другой стороны, из (1.3.5) следует, что $p \notin J$. Полученное противоречие доказывает второе утверждение теоремы.

Пусть теперь $M \in C(X)$. Тогда в силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ множество $\Sigma^+(M)$ относительно компактно и согласно теореме 1.2.5 выполняются условия (1)-(2). В частности, для любого $\varepsilon > 0$ существует $L(\varepsilon) > 0$, что $\pi^t M \subseteq B(\omega(M), \varepsilon)$ при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Наряду с множеством K и множество $K' = K \cup \omega(M)$ является аттрактором, компактных подмножеств из X и, следовательно, $\omega(K') = \omega(K) = J$. Поэтому $\omega(M) \subseteq \omega(K') = J$, а значит

$$\beta(\pi^t M, J) \leq \beta(\pi^t M, \omega(M)) < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{t\to+\infty} \beta(\pi^t M, J) = 0$ для любого $M \subseteq C(X)$, где $\beta(A, B)$ - полуотклонение множества A от множества B.

Наконец, докажем четвертое утверждение теоремы. Пусть J_1 - компактное инвариантное подмножество из X. Тогда согласно третьему утверждению теоремы имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t J_1, J) = 0. \tag{1.3.6}$$

В силу инвариантности J_1 имеем $\pi^t J_1 = J_1$ при всех $t \in \mathbb{T}$. Из последнего соотношения и равенства (1.3.6) получаем $J_1 \subseteq J$. Теорема полностью доказана.

Обозначим через $\{K_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ - семейство всех непустых компактных полуинвариантных множеств, притягивающих все компакты из X.

Имеет место следующая

Теорема 1.3.5. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - компактно диссипативная динамическая система и J - ее центр Левинсона, тогда*

$$J = J' := \cap\{K_\lambda | \lambda \in \Lambda\},$$

т.е. J является наименьшим компактным полуинвариантным множеством, притягивающим все компакты из X.

Доказательство. Положим

$$K := \cap\{K_\lambda | \lambda \in \Lambda\}.$$

Прежде всего заметим, что $J \subseteq K$ и, следовательно, $K \neq \emptyset$. В самом деле. Для любого $\lambda \in \Lambda$ имеем $J = \omega(K_\lambda) \subseteq K_\lambda$, т.е. $J \subseteq K$.

Покажем теперь, что имеет место и обратное включение. Так как J притягивает все компакты из X, непусто и полуинвариантно, то $J \in \{K_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ и, следовательно, $K \subseteq J$. Теорема доказана.

Лемма 1.3.6. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - компактно диссипативная динамическая система, J - ее центр Левинсона и K непустой компакт, притягивающий все компакты из X, тогда*

$$J = \bigcap_{t \in T} \pi^t K.$$

Доказательство. Так как K аттрактор всех компактов из X, то $\omega(K) \subseteq K$, и согласно лемме 1.3.2

$$J := \omega(K) = \bigcap \pi^t K.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3.7. *Пусть M - компактное полуинвариантное асимптотически устойчивое множество, тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *область притяжения $W^s(M)$ множества M открыта;*

(2) *для любого компакта K из $W^s(M)$ имеет место равенство*

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t K, M) = 0. \qquad (1.3.7)$$

Доказательство. Покажем, что $W^s(M)$ открыто. Действительно, так как M притягивающее множество, то существует такое $\delta > 0$, что $B(M, \delta) \subset W^s(M)$. Покажем, что для любой точки $p \in W^s(M) \backslash B(M, \delta)$ существует такое $\eta > 0$, что $B(p, \eta) \subset W^s(M)$. Так как $p \in W^s(M)$, то найдется такое $t_p > 0$, что $pt_p \in B(M, \delta)$. В силу открытости $B(M, \delta)$ найдется

$\gamma > 0$ для которого $B(pt_p, \gamma) \subset B(M, \delta)$. Согласно непрерывности отображения $\pi(t_p, \cdot) : X \longrightarrow X$ найдется $\eta > 0$, что имеет место включение $\pi^{t_p} B(p, \eta) \subset B(M, \delta) \subset W^s(M)$ и, следовательно, множество $W^s(M)$ открыто.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть $\varepsilon > 0$ и K - произвольный компакт из $W^s(M)$. Для числа $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ из условия орбитальной устойчивости M. Так как M притягивает точки из $W^s(M)$, то для любой точки $x \in K$ найдутся $\gamma(x, \varepsilon) > 0$ и $l(x, \varepsilon) > 0$, такие, что

$$\pi^t B(x, \gamma(x, \varepsilon)) \subseteq B(M, \varepsilon) \tag{1.3.8}$$

при всех $t \geq l(x, \varepsilon)$. В силу компактности K из открытого покрытия $\{B(x, \gamma(x, \varepsilon)) \mid x \in K\} \supseteq K$ можно извлечь конечное подпокрытие $\cup\{B(x_i, \gamma(x, \varepsilon)) \mid i = \overline{1, n}\} \supseteq K$. Положим $L(M, \varepsilon) := \max\{l(x_i, \varepsilon) \mid i = \overline{1, n}\}$, тогда $\pi^t M \subseteq B(K, \varepsilon)$ при всех $t \geq L(M, \varepsilon)$, т.е. M притягивает K. Лемма доказана.

Обозначим через $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ - семейство всех непустых компактных полуинвариантных и ассимптотически устойчивых в целом множеств из X и $J'' := \bigcap\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$.

Теорема 1.3.8. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и J - ее центр Левинсона, тогда $J = J''$, т.е. центр Левинсона J компактно диссипативной системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является наименьшим компактным полуинвариантным асимптотически устойчивым в целом множеством в X.*

Доказательство. Согласно лемме 1.3.7 имеет место вклю чение $J' \subseteq J''$ и по теореме 1.3.5 $J = J' \subseteq J''$. Имеет место и обратное включение. Для этого достаточно заметить, что при некотором $\lambda_0 \in \Lambda$ имеет место равенство $M_{\lambda_0} = J$ и, следовательно, $J'' = \cap\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subseteq J$. Теорема доказана.

Теорема 1.3.9. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - компактно диссипативная динамическая система и K - некоторое непустое компактное инвариантное множество из X, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *K является центром Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$;*
(2) *K асимптотически устойчиво в целом;*
(3) *K - максимальное компактное инвариантное множест во X.*

Доказательство. Согласно теореме 1.3.4 из 1. следует 2.. Теперь покажем, что имеет место и обратное утверждение. Обозначим через J центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$, тогда согласно теореме 1.3.8 $J \subseteq K$. С другой стороны, центр Левинсона, согласно теореме 1.3.4, является аттрактором всех компактных подмножеств из X и в силу инвариантности K имеем $K \subseteq J$. Таким образом $J = K$.

Из теоремы 1.3.4 следует, что из 1. вытекает 3. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что имеет место и обратная импликация. Пусть J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Тогда, с одной стороны в силу теоремы 1.3.4 множество J компактно и инвариантно и в силу максимальности K имеем $J \subseteq K$. С другой стороны, согласно теореме 1.3.4 центр Левинсона является аттрактором семейства $C(X)$ и в силу инвариантности K имеем $K \subseteq J$ и, следовательно, $K = J$. Теорема доказана.

1.4. Диссипативные динамические системы в локально компактных пространствах

Как отмечалось выше, из локальной диссипативности системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ следует ечҷ компактная диссипативность. С другой стороны, если пространство X локально компактно, то нетрудно заметить, что верно и обратное. Таким образом в локально компактных пространствах компактная и локальная диссипативности эквивалентны. На самом деле, как будет показано ниже, имеет место более сильное предложение, а именно: в локально компактных пространствах из поточечной диссипативности вытекает локальная диссипативность.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовчм:

- локально вполне непрерывной, если для любой точки $p \in X$ существуют $\delta = \delta(p) > 0$ и $l = l(p) > 0$ такие, что $\pi^l B(p, \delta)$ относительно компактно;
- слабо диссипативной, если существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдется $\tau = \tau(\varepsilon, x) > 0$, для которого $x\tau \in B(K, \varepsilon)$. При этом компакт K назовчм слабым аттрактором.

Отметим, что всякая динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$, заданная на локально компактном метрическом пространстве X, является локально вполне непрерывной.

Лемма 1.4.1. *Пусть $K \subseteq X$ – непустой компакт, $p_i \in X$ и $\delta_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$. Если $K \subseteq \cup\{B(p_i, \delta_i) \mid i = \overline{1,m}\}$, то существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$B(K, \gamma) \subseteq \cup\{B(p_i, \delta_i) \mid i = \overline{1,m}\}. \tag{1.4.1}$$

Доказательство. Допустим, что каково бы ни было $\gamma > 0$ включение (1.4.1) не имеет места. Тогда найдутся $\gamma_n \downarrow 0$ и $r_n \in B(K, \gamma_n)$ такие, что $r_n \notin \cup\{B(p_i, \delta_i) \mid i = \overline{1,m}\}$. Так как $\gamma_n \downarrow 0$, то для каждой точки r_n существует точка $q_n \in K$ такая, что

$$\rho(r_n, q_n) < \gamma_n. \tag{1.4.2}$$

В силу компактности K, последовательность $\{q_n\}$ можно считать сходящейся к некоторой точке $q \in K$. Тогда согласно (1.4.2) $r_n \to q$, что противоречит выбору последовательности $\{r_n\}$.

Лемма 1.4.2. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ слабо диссипативна и локально вполне непрерывна, а $K \subset X$ – слабый аттрактор $(X, \mathbb{T}, \pi)$, тогда:*

1) *существуют $a_0 > 0$ и $l_0 > 0$ такие, что $\pi^t B(K, a_0)$ относительно компактно для каждого $t \geq l_0$;*
2) *существует $L_0 \geq l_0$ такое, что при всех $t \geq L_0$*

$$\pi^t B(K, a_0) \subseteq \pi^{l_0} B(K, a_0).$$

Доказательство. Пусть $x \in K$. В силу локальной вполне непрерывности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ для точки $x \in K$ существуют $l(x) > 0$ и $\delta_x > 0$ такие, что $\pi^t B(x, \delta_x)$ относительно компактно при всех $t \geq l(x)$. Очевидно, $\{B(x, \delta_x) \mid x \in K\}$ является открытым покрытием K и в силу его компактности из построенного покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(x_i, \delta_{x_i}) \mid i \in \overline{1,n}\}$. Положим $l_0 = \max\{l(x_i) \mid i \in \overline{1,n}\}$. Согласно лемме 1.4.1 существует $a_0 > 0$ такое, что

$$K \subseteq B(K, a_0) \subseteq \cup\{B(x_i, \delta_{x_i}) \mid i \in \overline{1,n}\}.$$

Следовательно,

$$\pi^t B(K, a_0) \subseteq \cup\{\pi^t B(x_i, \delta_{x_i}) \mid i \in \overline{1,n}\},$$

поэтому $\pi^t B(K, a_0)$ относительно компактно при всех $t \geq l_0$.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть a_0 и l_0 – положительные числа из предыдущего пункта. Если допустить, что второе утверждение леммы неверно, то существуют $\{x_k\} \subset B(K, a_0)$ и $t_k \to +\infty$ такие, что

(1) $x_k \in \overline{B(K, a_0)}$.
(2) $x_k t \in X \setminus \overline{B(K, a_0)}$ при всех $0 < t < t_k$.
(3) $x_k t_k \in \overline{B(K, a_0)}$.

Из 2) следует, что

4. $x'_k t \in X \setminus B(K, a_0)$ при всех $0 < t < t_k - l_0$, где $x'_k = x_k l_0$.

В силу относительной компактности $\pi^{l_0} B(K, a_0)$ последовательность $x'_k = x_k l_0$ можно считать сходящейся. Положим $x_0 = \lim\limits_{k \to +\infty} x'_k$, тогда из 4. следует, что $x_0 t \in X \setminus B(K, a_0)$ при всех $0 < t < +\infty$ и, следовательно, $\emptyset \neq \omega_{x_0} \subset X \setminus B(K, a_0)$. Таким образом $\omega_{x_0} \cap K = \emptyset$, что противоречит слабой диссипативности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и тому факту, что K является слабым аттрактором. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 1.4.3. *Для локально вполне непрерывных динамических систем слабая, поточечная, компактная и локальная диссипативность эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, для доказательства сформулированной теоремы достаточно показать, что из слабой диссипативности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ вытекает еҷ локальная диссипативность, если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально вполне непрерывна. Пусть $K \neq \emptyset$, компактно и является слабым аттрактором $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Обозначим через a_0 – число из леммы 1.4.2. Если $x \in X$, то существует $\tau > 0$ такое, что $x\tau \in B(K, a_0)$. Пусть $\gamma > 0$ таково, что $B(x\tau, \gamma) \subset B(K, a_0)$. В силу непрерывности отображения $\pi^\tau : X \to X$ в точке x существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\pi^\tau B(x, \alpha) \subset B(x\tau, \gamma) \subset B(K, a_0).$$

Положим $M = \omega(B(K, a_0))$. Согласно лемм 1.4.2 и 1.2.2 множество $M \neq \emptyset$, компактно и

$$\lim_{k \to +\infty} \beta(\pi^t B(x, \alpha), M) = 0.$$

Таким образом мы построили непустой компакт $M \subset X$, притягивающий каждую точку вместе с некоторой ε-окрестнос- тью, то есть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна. Теорема доказана.

1.5. Критерии компактной диссипативности

Положим $\Omega := \overline{\cup\{\omega_x | x \in X\}}$. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - компактно диссипативная динамическая система и J - ее центр Левинсона. Ясно, что $\Omega \subseteq J$. Вместе с тем простые примеры показывают, что в общем случае, $\Omega \neq J$. В то же время множество Ω является важной характеристикой диссипативной динамической системы. Например, из теоремы 1.4.3 следует, что в локально компактном пространстве X динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ диссипативна тогда и только тогда, когда Ω непусто, компактно и $\omega_x \neq \emptyset$ при всех $x \in X$. В связи с выше сказанным представляют интерес следующие вопросы:

a. Каковы необходимости и достаточные условия совпадения множеств Ω и J?
b. Какова связь между Ω и J в общем случае?

Из приводимых ниже результатов вытекают ответы на поставленные вопросы.

Обозначим через

$$D^+(M) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\bigcup \{\pi^t B(M, \varepsilon) | t \geq 0\}},$$

$$J^+(M) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup \{\pi^\tau B(M, \varepsilon) | \tau \geq t\}},$$

$D_x^+ := D^+(\{x\})$ и $J_x^+ := J^+(\{x\})$.

Непосредственно из определения $D^+(M)$ и $J^+(M)$ следует, что имеет место

Лемма 1.5.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *$p \in D^+(M)$ ($p \in J^+(M)$) тогда и только тогда, когда существуют $\{x_n\}$ и $\{t_n\}$ такие, что $\rho(x_n, M) \to 0$, $t_n \to +\infty$ и*
$x_n t_n \to p$;

(2) *множество $D^+(M)$ ($J^+(M)$) замкнуто и полуинвариантно.*

Лемма 1.5.2. *Пусть $y \in \omega_x$, тогда $J^+_x \subseteq J^+_y$.*

Доказательство. Пусть $y \in \omega_x$ и $p \in J^+_x$, тогда существуют последовательности $\{\tau'_n\} \to +\infty$, $x\tau'_n \to y$, $\{t'_n\}$ и $\{x_n\}$ такие, что $x_n \to x$, $t'_n \to +\infty$ и $x_n t'_n \to p$. Согласно лемме 1.5.1 можно считать, что $t'_n - \tau'_n > n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим последовательность $\{x_n \tau'_k\}$. По аксиоме непрерывности $x_n\tau'_k \to x\tau'_k$ при $n \to +\infty$ (при каждом $k \in \mathbb{N}$) и, следовательно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется $n_k \geq k$ такое, что $\rho(x_n\tau'_k, x\tau'_k) \leq k^{-1}$ при всех $n \geq n_k$. Так как $x\tau'_n \to y$, то $\rho(y, x_{n_k}\tau'_k) \leq \rho(y, x\tau'_k) + \rho(x\tau'_k, x_{n_k}\tau'_k) \leq \rho(y, x\tau'_k) + k^{-1}$. Заметим, что $x_{n_k} t'_{n_k} = x_{n_k}\tau'_{n_k}(t'_{n_k} - \tau'_{n_k})$, $x_{n_k}\tau'_{n_k} \to y$ и $t'_{n_k} - \tau'_{n_k} > n_k \geq k$. Отсюда следует, что $p \in J^+_y$, т.е. $J^+_x \subseteq J^+_y$. Лемма доказана.

Следствие 1.5.3. *Если $y \in \omega_x$, то $J^+_y = D^+_y$.*

Доказательство. Дейсвительно, так как $J^+_y \subseteq D^+_y$, то достаточно показать что $D^+_y \subseteq J^+_y$. Заметим, что $D^+_y = \Sigma^+_y \cup J^+_y$. Поскольку $y \in \omega_x$ то, $\Sigma^+_y \subseteq \omega_x \subseteq J^+_x \subseteq J^+_y$. Поэтому $D^+_y = \Sigma^+_y \cup J^+_y \subseteq J^+_y \cup J^+_y = J^+_y$.

Лемма 1.5.4. *Если $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to +\infty$ и $x_n \in D^+_{y_n}$ ($x_n \in J^+_{y_n}$), то $x \in D^+_y$ ($x \in J^+_y$).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Из включения $x_n \in D^+_{y_n}$ ($x_n \in J^+_{y_n}$) при каждом n следует существование точки $z_n \in B(y_n, \frac{\delta}{2})$ и числа $t_n \geq 0$ ($t_n \geq n$) таких, что

$$\rho(x_n, z_n t_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5.1}$$

Из $x_n \to x$ и $y_n \to y$ вытекает существование такого натурального n_0, что при всех $n > n_0$ одновременно выполнены неравенства

$$\rho(y, y_n) < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5.2}$$

Из $z_n \in B(y_n, \frac{\delta}{2})$ и (1.5.2) получаем $\rho(y, z_n) < \delta$, а из (1.5.1) и (1.5.2) следует неравенство $\rho(x, z_n t_n) < \varepsilon$, т.е. $x \in D^+_y$ $(x \in J^+_y)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5.5. *Если множество $M \subseteq X$ компактно, то $D^+(M) = \cup\{D^+_x | x \in M\}$ и $J^+(M) = \cup\{J^+_x | x \in M\}$.*

Доказательство. Так как $\cup\{D^+_x | x \in M\} \subseteq D^+(M)$, то для доказательства леммы достаточно показать, что $D^+(M) \subseteq \cup\{D^+_x | x \in M\}$. Пусть $y \in D^+(M)$, тогда существуют $\{x_n\}$ и $t_n \geq 0$ такие, что $\rho(x_n, M) \to 0$ и $y = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n t_n$. Так как M компактно, то последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $x := \lim_{n \to +\infty} x_n$ тогда, $x \in M$. Итак, $x_n \to x$, $y \in D^+_x$ и $y_n \to y$ $(y_n := x_n t_n)$. Согласно лемме 1.5.4 $y \in D^+_x \subseteq \cup\{D^+_x | x \in M\}$. Аналогично устанавливается и второе равенство. Лемма доказана.

Лемма 1.5.6. *Если M - непустое компактное квазиинвариантное множество, то $M \subseteq J^+(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть M - непустое компактное квазиинвариантное множество и $x \in M$, тогда согласно теореме 1.1.2 существует целая траектория $\varphi : S \longrightarrow X$ такая, что $\varphi(0) = x$ и $\varphi(t) \in M$ при всех $t \geq 0$. Так как $\alpha_{\varphi_x} \neq \emptyset$, замкнуто и $\alpha_{\varphi_x} \subseteq M$, то оно компактно. Пусть $y \in \alpha_{\varphi_x}$, тогда $\omega_y \subseteq \alpha_{\varphi_x}$. Если $p \in \omega_y \subseteq \Omega$, то существует $t_n \to +\infty$ такая, что $x_k = \varphi(-t_k) \to p$ и $x = \pi^{t_k}\varphi(-t_k)$ и, следовательно, $x \in J^+_p \subseteq J^+(\Omega)$. Лемма доказана.

Следствие 1.5.7. *Если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна, $\Omega \neq \emptyset$ и компактно, то $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$.*

Доказательство. Действительно, так как ω_x инвариантно при любом $x \in X$ и $\Omega = \overline{\cup\{\omega_x \mid x \in X\}}$, то Ω также инвариантно и согласно лемме 1.5.6 $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$.

Лемма 1.5.8. *Если динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна и $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ компактно, то $D^+(\Omega) = D^+(D^+(\Omega))$ $(J^+(\Omega) = J^+(J^+(\Omega)))$.*

Доказательство. Так как $\Omega \subseteq D^+(\Omega)$, то $D^+(D^+(\Omega)) \subseteq D^+(\Omega)$ и, следовательно, для доказательства леммы 1.5.8

достаточно установить обратное включение $D^+(D^+(\Omega)) \subseteq D^+(\Omega)$. Пусть $x \in D^+(\Omega)$, тогда $\omega_x \subseteq \Omega$ и, если $y \in \omega_x \subseteq \Omega$, то согласно лемме 1.5.2 и следствию 1.5.3 $J_x^+ \subseteq J_y^+ = D_y^+ \subseteq D^+(\Omega)$. Так как $D_x^+ = \Sigma_x^+ \cup J_x^+ \subset D^+(\Omega) \cup D^+(\Omega) = D^+(\Omega)$ для любого $x \in D^+(\Omega)$ и $D^+(\Omega)$ компактно, то согласно лемме 1.5.5 $D^+(D^+(\Omega)) = \cup\{D_x^+ | x \in D^+(\Omega)\} \subseteq D^+(\Omega)$. Аналогично доказывается и второе равенство, но при этом надо учесть, что $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 1.5.9. *Если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то $D^+(D^+(\Omega)) = D^+(\Omega)$ ($J^+(J^+(\Omega)) = J^+(\Omega)$).*

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и J - ее центр Левинсона, тогда $\Omega \subseteq J$. В силу орбитальной (асимптотической) устойчивости J имеем $D^+(J) = J$ ($J^+(J) \subseteq J$) и, следовательно, $D^+(\Omega) \subseteq J$ ($J^+(\Omega) \subseteq J$). Так как $D^+(\Omega)$ ($J^+(\Omega)$) замкнуто и J компактно, то $D^+(\Omega)$ ($J^+(\Omega)$) также компактно и для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на лемму 1.5.8.

Известно [**161**], что для компактного полуинвариантного множества M равенство $D^+(M) = M$ имеет место тогда и только тогда, когда M орбитально устойчиво (X локально компактно и T = R). Ниже нами будет показано, что это утверждение сохраняется и для компактно диссипативных систем на произвольном метрическом пространстве как с непрерывным, так и с дискретным времени. А именно, имеет место следующая

Лемма 1.5.10. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна. Для того чтобы компактное полуинвариантное множество $M \subseteq X$ было орбитально устойчивым, необходимо и достаточно выполнение равенства $D^+(M) = M$.*

Доказательство. Если M орбитально устойчиво, то стандартными рассуждениями (см., например, [**161**]) показывается, что $D^+(M) = M$ для любых систем (в том числе и диссипативных).

Пусть теперь $D^+(M) = M$ и покажем, что M орбитально устойчиво. Если допустить противное, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $x_n \to x \in M$ и $t_n \geq 0$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0. \tag{1.5.3}$$

Так как система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то множество $\Sigma^+(K)$ относительно компактно, где $K := \{x_n\}$ и, следовательно, последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $y := \lim\limits_{n \to +\infty} x_n t_n$, тогда, с одной стороны $y \in D^+(M) = M$. С другой стороны, из (1.5.3) следует, что $\rho(y, M) \geq \varepsilon_0 > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 1.5.11. *Если динамическая система* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *компактно диссипативна, то* $J = J^+(\Omega)$.

Доказательство. Так как $\Omega \subseteq J$ и J асимптотически устойчиво, то $J^+(\Omega) \subseteq J^+(\Omega)$. Из лемм 1.5.9 и 1.5.10 следует, что множество $J^+(\Omega)$ орбитально устойчиво, так как $D^+(J^+(\Omega)) = J^+(\Omega)$. Пусть $x \in J \setminus J^+(\Omega)$ и $d_x := \rho(x, J^+(\Omega)) \geq 0$. Если $d_x = 0$ для всех $x \in J \setminus J^+(\Omega)$, то теорема доказана. Допустим, что для некоторого $x_0 \in J \setminus J^+(\Omega)$ имеем $d_{x_0} > 0$. Для числа $0 < \varepsilon < 2^{-1} d_{x_0}$ выберем $\delta(\varepsilon) > 0$ из условия орбитальной устойчивости $J^+(\Omega)$. Так как $x_0 \in J$, то согласно теореме 1.1.2 существует непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \longrightarrow J$ такое, что $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t + s)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, $s \in \mathbb{S}$ и $\varphi(0) = x_0$. Так как J компактно, то множество α предельных точек $\alpha_{\varphi_{x_0}}$ движения φ непусто, компактно и $\alpha_{\varphi_{x_0}} \cap \Omega \neq \emptyset$ и, следовательно, существует $t_n \to -\infty$ такая, что $\rho(x_0 t_n, \Omega) \to 0$. Выберем n_0 так, чтобы $\rho(x_0 t_n, \Omega) < \delta \ \ (n \geq n_0)$, тогда имеем $\rho(x_0 t_n, , J^+(\Omega)) < \delta$ и, следовательно, $\rho(x_0(t + t_n), J^+(\Omega)) < \varepsilon$ при всех $t_0 \geq 0$ и $n \geq n_0$. В частности, при $t = -t_n$ имеем $d_{x_0} = \rho(x_0, J^+(\Omega)) < \varepsilon < 2^{-1} d_{x_0}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1.5.12. *В условиях теоремы 1.5.11 имеет место равенство* $J = D^+(\Omega)$.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 1.5.11 с учетом того, что $J \subseteq J^+(\Omega) \subseteq D^+(\Omega) \subseteq J$.

Следствие 1.5.13. *Если* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *компактно диссипативна, то* $J = \Omega$ *тогда и только тогда, когда* Ω *орбитально устойчиво.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 1.5.11 и леммы 1.5.10.

Теорема 1.5.14. *Для того чтобы динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовало непустое компактное множество $K \subseteq X$, удовлетворяющее условию: для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ существуют $\delta(\varepsilon, x) > 0$ и $l(\varepsilon, x) > 0$ такие, что*

$$\pi^t B(x, \delta(\varepsilon, x)) \subseteq B(K, \varepsilon) \tag{1.5.4}$$

при всех $t \geq l(\varepsilon, x)$.

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, J - ее центр Левинсона, $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Согласно теореме 1.3.4 J орбитально устойчиво. Обозначим через $\gamma(\varepsilon) > 0$ - число, определенное по ε из условия орбитальной устойчивости J. Множество J является асимптотически устойчивым в целом, поэтому для $x \in X$ и $\gamma(\varepsilon) > 0$ найдется $l(\varepsilon, x)$ такое, что $xt \in B(J, \gamma)$ при всех $t \geq l(\varepsilon, x)$. Так как $B(J, \gamma)$ открыто, то существует $\alpha = \alpha(\varepsilon, x) > 0$ для которого $B(\pi(x, l(\varepsilon, x)), \alpha) \subseteq B(J, \gamma)$. В силу непрерывности отображения $\pi(l(\varepsilon, x), \cdot) : X \longrightarrow X$ для всех $x \in X$ и $\alpha > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что

$$\pi(l(\varepsilon, x), B(x, \delta)) \subseteq B(\pi(l(\varepsilon, x), x), \alpha). \tag{1.5.5}$$

Из включения (1.5.5) и в силу выбора γ имеем $\pi^t B(x, \delta) \subseteq B(J, \varepsilon)$ при всех $t \geq l(\varepsilon, x)$.

Пусть теперь $K \subseteq X$ - непустой компакт, удовлетворяющий условию (1.5.4). Если $\varepsilon > 0$ и M - некоторой компакт из X, то для любого $x \in M$ существуют $\delta(\varepsilon, x) > 0$ и $l(\varepsilon, x) > 0$ такие, что имеет место (1.5.4). Рассмотрим открытое покрытие $\{B(x, \delta(\varepsilon, x)) \mid x \in M\}$ множества M. В силу компактности M и полноты пространства X из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)) \mid i \in \overline{1, n}\}$. Положим $L(\varepsilon, M) := \max\{l(\varepsilon, x_i) \mid i = \overline{1, n}\}$. Из (1.5.4) следует, что $\pi^t M \subseteq B(K, \varepsilon)$ при всех $t \geq L(\varepsilon, M)$. Теорема доказана.

Теорема 1.5.15. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна. Для того чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно диссипативной, необходимо и достаточно существование непустого компактного множества M, обладающего следующими свой- ствами:*

(1) $\Omega \subseteq M$;
(2) *M орбитально устойчиво;*

При этом $J \subseteq M$, где J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна, поэтому для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать достаточность условий a. и b. Рассуждая также, как и в первой части теоремы 1.5.14, устанавливаем что для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ существуют $\delta(\varepsilon, x) > 0$ и $l(\varepsilon, x) > 0$, удовлетворяющие условию (1.5.4). При этом в качестве K следует взять множество M из теоремы 1.5.15. Применяя теорему 1.5.14, получаем компактную диссипативность $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Покажем теперь, что $J \subseteq M$. Действительно, так как $\Omega \subseteq M$ и M орбитально устойчиво, то $D^+(\Omega) \subseteq D^+(M) = M$. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на следствие 1.5.12.

Теорема 1.5.16. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна. Для того чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы множество $D^+(\Omega)$ $(J^+\Omega))$ было компактным и орбитально устойчивым. При этом $J = D^+(\Omega)$ $(J = J^+(\Omega))$, где J - центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теорем 1.5.11, 1.5.14, 1.5.15 и следствия 1.5.12.

Теорема 1.5.17. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна. Для того чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была компактно диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma^+(K)$ было относительно компактным, каков бы ни был компакт $K \subseteq X$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы вытекает из теоремы 1.2.5. Докажем достаточность условия теоремы. Прежде всего заметим, что в условиях теоремы множество $J^+(\Omega) \neq \emptyset$ и компактно. Действительно, согласно следствию 1.5.7 $\Omega \subseteq J^+(\Omega)$ и, следовательно, $J^+(\Omega) \neq \emptyset$. Покажем теперь, что $J^+(\Omega)$ компактно. Пусть $\{y_k\} \subseteq J^+(\Omega)$ и $\varepsilon_k \downarrow 0$, тогда существуют $p_k \in \Omega$, $y_k \in J^+_{p_k}$, $\overline{p}_k \in B(p_k, \varepsilon_k)$ и $t_k > 0$ такие, что

$$\rho(y_k, \overline{p}_k t_k) < \varepsilon_k. \tag{1.5.6}$$

Так как $\{p_k\} \subseteq \Omega$, Ω компактно и $\varepsilon_k \downarrow 0$, то последовательность $\{p_k\}$ относительно компактна и, следовательно, в условиях теоремы последовательность $\{\overline{p}_k t_k\}$ также относительно компактна. Тогда из неравенства (1.5.6) следует, что последовательность $\{y_k\}$ относительно компактна, т.е. $J^+(\Omega)$ компактно.

Покажем, что $J^+(\Omega)$ притягивает все компакты из X. Пусть K - произвольный непустой компакт из X. Тогда в условиях теоремы множество $\Sigma^+(K)$ относительно компактно и согласно теореме 1.2.5 множество $\Omega(K)$ непусто, компактно и имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\beta(\pi^t K, \Omega(K)) = 0. \tag{1.5.7}$$

Согласно лемме 1.2.2 множество $\Omega(K)$ инвариантно и по лемме 1.5.6 $\Omega(K) \subseteq J^+(\Omega)$ и, следовательно, из (1.5.7) следует, что $J^+(\Omega)$ притягивает K. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа приведем пример поточечно диссипативной динамической системы, которая не является компактно диссипативной.

Пример 1.5.18. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция, равная нулю на $\mathbb{R}_-$ и определенная на $\mathbb{R}_+$ равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left\{\left[(t-1)^2-1\right]^{-1}+1\right\} & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t < +\infty. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

Положим $X = \{\varphi(at+b) |\ a, b; t \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что $X \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ является замкнутым и инвариантным относительно сдвигов подмножеством $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и, следовательно, динамическая система Бебутова индуцирует на X групповую динамическую систему сдвигов $(X, \mathbb{R}, \sigma)$. Отметим некоторые свойства построенной динамической системы:

(1) какова бы ни была функция $\psi \in X$ множество $\{\sigma(t, \psi)\ : t \in \mathbb{R}\}$ относительно компактно и существует $c = c(\psi) \in [0, 1]$ такое, что $\omega_\psi = \alpha_\psi = \{\varphi_c\}$, где $\varphi_c(t) = c$ при всех $t \in \mathbb{R}$;
(2) $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ поточечно диссипативна и $\Omega = \{\varphi_c \mid 0 \le c \le 1\}$;
(3) $D^+(\Omega) = X$.

Заметим, что X некомпактно. Действительно, если бы это было не так, то согласно теореме Асколи-Арцеля функции из X были бы равностепенно непрерывными на отрезке $[0,2]$. Построим подмножество в X, которое отмеченным свойством не обладает. Пусть $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$. Положим $t_n^1 = n^{-1}$ и $t_n^2 = 2n^{-1}$. Очевидно, $t_n^1, t_n^2 \in [0,2]$, $t_n^1 - t_n^2 \to 0$ при $n \to +\infty$ и $|\varphi_n(t_n^1) - \varphi_n(t_n^2)| = |\varphi(1) - \varphi(2)| = 1$, т.е. последовательность $\{\varphi_n\}$ не является равностепенно непрерывной на отрезке $[0,2]$. Таким образом, $D^+(\Omega) = X$ не является компактным и согласно теореме 1.5.16 динамическая система $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ не является компактно диссипативной.

В связи с примером 1.5.18 отметим, что согласно теореме 1.5.16 примеры поточечно диссипативных, но не компактно диссипативных динамических систем могут быть двух типов: либо $D^+(\Omega)$ некомпактно (как в примере 1.5.18), либо $D^+(\Omega)$ компактно, но не является орбитально устойчивым. То, что этот случай реализуется, показывает приводимый ниже пример.

Пример 1.5.19. Пусть φ - функция, определенная в предыдущем примере. Положим $X = \{\varphi(at+b)|\ a,b \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad t \in \mathbb{R}\}$. Через $(X, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим полугрупповую динамическую систему сдвигов на X. Отметим следующие свойства построенной динамической системы:

(1) какова бы ни была функция $\psi \in X$, множество $\{\sigma(t,\psi)\ |t \in \mathbb{R}_+\}$ относительно компактно и существует $c \in [0,1]$ такое, что $\omega_\psi = \{\varphi_c\}$;

(2) $D^+(\Omega) = \Omega$ и, следовательно, $D^+(\Omega)$ компактно, так как $\Omega = \{\varphi_c \mid 0 \le c \le 1\}$.

Покажем, что $D^+(\Omega)$ не является орбитально устойчивым. Очевидно для доказательства этого утверждения достаточно построить последовательность $\{\psi_n\} \subseteq X$ и $t_n \ge 0$ так, что $\psi_n \to \psi_0 \in \Omega$ и $\inf\{\rho(\sigma(t_n,\psi_n),\Omega)|\ n \ge 0\} > 0$. Положим $\psi_n(t) = \varphi(nt + 1 - n^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ и $t_n = n$. Тогда $\sigma(t_n,\psi_n)(s) = \varphi(ns+1)$ является расходящейся в X и, значит, $\inf\{\rho(\sigma(t_n,\psi_n),\Omega) \mid n \ge 0\} > 0$ (на самом деле последовательность $\varphi(ns+1)$ не содержит подпоследовательностей, сходящихся в X).

Таким образом, для полугрупповой поточечно диссипативной динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$ множество $D^+(\Omega)$ компактно, но не орбитально устойчиво. Согласно теореме 1.5.16 $(X, \mathbb{R}_+, \sigma)$ не является компактно диссипативной.

Замечание 1.5.20. *Как было доказано в лемме 1.5.10), для компактного полуинвариантного множества $M \subseteq X$ равенство $D^+(M) = M$ гарантирует орбитальную устойчивость M, если динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна. Пример 1.5.19 показывает, что для поточечно диссипативных систем аналогичный факт не имеет места, т.е. в этом случае известная теорема Ура* [**161**] *не верна.*

1.6. Локально диссипативные системы

Теорема 1.6.1. *Для того чтобы компактно диссипа- тивная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $p \in X$ существовало $\delta_p > 0$ такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), J) = 0, \tag{1.6.1}$$

где J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Доказательство. Достаточность теоремы очевидна. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативная динамическая систе- ма. Тогда существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что для любой точки $p \in X$ найдется $\delta_p > 0$, для которого имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K) = 0. \tag{1.6.2}$$

Из леммы 1.2.2 следует, что множество $K_p := \omega(B(p, \delta_p))$ непусто, компактно, инвариантно и

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K_p) = 0. \tag{1.6.3}$$

Из равенства (1.6.2) следует включение $K_p \subseteq K$ и, следовательно, $\omega(K_p) \subseteq \omega(K) \subseteq J$. В силу инвариантности множества K_p имеем $K_p = \omega(K_p)$, поэтому $K_p \subseteq J$. Из последнего включения и равенства (1.6.3) следует равенство (1.6.1). Теорема доказана.

Теорема 1.6.2. *Для того чтобы компактно диссипа- тивная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы ее центр Левинсона J был равномерно притягивающим множеством.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна, J - ее центр Левинсона и $p \in J$. Тогда согласно теореме 1.6.1 существует $\delta_p > 0$ такое, что имеет место равенство (1.6.1). В силу компактности J из его открытого покрытия $\{B(p, \delta_p) | \ p \in J\}$ можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(p_i, \delta_{p_i}) | \ i \in \overline{1,m}\}$. Согласно лемме 1.4.1 существует $\gamma > 0$ такое, что $B(J, \gamma) \subset U\{B(p_i, \delta_{p_i}) | \ i \in \overline{1,m}\}$. Очевидно, для найденного $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(J, \gamma), J) = 0, \tag{1.6.4}$$

т.е. J является равномерно притягивающим множеством.

Пусть теперь $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и ее центр Левинсона J является равномерно притягивающим множеством, т.е. существует $\gamma > 0$ такое, что имеет место равенство (1.6.4). Для $x \in X$ существует $l = l(x) > 0$, для которого

$$\rho(xt, J) < \gamma \tag{1.6.5}$$

при всех $t \geq l$. Согласно (1.6.4) для любого положительного числа ε можно подобрать $L(\varepsilon) > 0$ таким образом, что

$$\rho(yt, J) < \varepsilon \tag{1.6.6}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$ и $y \in B(J, \gamma)$. Так как $B(J, \gamma)$ открыто, то в силу (1.6.5) можно подобрать $\eta = \eta(x) > 0$ так, чтобы имело место включение $B(xl, \eta) \subset B(J, \gamma)$. В силу непрерывности отображения $\pi(l, \cdot) : X \to X$ для η можно найти $\delta = \delta_x > 0$ такое, что $yl \in B(xl, \eta)$ и $yl \in B(J, \gamma)$ при всех $y \in B(x, \delta_x)$. В силу (1.6.6) $y(t + l) \in B(J, \varepsilon)$ при всех $t \geq L(\varepsilon)$ и $y \in B(x, \delta_x)$. Положим $L(\varepsilon, x) = l(x) + L(\varepsilon)$, тогда $yt \in B(J, \varepsilon)$ при всех $t \geq L(\varepsilon, x)$ и $y \in B(x, \delta_x)$, т.е. (X, T, π) локально диссипативна. Теорема полностью доказана.

Лемма 1.6.3. *Пусть $M \subseteq X$ - непустое компактное полуинвариантное множество в $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Если M является равномерно притягивающим, то оно орбитально устойчиво.*

Доказательство. Допустим, что условия леммы выполнены, а M не является орбитально устойчивым. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $x_n \in B(M, \delta_n)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0. \tag{1.6.7}$$

Так как M является равномерно притягивающим, то для числа ε_0 найдется положительное число $L(\varepsilon_0)$ такое, что

$$\rho(xt, M) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.6.8}$$

при всех $x \in B(M, \gamma)$ и $t \geq L(\varepsilon_0)$, где $\gamma > 0$ таково, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(M, \gamma), M) = 0.$$

Так как $x_n \in B(M, \delta_n)$ и $\delta_n \downarrow 0$, то последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, тогда $x_0 \in M$ и $t_n \geq L(\varepsilon_0)$ для достаточно больших n. Согласно (1.6.8) имеет место неравенство

$$\rho(x_n t_n, M) < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{1.6.9}$$

Неравенства (1.6.7) и (1.6.9) противоречивы. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 1.6.4. *Для того чтобы поточечно диссипативная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально диссипативной, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

(1) $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ *компактно;*
(2) $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ *является равномерно притягивающим множеством.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна и выполнены условия 1. и 2. теоремы. Так как по лемме 1.6.3 множество $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ орбитально устойчиво, то согласно теореме 1.5.16 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна и $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ совпадает с ее центром Левинсона J. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 1.6.2.

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна. Так как по лемме 1.3.1 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то согласно теореме 1.5.16 $D^+(\Omega)$ $(J^+(\Omega))$ компактно и орбитально устойчиво. По теореме 1.5.11 и следствию 1.5.12 имеет место равенство $J = D^+(\Omega)$ $(J = J^+(\Omega))$, где J центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Из теоремы 1.6.2 следует, что $D^+(\Omega)$ $(J^+(\omega))$ является равномерно притягивающим множеством. Теорема полностью доказана.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем локально асимптотически уплотняющей, если для любой точки $p \in X$ существуют $\delta_p > 0$ и непустой компакт $K_p \subseteq X$ такие, что

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K_p) = 0. \tag{1.6.10}$$

Имеет место следующая

Теорема 1.6.5. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна. Для того чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была локально асимптотически уплотняющей.*

Доказательство. Если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна, то, очевидно, $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является и асимптотически уплотняющей. Предположим, что $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно диссипативна и является локально асимптотически уплотняющей и покажем, что $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна. Прежде всего докажем, что для любого компакта $K \in C(X)$ множество $\Sigma^+(K)$ относительно компактно. Пусть $p \in K$, $\delta_p > 0$ и $K_p \in C(X)$ таковы, что выполнено равенство (1.6.10). В силу компактности K из его открытого покрытия $\{B(p, \delta_p)|\ p \in K\}$ можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(p_i, \delta_{p_i})|\ 1 \le i \le n\}$. Положим $W = K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \ldots \cup K_{p_n}$, тогда W компактно и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t K, W) = 0. \tag{1.6.11}$$

Из равенств (1.6.11) следует относительная компактность Σ^+ (K). Согласно теореме 1.5.17 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна. Пусть теперь J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi); p \in J$, $\delta_p > 0$ и $K_p \in C(X)$ таковы, что имеет место равенство (1.6.10). По лемме 1.2.2 множество $\omega(B(p, \delta_p)) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), \omega(B(p, \delta_p))) = 0. \tag{1.6.12}$$

Так как J является максимальным компактным инвариантным множеством $(X, \mathbb{T}, \pi)$, то $\omega(B(p, \delta_p)) \subseteq J$ и из равенства (1.6.12) вытекает равенство (1.6.1). Согласно теореме 1.6.1 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна. Теорема доказана.

В конце этого параграфа приведем пример компактно диссипативной динамической системы, которая не является локально диссипативной.

Пример 1.6.6. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax \tag{1.6.13}$$

в гильбертовом пространстве $H := L_2[0,1]$ с непрерывным оператором $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определенным равенством $(A\varphi)(\tau) = -\tau\varphi(\tau)$ для любых $\tau \in [0,1]$ и $\varphi \in L_2[0,1]$. Заметим, что спектр оператора A совпадает с отрезком $[-1,0]$. Обозначим через $U(t)$ - оператор Коши уравнения (1.6.13), очевидно, $(U(t)\varphi)(\tau) = e^{-\tau t}\varphi(\tau)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0,1]$ и $\varphi \in L_2[0,1]$ (см. [**64**, с.404]). Обозначим через $(H, \mathbb{R}, \pi)$ динамическую систему, порожденную уравнением (1.6.13), т.е. $\pi(\varphi, t) := U(t)\varphi$ для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_2[0,1]$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$||\pi(t,\varphi)||^2 = \int_0^1 e^{-2\tau t}|\varphi(\tau)|^2 d\tau \to 0$$

при всех $t \to +\infty$. Поэтому, динамическая система $(H, \mathbb{R}, \pi)$ поточечно диссипативна и $\omega_\varphi = \{0\}$ для любого $\varphi \in H$, следовтельно, $\Omega = \overline{\cup\{\omega_\varphi | \varphi \in H\}} = \{0\}$. Далее, заметим что

$$||\pi(t,\varphi)||^2 = \int_0^1 e^{-2\tau t}|\varphi(\tau)|^2 d\tau \le \int_0^1 |\varphi(\tau)|^2 d\tau = ||\varphi||^2$$

при всех $t \ge 0$. Согласно теореме 1.5.16 динамическая система $(H, \mathbb{R}, \pi)$ компактно диссипативна и ее центр Левинсона $J = \{0\}$.

Покажем, что построенная динамическая система $(H, \mathbb{R}, \pi)$ не является локально диссипативной. Действительно, если бы $(H, \mathbb{R}, \pi)$ была локально диссипативной, то согласно теореме

1.6.2 существовало бы $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{||\varphi||\leq\gamma} ||\pi(t,\varphi)|| = 0. \tag{1.6.14}$$

В силу линейности системы $(H, \mathbb{R}, \pi)$ равенство (1.6.14) эквивалентно условию

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{||\varphi||\leq 1} ||\pi(t,\varphi)|| = 0. \tag{1.6.15}$$

Определим функцию $\varphi_n \in H \quad (n = 1, 2, \dots)$ по следующему правилу: $\varphi_n(\tau) := \sqrt{n}\chi_n(\tau)$ при всех $\tau \in [0, 1]$, где χ_n - характеристическая функция множества $[0, n^{-1}] \subseteq [0, 1]$. Заметим, что $||\varphi_n|| = 1$ и

$$\begin{aligned} ||\pi(t_n, \varphi_n)||^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n e^{-2\tau t} d\tau \\ &= \frac{n}{2t_n}\Big[1 - e^{-\frac{2t_n}{n}}\Big] = 1 - e^{-1} \not\to 0, \end{aligned} \tag{1.6.16}$$

где $t_n = \frac{n}{2}$. Однако (1.6.15) и (1.6.16) не могут иметь места одновременно. Полученное противоречие показывает, что наше допущение о локальной диссипативности $(H, \mathbb{R}, \pi)$ неверно. Нужный пример построен.

1.7. Глобальные аттракторы

Непустое компактное множество $I \subset X$ назовем глобальным аттрактором динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, если выполнены следующие условия:

a. I инвариантно относительно $(X, \mathbb{T}, \pi)$;
b. I притягивает все ограниченные подмножества из X.

Теорема 1.7.1. *Следующие условия эквиваленты:*

(1) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ допускает компактный глобальный аттрактор;*
(2) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограниченно k-диссипативна;*
(3) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно k-диссипативна и ее центр Левинсона J притягивает все ограниченные подмножества X.*

Доказательство. Импликация 1. $\Rightarrow$ 2. очевидна. Покажем, что из 2. следует 3.. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограниченно k-диссипативна, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно k-диссипативна. Обозначим через J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и покажем, что J притягивает все ограниченные подмножества из X. Пусть $B \in B(X)$ и K - непустой компакт из X, притягивающий все ограниченные подмножества из X, тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B, K) = 0. \tag{1.7.1}$$

Из равенства (1.7.1) и леммы 1.2.2 следует, что $\omega(B) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B, \omega(B)) = 0. \tag{1.7.2}$$

Согласно теореме 1.3.4 J является максимальным компактным инвариантным множеством $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и, следовательно, $\omega(B) \subseteq J$. Из последнего включения и равенства (1.7.2) следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B, J) = 0. \tag{1.7.3}$$

Наконец, очевидно, из 3. следует 1.. Теорема доказана.

Следуя **[47]** будем говорить, что динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской, если для любого ограниченного множества $B \subseteq X$ существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что имеет место равенство (1.7.1).

Теорема 1.7.2. *Следующие условия эквиваленты:*

(1) $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *ограниченно k-диссипативна;*
(2) $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *поточечно b-диссипативна и удовлетворяет условию Ладыженской.*

Доказательство. Согласно теореме 1.7.1 из a. следует b. Докажем теперь, что из b. следует a. Прежде всего заметим, что из условия b. следует компактная k-диссипативность. Пусть $K \in C(X)$, тогда из условия Ладыженской, леммы 1.2.2 и теоремы 1.2.5 вытекает относительная компактность $\Sigma^+(K)$. Согласно теореме 1.5.17 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно k-диссипативна. Обозначим через J центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и пусть $B \in B(X)$. Тогда в силу условия Ладыженской и леммы 1.2.2 $\omega(B) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и имеет место равенство (1.7.2). Так как $\omega(B) \subseteq J$, то из равенства (1.7.2) следует, что J притягивает B. Теорема доказана.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем:

- вполне непрерывной, если для любого $B \in B(X)$ существует $l = l(B) > 0$ такое, что $\pi^l B$ относительно компактно;
- слабо b-диссипативной, если существует непустое ограниченное множество $B_0 \subseteq X$ такое, что $\Sigma_x^+ \cap B_0 \neq \emptyset$ для любой точки x из X (т.е. для любого $x \in X$ найдется $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $x\tau \in B_0$). При этом множество B_0 назовем слабым b-аттрактором динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Теорема 1.7.3. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ слабо b-диссипативна и вполне непрерывна, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ допускает компактный глобальный аттрактор.*

Доказательство. Пусть $B_0 \in B(X)$ - слабый b-аттрактор системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, $l_0 = l(B_0) > 0$ таково, что $\pi^{l_0} B_0$ относительно компактно, и пусть $K := \overline{\pi^{l_0} B_0}$. Согласно условию теоремы 1.7.3 для любой точки $x \in X$ существует $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $x\tau \in B_0$ и, следовательно, $x(\tau + l_0) \in K$. Таким образом динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является слабо k диссипативной, а компакт K является ее слабым k-аттрактором. Согласно теореме 1.4.3 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно k-диссипативна. Пусть J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$, $B \in B(X)$ и $l = l(B) > 0$ таково, что $\pi^l B$ относительно компактно. Согласно теореме 1.3.4 центр Левинсона J притягивает компакт $\overline{\pi^l B}$ и, следовательно, имеет место равенство (1.7.3). Теорема доказана.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем асимптотически компактной, если для любого ограниченного положительно инвариантного множества $B \subseteq X$ (т.е. $\pi^t B \subseteq B$ при всех $t \geq 0$) существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что имеет место равенство (1.7.1).

Теорема 1.7.4. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно k-диссипативна и асимптотически компактна, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально k-диссипативна.*

Доказательство. Пусть J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Согласно теореме 1.6.2 для локальной k-диссипативности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ достаточно показать, что множество J является равномерно притягивающим. Пусть $\varepsilon_0 = 1$ и $\delta_0 = \delta(1) > 0$ - такие числа, что из $x \in B(J, \delta_0)$ следует $xt \in B(J, 1)$ при всех $t \geq 0$ (согласно теореме 1.3.4 такое δ_0 существует). Понятно, что множество $B := \cup\{\pi^t B(J, \delta_0) |\ t \geq 0\}$ ограничено и положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ существует непустой компакт $K \subseteq X$ такой, что имеет место равенство (1.7.1). Согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(B) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и имеет место равенство (1.7.2). Так как J является максимальным компактным инвариантным множеством $(X, \mathbb{T}, \pi)$, то $\omega(B) \subseteq J$ и, в частности, из (1.7.2) следует (1.7.3). Из равенства (1.7.3) и включения $B(J, \delta_0) \subseteq B$ следует равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(J, \delta_0), J) = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое семейство ограниченных подмножеств из X и K - непустое ограниченное (компактное) подмножество X. Напомним, что динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называется b (k)-диссипативной относительно семейства $\mathfrak{M}$, если

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, K) = 0 \tag{1.7.4}$$

при всех $M \in \mathfrak{M}$.

Лемма 1.7.5. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является b-диссипативной относительно семейства $\mathfrak{M}$ и асимптотически компактной, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является также k-диссипативной относительно семейства $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Найдется ограниченное замкнутое множество $B_0 \subseteq X$ такое, что для любого $M \in \mathfrak{M}$ найдется $L > 0$, для которого $\pi^t M \subseteq B_0$ при всех $t \geq L$. Положим $B := \{x \in B_0 \,|\, xt \in B_0$ при всех $t \geq 0\}$. Очевидно, $B \neq \emptyset$, ограничено и положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ найдется компактное множество

$K \subseteq B_0$ такое, что выполнено равенство (1.7.1). Согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(B) \neq \emptyset$, компактно и имеет место равенство (1.7.2). Заметим, что $M_L := \cup\{\pi^t M \mid t \geq L\} \subseteq B$ и M_L положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(M_L) \neq \emptyset$, компактно, $\omega(M_L) \subseteq \omega(B)$ и $\omega(M_L)$ притягивает M_L. Теперь для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что множество M притягивается компактом $\omega(M_L)$, значит, и компактом $\omega(B)$. Таким образом мы построили непустой компакт $\omega(B)$ притягивающий все множества из семейства $\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Следствие 1.7.6. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно (компактно, локально, ограниченно) b-диссипативна и асимптотически компактна, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно (компактно, локально, ограниченно) k-диссипативна.*

Следствие 1.7.7. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ асимптотически компактна, тогда локальная b-диссипативность и компактная b-диссипативность эквивалентны.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из следствия
1.7.6 и теоремы 1.7.4.

Теорема 1.7.8. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ слабо b-диссипативна;*
(2) *существует ограниченное множество $B_1 \subseteq X$, поглощающее все точки из X, т.е. для любого $x \in X$ существует $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $xt \in B_1$ при всех $t \geq \tau$;*
(3) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно k-диссипативна;*
(4) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ слабо k-диссипативна;*
(5) *динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограниченно k-диссипативна;*

(6) *существует ограниченное множество $B_2 \subseteq X$, поглощающее все ограниченные подмножества X, т.е. для любого $B \in B(X)$ существует $L = L(B) > 0$, что $\pi^t B \subseteq B_2$ при всех $t \geq L(B)$.*

Доказательство. Очевидно из 2. следует 1.. Покажем, что из 1. следует 3.. Пусть B_0 слабый аттрактор системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Так как $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской, то множество $K_1 := \omega(B_0) \neq \emptyset$, компактно и притягивает множество B_0. Так как для любого $x \in X$ существует $\tau = \tau(x) > 0$ такое, что $x\tau \in B_0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, K_1) = 0$.

Очевидно, из 3. следует 4.. Пусть выполнено условие 4. и $K_2 \subseteq X$ - непустой компакт такой, что $\omega_x \cap K_2 \neq \emptyset$ для любого $x \in X$, $\gamma > 0$ и $K_3 := \omega(B(K_2, \gamma))$. В условиях теоремы множество $K_3 \neq \emptyset$, компактно и притягивает $B(K_2, \gamma)$. Согласно условию 4. для каждого $x \in X$ найдется $\tau(x) > 0$ такое, что $x\tau \in B(K_2, \gamma)$ и, следовательно, x притягивается множеством K_3. Таким образом $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно k-диссипативна и согласно теореме 1.7.2 она ограничено k-диссипативна.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что из 5. следует 6., а из 6. вытекает 2.. Теорема доказана.

1.8. Об одной проблеме Дж.Хейла

Пусть $P : X \to X$ - непрерывное отображение и (X, P) каскад, порожденный положительными степенями отображения P.

Непрерывное отображение $P : X \to X$ называется λ сжатием порядка $k \in]0, 1[$, если $\lambda(P(A)) \leq k\lambda(A)$ для любого $A \in B(X)$, где λ некоторая мера некомпактности на X.

В работе **[212]** сформулирована следующая

Задача 1.8.1. (Проблема Дж.Хейла) *Пусть каскад (X, P) поточечно b-диссипативен и отображение P является λ сжатием. Существует ли в (X, P) максимальное компактное инвариантное множество?*

В связи с проблемой Дж.Хейла нам представляется интересной следующая

Задача 1.8.2. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно b-диссипативна. Найти условия, при которых динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ допускает максимальное компактное инвариантное множество.*

Ниже приводятся некоторые результаты в связи с сформулированной задачей.

С одной стороны пример 1.5.18 показывает, что не всякая поточечно k-диссипативная динамическая система обладает максимальным компактным инвариантным множеством. С другой стороны, согласно теореме 1.3.4 для компактно k-диссипативной системы центр Левинсона является максимальным компактным инвариантным множеством.

Имеет место следующая

Лемма 1.8.3. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно k-диссипативна и $J^+(\Omega)$ компактно, тогда в $(X, \mathbb{T}, \pi)$ имеется максимальное квазиинвариантное множество $I \subseteq J^+(\Omega)$.*

Доказательство. Обозначим через I^* - класс всех непустых компактных квазиинвариантных подмножеств $A \subseteq J^+(\Omega)$. Заметим, что $I^* \neq \emptyset$, так как согласно следствию 1.5.7 $\Omega \in I^*$.

Обозначим через I - замыкание объединения всех квазиинвариантных подмножеств $J^+(\Omega)$. Согласно теореме 1.1.3 множество I квазиинвариантно и, очевидно, является искомым. Лемма доказана.

Следствие 1.8.4. *В условиях леммы 1.8.3 множество I является инвариантным.*

Доказательство. Действительно, так как I квазиинвариантно, то при всех $t \in \mathbb{T}$ множество $\pi^t I$ также квазиинвариантно и компактно, и согласно лемме 1.5.6 $\pi^t I \subseteq J^+(\Omega)$. По лемме 1.8.3 множество I является максимальным компактным квазивариантным множеством и, следовательно, $\pi^t I \subseteq I$ т.е. $\pi^t I = I$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Итак, если $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно k-диссипативна и $J^+(\Omega)$ компактно, то в $(X, \mathbb{T}, \pi)$ существует максимальное компактное инвариантное множество $I \subseteq J^+(\Omega)$. Как показывает пример 1.5.19, существуют поточечно k-диссипативные динамические системы, не являющиеся компактно k-диссипативными, для которых $J^+(\Omega)$ компактно.

Лемма 1.8.5. *Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Для того чтобы динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ была асимптотически компактной, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $t_0 > 0$ каскад (X, P) был асимптотически компактным, где $P := \pi^{t_0} : X \longrightarrow X$.*

Доказательство. Необходимость леммы очевидна. Пусть $M \subseteq X$ - ограниченное положительно инвариантное множество $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Тогда $P(M) \subseteq M$ и в силу асимптотической компактности каскада (X, P) найдется компакт $K_0 \in C(X)$ такой, что

$$\lim_{n \to +\infty} \beta(P^n(M), K_0) = 0. \tag{1.8.1}$$

Положим $K := \pi([0, t_0], K_0)$. В силу непрерывности отображения $\pi : \mathbb{T} \times X \longrightarrow X$ и компактности множества $[0, t_0] \times K_0$ множество K компактно. Покажем, что имеет место равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} \beta(\pi^t M, K) = 0$. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0,\ t_n \to +\infty$ и $\{x_n\} \subseteq M$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, K) \geq \varepsilon_0. \tag{1.8.2}$$

Пусть $t_n = k_n t_n + \tau_n$, где k_n - целая часть $t_n t_0^{-1}$ и $\tau_n \in [0, t_0]$. Тогда $\pi(t_n, x_n) = \pi(\tau_n, \pi(k_n t_0, x_n))$. Учитывая равенство (1.8.1), последовательность $\{\pi(k_n t_0, x_n)\}$ можно считать сходящиеся. Пусть $\tau_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$ и $y_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \pi(k_n t_0, x_n)$, тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi(t_n, x_n) = \pi(\tau_0, y_0)$. Так как $y_0 \in K_0$, то $\pi(\tau_0, y_0) \in K$. С другой стороны, переходя в (1.8.2) к пределу, тогда $n \to +\infty$, мы получим $\rho(\pi(\tau_0, y_0), K) \geq \varepsilon_0$, т.е. $y_0 \tau_0 \notin K$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Напомним (см. [**84**],[**96**] и [**215**]), что непрерывное отображение $P : X \longrightarrow X$ называют уплотняющим относительно меры некомпактности λ, если $\lambda P(A) < \lambda(A)$ для любого $A \in B(X)$, такого что $\lambda(A) > 0$.

Лемма 1.8.6. **[96]** *Пусть* $P : X \to X$ *- непрерывное* λ *уплотняющее отображение, тогда каскад* (X, P) *является асимптотически компактным.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого ограниченного множества $B \subset X$ с условием $P(B) \subseteq B$ и последовательности $\{k_j\}$ с целыми $k_j \to +\infty$ множество $\{P^{k_j}x_j\}$ относительно компактно. Пусть $C = \{\{P^{k_j}x_j\} : \{x_j\} \subseteq B,\ \{k_j\}$ целые, $0 \leq k_j \to +\infty\}$. Положим $\eta := \sup\{\lambda(h) : h \in C\}$. Так как $h \subseteq B$, если $h \in C$, то $\eta < \lambda(B)$. Докажем существование такого $h^* \in C$, что $\lambda(h^*) = \eta$. Пусть $\{h_l\}$ - последовательность элементов множества C, для которой $\lambda(h_l) \to \eta$. Определим $\widetilde{h}_l := \big\{P^{k_j}x_j : P^{k_j}x_j \in h_l,\ k_j > l\big\}$. Тогда $\lambda(\widetilde{h}_l) = \lambda(h_l)$. Если $h^* = \cup\{\widetilde{h}_l|\ l = 1, 2, \dots\}$ упорядочено любым образом, то $h^* \in C$ и $\lambda(h^*) \geq \lambda(h_l)$ для каждого l. Поэтому $\lambda(h^*) = \eta$. Положим $\widetilde{h}^* := \big\{P^{k_j-1}x_j : P^{k_j}x_j \in h^*\big\}$. Тогда $\widetilde{h}^*C$ и $\lambda(\widetilde{h}^*) \leq \eta$. Но $P(\widetilde{h}^*) = h^*$, так что $\lambda(P(\widetilde{h}^*)) \geq \lambda(\widetilde{h}^*)$, откуда следует $\lambda(\widetilde{h}^*) = 0$, поскольку P является λ уплотняющим. Поэтому $\widetilde{h}^*$ и h^* относительно компактны и $\eta = 0$. Таким образом, каждая последовательность в C относительно компактна.

Согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(B) \neq \emptyset$, компактно, инвариантно и имеет место равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \beta(P^n(B), \omega(B)) = 0. \tag{1.8.3}$$

Лемма доказана.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем локально ограниченной, если для любого $x \in X$ существуют $\delta_x > 0$ и $l_x > 0$ такие, что множество $\cup\{\pi^t B(x, \delta_x) : t \geq l_x\}$ ограничено.

Пример 1.5.18 показывает, что существуют поточечно диссипативные и локально ограниченные динамические системы, которые не являются компактно диссипативными.

Будем говорить что $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является λ уплотняющей, если $\lambda(\pi^t B) < \lambda(B)$ при всех $B \in B(X), t \in \mathbb{T}, \lambda(B) > 0$ и $\pi^t B \in B(X)$.

Теорема 1.8.7. *Пусть* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *поточечно* b*-диссипативна и локально ограничена и является* λ *уплотняющей, тогда* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *локально* k*-диссипативна.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - λ уплотняющая динамическая система, тогда согласно леммам 1.8.5 и 1.8.6 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ асимптотически компактна. Из следствия 1.7.6 вытекает, что динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно k диссипативна. Пусть $p \in X$, $\delta_p > 0$ и $l_p > 0$ - числа из определения локальной ограниченности $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Рассмотрим множество $M_p := \cup\{\pi^t B(p, \delta_p) : t \geq l_p\}$. Оно является ограниченным и положительно инвариантным. В силу асимптотической компактности $(X, \mathbb{T}, \pi)$ найдется компактное множество $K_p \in C(X)$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(p, \delta_p), K_p) = 0. \tag{1.8.4}$$

Согласно теореме 1.6.5 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально диссипативна. Теорема доказана.

Теорема 1.8.8. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно b-диссипативна и является λ уплотняющей. Если для любого $p \in \Omega$ существуют $\delta_p > 0$ и $l_p > 0$ такие, что $\cup\{\pi^t B(p, \delta_p) | \ t \geq l_p\} \in B(X)$, то динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ локально k-диссипативна.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно b-диссипативна и является λ уплотняющей. Тогда согласно леммам 1.8.5 и 1.8.6 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является асимптотически компактной. По следствию 1.7.6 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно k-диссипативна и, следовательно, $\Omega \neq \emptyset$ и компактно. Из открытого покрытия $\{B(p, \delta_p) | \ p \in \Omega\}$ компактного множества Ω выберем конечное подпокрытие $\{B(p_i, \delta_{p_i}) \ | i \in \overline{1, m}\}$. Положим, $l_0 = \max\{l_{p_i} \ | \ i \in \overline{1, m}\}$. Согласно лемме 1.4.1 существует $\gamma > 0$ такое, что $B(\Omega, \gamma) \subset \cup\{B(p_i, \delta_{p_i}) | \ i = \overline{1, m}\}$. Если $x \in X$, то существует $l(x) > 0$ такое, что $xl \in B(\Omega, \gamma)$. Так как $B(\Omega, \gamma)$ открыто, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B(xl, \varepsilon) \subset B(\Omega, \gamma)$. В силу непрерывности отображения $\pi^l : X \longrightarrow X$ найдется $\delta_x > 0$ такое, что $yl \in B(xl, \varepsilon)$ при всех $y \in B(x, \delta)$ и, следовательно, $\cup\{\pi^t B(x, \delta) | \ t \geq l_0 + l(x)\}$ ограничено. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 1.8.7.

Теоремы 1.8.7 и 1.8.8 дают решение проблемы Дж.Хейла для локально ограниченных динамических систем.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем компактно ограниченной, если для любого компакта $K \in C(X)$ множество $\Sigma^+(K) \in B(X)$.

Имеет место следующая

Теорема 1.8.9. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ поточечно b-диссипативна, компактно ограничена и является λ уплотняющей, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно b-диссипативна.*

Доказательство. Согласно леммам 1.8.5 и 1.8.6 $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является асимптотически компактной и, следовательно, $(X,\mathbb{T},\pi)$ поточечно k-диссипативна. Так как $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно ограничена $\Sigma^+(K)$ положительно инвариантно и $(X, \mathbb{T}, \pi)$ асимптотически компактна, то $\Sigma^+(K)$ относительно компакт- но для любого $K \in C(X)$ и согласно теореме 1.5.17 $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно k-диссипативна.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}, \pi)$ назовем ограниченной, если для любого $B \in B(X)$ множество $\Sigma^+(B) \in B(X)$.

Теорема 1.8.10. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограничена и является λ уплотняющей, тогда $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ограниченно k-диссипативна.*

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 1.8.7.

В заключении этого параграфа приведем пример поточечно диссипативной, но не локально ограниченной динамической системы, которая не имеет максимального компактного инвариантного множества.

Пример 1.8.11. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - функция обладающая следующими свойствами:

(1) $\varphi(0) = 0$;
(2) $\operatorname{supp}(\varphi) = [0, 2]$;
(3) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(4) $\varphi(1) = 1$;
(5) φ монотонно возрастает от 0 до 1 и убывает от 1 до 2;
(6) $x\varphi(x^{-1}) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Функцию φ, удовлетворяющую условиям 1. – 6. можно построить, например, следующим образом. Пусть

$$\varphi_0(t) := \begin{cases} \exp\left([t^2 - 1]^{-1} + 1\right) & , |t| < 1 \\ 0 & , |t| \geq 1. \end{cases}$$

Тогда функция $\varphi(t) := \varphi_0(t+1)$ является искомой. Положим $X := \{a\varphi\left(\frac{t}{a}+h\right) \mid h \in \mathbb{R},\ a > 0\} \cup \{\theta\}$, где θ - функция из $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ тождественно равная нулю. Можно показать, что множество X замкнуто в $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и инвариантно относительно сдвигов. Поэтому на X индуцируется динамическая система (на $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ определена динамическая система сдвигов - система Бебутова), которую обозначим через $(X,\mathbb{R},\sigma)$. Отметим некоторые свойства, построенной системы:

(1) какова бы ни была функция $\psi \in X$ множество $\{\sigma(t,\psi) : t \in \mathbb{R}\}$ относительно компактно и $\omega_\psi = \alpha_\psi = \{\theta\}$;
(2) динамическая система $(X,\mathbb{R},\sigma)$ поточечно диссипативна и $\Omega := \overline{\cup\{\omega_x \mid x \in X\}} = \{\theta\}$;
(3) $D^+(\Omega) = X$ и, следовательно, динамическая система $(X,\mathbb{R},\sigma)$ не является компактно диссипативной, так как X, очевидно, не компактно;
(4) динамическая система $(X,\mathbb{R},\sigma)$ не является локально ог-
раниченной;

Действительно, каково бы ни было $\delta > 0$ имеем $\Sigma^+(B(\theta,\delta)) := \cup\{\pi^t B(\theta,\delta) : t \geq 0\} = X$. Отсюда следует, что множество $\Sigma^+(B(\theta,\delta))$ не является ограниченным ни при каком $\delta > 0$.

5. динамическая система $(X,\mathbb{R},\sigma)$ не имеет максимального компактного инвариантного множества.

Нужный пример построен.

1.9. Связность центра Левинсона

В этом параграфе приводятся условия связности центра Левинсона компактно диссипативной динамической системы.

Лемма 1.9.1. *Пусть для $M_1, M_2 \in C(X)$ $W^s(M_1) \neq \emptyset$ и $W^s(M_2) \neq \emptyset$. Тогда:*

(1) *Если $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) \neq \emptyset$, то $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.*
(2) *Если $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) = \emptyset$.*
(3) *Если множества M_1 и M_2 являются притягивающими и $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) = \emptyset$, то $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.*

(4) *Если множества M_1 и M_2 являются притягивающими и $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, то $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Напомним, что замкнутое (открытое) полуинвариантное множество $M \subseteq X$ динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ называют неразложимым, если оно представимо в виде дизъюнктного объединения двух своих замкнутых (открытых) полуинвариантных подмножеств.

Лемма 1.9.2. *Пусть M - непустое компактное полуинвариантное неразложимое подмножество X и $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, тогда M связно.*

Доказательство. Допустим, что M несвязно. Тогда существуют непустые замкнутые подмножества M_1 и $M_2 \subseteq X$ такие, что $M = M_1 \sqcup M_2$. Пусть $x \in M_1$ и $\mathbb{T}_i = \{t \in \mathbb{T} \mid xt \in M_i\}$ $(i = 1, 2)$. Тогда в силу непрерывности отображения $\pi(\cdot, x) : \mathbb{T} \to X$ множества $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ замкнуты, $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \emptyset$ и $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$. Из связности $\mathbb{R}_+$ следует, что $\mathbb{T}_2 = \emptyset$ и, следовательно, M_1 полуинвариантно. Аналогично показывается, что M_2 также полуинвариантно. Последнее противоречит неразложимости M. Лемма доказана.

Лемма 1.9.3. *Пусть $M \in C(X)$ орбитально устойчиво, $M = M_1 \cup M_2$ и каждое из множеств M_1 и M_2 непусто и полуинвариантно, тогда:*

1) *Множества M_1 и M_2 орбитально устойчивы.*
2) *$W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$.*
3) *Если множество M асимптотически устойчиво, то множества M_1 и M_2 также асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Пусть $d = \rho(M_1, M_2) > 0$. Для числа $d/2$ подберем число δ_2 такое, что $\rho(x, M_i) < \delta_2$ $(i = 1, 2)$ влечет $\rho(xt, M_i) < d/2$ при всех $t \in [0, 1]$. Пусть число $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < d/2)$ и $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, M)$ – положительное число из условия орбитальной устойчивости множества M. Положим $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$ и покажем, что из $\rho(x, M_1) < \delta(\varepsilon)$ следует, что $\rho(xt, M_1) < \varepsilon$

при всех $t \geq 0$. Действительно, если $\rho(x, M_1) < \delta(\varepsilon)$, то $\rho(x, M) < \delta(\varepsilon)$ и, следовательно, $\rho(xt, M) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Положим

$$\mathbb{T}_i = \{t \in \mathbb{T} \mid \rho(xt, M_i) < \varepsilon\} \ (i = 1, 2).$$

Заметим, что если $\mathbb{T}$ связно, то $\mathbb{T}_2 = \emptyset$ и, следовательно, $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$.

Рассмотрим случай дискретного $\mathbb{T}$ и покажем, что и в этом случае также $\mathbb{T}_2 = \emptyset$. Допустим, что $\mathbb{T}_2 \neq \emptyset$ и положим $t_0 = \inf \mathbb{T}_2$. Очевидно, $t_0 > 1$, $t_0 \in \mathbb{T}_2$ и $t_0 - 1 \in \mathbb{T}_1$. Заметим, что для точки $y := x(t_0 - 1)$ имеем $\rho(y, M_1) < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\rho(y, M_1) < d/2. \tag{1.9.1}$$

С другой стороны

$$\rho(y, M_1) \geq \rho(M_1, M_2) - \rho(y, M_2) > d/2. \tag{1.9.2}$$

Неравенства (1.9.1) и (1.9.2) противоречивы. Таким образом наше допущение о том, что $\mathbb{T}_2 \neq \emptyset$ не верно и, следовательно, $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$, то есть множество M_1 орбитально устойчиво. Аналогично доказывается орбитальная устойчивость M_2, что и завершает доказательство первого утверждения.

Покажем теперь, что $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $W^s(M) \subset W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$. Пусть $0 < \varepsilon < d/2$ и $\delta(\varepsilon) = \min(\delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$, где $\delta(\varepsilon)$ ($\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$) выбраны из условия орбитальной устойчивости M (M_1, M_2). Тогда для любой точки $x \in W^s(M)$ найдется $t_0 \geq 0$ такое, что $\rho(xt_0, M) < \delta(\varepsilon)$. Имеет место одно из двух условий: 1. $\rho(xt_0, M_1) < \delta(\varepsilon)$ или 2. $\rho(xt_0, M_2) < \delta(\varepsilon)$. Если имеет место 1., то $\rho(xt, M_1) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, $\omega_x \subseteq B(M_1, \varepsilon)$ и $\omega_x \cap M_2 = \emptyset$, то есть $\omega_x \subseteq M_1$ и $x \in W^s(M_1)$. Если имеет место 2., то $\rho(xt, M_2) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, $\omega_x \subseteq B(M_2, \varepsilon)$ и $\omega_x \cap M_1 = \emptyset$, то есть $\omega_x \subseteq M_2$ и $x \in W^s(M_2)$.

Установим, что имеет место третье утверждение. Для этого достаточно показать, что каждое из множеств M_1 и M_2 является притягивающим. Так как M асимптотически устойчиво, то существует число $\gamma > 0$ такое, что $B(M, \gamma) \subset W^s(M)$, $B(M, \gamma) = B(M_1, \gamma) \sqcup B(M_2, \gamma)$ и $\gamma < d/2$, где $d = \rho(M_1, M_2) > 0$. Для числа γ выберем $\delta = \delta(M_1, \gamma) > 0$ ($\delta = \delta(M_2, \gamma) > 0$) из условия орбитальной устойчивости M_1 (M_2). Тогда, если $x \in B(M_1, \delta)$ ($x \in B(M_2, \delta)$), то $xt \in B(M_1, \gamma)$ ($xt \in B(M_2, \gamma)$)

для всех $t \geq 0$ и, следовательно, $\omega_x \subseteq B(M_1, \gamma)$ ($\omega_x \subseteq B(M_2, \gamma)$, то есть $x \in W^s(M_1)$ ($x \in W^s(M_2)$). Таким образом $B(M_1, \delta) \subseteq W^s(M_1)$ ($B(M_2, \delta) \subseteq W^s(M_2)$). Лемма полностью доказана.

Теорема 1.9.4. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ – компактно диссипативная динамическая система и J – ец центр Левинсона. Если пространство X неразложимо, то J также неразложимо.*

Доказательство. Покажем, что если X неразложимо, то и J обладает этим свойством. Допустим, что это не так, тогда существуют непустые компактные полуинвариантные подмножества J_1, $J_2 \subseteq J$ такие, что $J = J_1 \sqcup J_2$. Так как J асимптотически устойчиво, то согласно лемме 1.9.3 этим же свойством обладает и каждое из множеств J_1 и J_2, $X = W^s(J) = W^s(J_1) \cup W^s(J_2)$ и кроме того, согласно леммам 1.3.7 и 1.9.3, каждое из множеств $W^s(J_1)$ и $W^s(J_2)$ открыто. Из леммы 1.9.1 следует, что $W^s(J_1) \cap W^s(J_2) = \emptyset$. Последнее противоречит неразложимости J.

Лемма 1.9.5. *Пусть M – непустое компактное полуинвариантное притягивающее подмножество X. Если M неразложимо и $W^s(M)$ замкнуто, то и $W^s(M)$ неразложимо.*

Доказательство. Предположим, что условие леммы выполнено, но $W^s(M)$ разложимо. Тогда $W^s(M)$ можно представить в виде дизъюнктного объединения двух своих замкнутых полуинвариантных подмножеств A_1 и A_2. Ясно, что $M \subseteq A_1 \cup A_2$. Далее заметим, что для любой точки $x \in A_1$ $\emptyset \neq \omega_x \subseteq M \cap A_1$ и для любой точки $y \in A_2$ $\emptyset \neq \omega_x \subset M \cap A_2$ и, следовательно, $M_i = M \cap A_i \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ и $M_1 \cup M_2$. Последнее противоречит неразложимости M.

Следствие 1.9.6. *Если $M \in C(X)$ – притягивающее и связное множество, то $W^s(M)$ связно.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из лемм 1.9.2 и 1.9.5.

Следствие 1.9.7. *Пусть $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ – компактно диссипативная динамическая система и J – ец центр Левинсона. Множество J является связным тогда и только тогда, когда множество X связно.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы
1.9.4, леммы 1.9.2 и следствия 1.9.6.

Замечание 1.9.8. *Различные варианты этого утверждения содержатся в работах* **[13]**,**[59]**,**[96]**,**[215]** *(см. также ссылки в них).*

Следствие 1.9.9. *Для компактно диссипативной динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ из неразложимости ее центра Левинсона следует неразложимость пространства X.*

Теорема 1.9.10. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ – компактно диссипативная динамическая система и J – ее центр Левинсона. Множество J является неразложимым тогда и только тогда, когда пространство X неразложимо.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 1.9.4 и следствия 1.9.6.

Лемма 1.9.11. *Пусть $M \in C(X)$ – асимптотически устойчивое множество. Если $W^s(M)$ неразложимо, то и M неразложимо.*

Доказательство. Допустим противное, то есть компактное множество M асимптотически устойчиво и $W^s(M)$ неразложимо, но M разложимо. Тогда существуют непустые компактные полуинвариантные подмножества M_1 и M_2 множества M такие, что $M = M_1 \sqcup M_2$. В силу леммы 1.9.1 $W^s(M_1) \cap W^s(M_2) = \emptyset$. Так как M асимптотически устойчиво, то согласно лемме 1.9.3 этим же свойством обладает каждое из множеств M_1 и M_2 и $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2)$. Множества $W^s(M_1)$ и $W^s(M_2)$ полуинвариантны и согласно леммам 1.3.7 и 1.9.3 каждое из множеств $W^s(M_1)$ и $W^s(M_2)$ открыто, что противоречит неразложимости $W^s(M)$.

Следствие 1.9.12. *Пусть $M \in C(X)$ – асимптотически устойчивое множество. Множество M является связным тогда и только тогда, когда множество $W^s(M)$ связно.*

Теорема 1.9.13. *Пусть X локально связно. Если $M \in C(X)$ – непустое полуинвариантное равномерно притягивающее множество, то M имеет конечное число компонент связности.*

Доказательство. Согласно лемме 1.3.7 множество $W^s(M)$ открыто. Так как пространство X локально связно, то $W^s(M)$ также локально связно. Покроем M конечным числом связных открытых множеств $H_1, H_2, \ldots, H_m$, удовлетворяющих условию $H = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m \subset W^s(M)$. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_k$ – компоненты связности открытого множества H. Тогда множества $V_1, V_2, \ldots, V_k$ попарно не пересекаются и содержатся в $W^s(M)$. Обозначим $M_i := M \cap V_i$ $(i = \overline{1,k})$. Заметим, что $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$, множества $M_1, M_2, \ldots, M_k$ не пересекаются и согласно лемме 1.9.1 $W^s(M_1), W^s(M_2), \ldots, W^s(M_k)$ также попарно не пересекаются.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, то каждое множество M_i замкнуто, полуинвариантно и согласно лемме 1.9.3 каждое из множеств M_i асимптотически устойчиво, $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2) \cup \cdots \cup W^s(M_k)$ и $V_i \subset W^s(M_i)$. Каждое из множеств M_i $(i = \overline{1.k})$ полуинвариантно и согласно лемме 1.3.7 открыто. Докажем связность множеств M_i $(i = \overline{1.k})$. Предположим противное, то есть допустим, что M_i можно представить в виде объединения двух замкнутых непустых непересекающихся полуинвариантных множеств M_i' и M_i'' в V_i. Согласно лемме 1.9.1 $W^s(M_i') \cap W^s(M_i'') = \emptyset$. Заметим, что множества M_i' и M_i'' асимптотически устойчивы и $W^s(M_i) = W^s(M_i') \cup W^s(M_i'')$. Множества M_i' и M_i'' открыты и полуинвариантны. Последнее противоречит связности V_i.

Пусть теперь (X, f) – каскад. Так как M – равномерно притягивающее множество, то для достаточно большого номера m имеем $f^m(H) \subset H$. Тогда $f^m(V_i) \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$. В силу связности множеств $V_1, V_2, \ldots, V_k$ и непрерывности f множества $f^m(V_i)$ $i = \overline{1,k}$ связны и, следовательно, для каждого номера i существует единственный номер j такой, что $f^m(V_i) \subset V_j$. Пусть, как и выше, $M_i = M \cap V_i$ $(i = \overline{1,k})$. Тогда $f^m(M_i) \subseteq f^m(M) \cap f^m(V_i) \subseteq M \cap V_j = M_j$. Так как множество M полуинвариантно, то $f^m(M) \subseteq M$ и, следовательно, $f^m(M_i) \subseteq M_j$. Таким образом, отображение f^m осуществляет перестановку множеств $M_1, M_2, \dots, M_k$. Следовательно, существует такой номер n, что $f^n(M_i) \subset M_i$ $(i = \overline{1,k})$, то есть каждое из множеств $M_1, M_2, \dots, M_k$ является полуинвариантным относительно отображения f^n. Тогда согласно лемме 1.9.3 каждое из множеств $M_1, M_2, \dots, M_k$ является асимптотически устойчивым относительно каскада (X, f^n) и $W^s(M) = W^s(M_1) \cup W^s(M_2) \cup \dots \cup W^s(M_k)$. Заметим, что $f^n(V_i) \subseteq V_i$ и $V_i \subset W^s(M_i)$ $(i = \overline{1,k})$. Далее, повторяя те же рассуждения, что и в случае $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, получим связность множества M_i. Теорема полностью доказана.

Теорема 1.9.14. *Пусть $(X, \mathbb{Z}_+, f)$ – локально диссипативная динамическая система и J – ее центр Левинсона. Если пространство X связно и локально связно, то J связно.*

Доказательство. Если пространство X связно и локально связно, то согласно теоремам 1.6.2 и 1.9.13 центр Левинсона каскада $(X, \mathbb{Z}_+, f)$ состоит из конечного числа компонент связности $J_1, J_2, \dots, J_k$. Как было установлено при доказательстве теоремы 1.9.13, существует натуральное число n такое, что $f^n(J_i) \subseteq J_i$ $(i = \overline{1,k})$. Положим $P := f^n$ и рассмотрим каскад (X, P), порожденный положительными степенями P. Заметим, что каскад (X, P) компактно диссипативен и удовлетворяет условию: $J = J_1 \sqcup J_2 \sqcup \dots \sqcup J_k$. Кроме этого $P(J_i) \subseteq J_i$ $(i \in \overline{1,k})$. Таким образом, центр Левинсона $\tilde{J}$ каскада (X, P) является разложимым, что противоречит теореме 1.9.4, так как X связно, следовательно, неразложимо. Теорема доказана.

Замечание 1.9.15. *Заметим, что лишь одно требование связности X, без локальной связности, не гарантирует связности центра Левинсона J каскада (X, f) (см.* **[205]***).*

Будем говорить, что метрическое пространство X обладает свойством (S), если для любого компакта $K \subseteq X$ существует связный компакт $I \subseteq X$ такой, что $K \subseteq I$.

Замечание 1.9.16. *а) Если пространство X обладает свойством (S), то оно связно.*

b) Можно построить примеры связных пространств, не обладающих свойством (S).

c) Всякое линейное метрическое пространство обладает свойством (S). *Действительно, если* $K \subseteq X$ *- компакт, то* $L(K) = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid x, y \in K,\ 0 \le \lambda \le 1\}$ *- связный компакт и* $K \subseteq L(K)$.

Теорема 1.9.17. *Если* $(X, \mathbb{Z}_+, f)$ *- компактно диссипативная динамическая система,* J *- ец центр Левинсона и пространство* X *обладает свойством* (S), *то множество* J *связно.*

Доказательство. Пусть X обладает свойством (S). Допустим, что J не является связным. Тогда существуют открытые подмножества U_1 и U_2, что $J \subset U_1 \cup U_2$, $J \cap U_i \neq \emptyset$ $(i \in \overline{1,2})$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Пусть I – некоторый связный компакт, содержащий J. Тогда $f(t, I)$ является компактным и связным для любого $t \in \mathbb{Z}_+$. Так как $J \subset I$ и $f(t, J) = J$ $(t \in \mathbb{Z}_+)$, то $J \subset f(t, I)$ и, следовательно, $f(t, I) \cap U_i \neq \emptyset$ $(i = \overline{1,2}$, $t \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $t_n \to +\infty$. В силу связности $f(t_n, I)$ всегда существует $x_n \in f(t_n, I)$ такой, что $x_n \notin U_1 \cup U_2$. Так как система $(X, \mathbb{Z}_+, f)$ компактно диссипативна, то последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Пусть $x_n \to x$ при $t_n \to +\infty$. Поскольку, с одной стороны, $x \notin U_1 \cup U_2$ и, с другой стороны, $x \in J \subseteq U_1 \cup U_2$, то получено противоречие, которое и доказывает теорему.

Следствие 1.9.18. *Пусть* X *– полное линейное метрическое пространство. Центр Левинсона компактно диссипативного каскада* $(X, \mathbb{Z}_+, f)$ *является связным множеством.*

Замечание 1.9.19. *a) В случае, когда* X*- банахово пространство, следствие 1.9.18 содержится в работе* [**238**].

b) Существуют примеры компактно диссипативной динамической системы $(X, \mathbb{Z}_+, f)$ *с несвязным пространством* X *и связным центром Левинсона.*

1.10. Слабые аттракторы и центр Левинсона

Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ - компактно диссипативная динамическая система. Напомним, что компактное множество $M \subseteq X$ называется слабым аттрактором системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, если $\omega_x \cap M \neq \emptyset$

при всех $x \in X$. Настоящий параграф посвящен установлению связей между слабыми аттракторами системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и ее центром Левинсона J.

Точку $p \in X$ назовем равномерно устойчивой по Лагранжу в положительном направлении, если $\{x_k t_k\}$ относительно компактна, каковы бы ни были $\{x_k\} \to p$ и $\{t_k\} \to +\infty$.

Теорема 1.10.1. *Для того чтобы точка $p \in X$ была равномерно устойчивой по Логранжу в положительном направлении, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(1) $J_p^+ := \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} \pi^\tau B(p,\varepsilon)} \neq \emptyset$ *и компактно;*

(2) J_p^+ *инвариантно;*

(3)
$$\lim_{x\to p, t\to+\infty} \rho(xt, J_p^+) = 0. \tag{1.10.1}$$

Доказательство. Пусть $p \in X$, $x_n \to p$ и $t_n \to +\infty$. Тогда в условиях теоремы последовательность $\{x_n t_n\}$ относительно компактна. Если y - предельная точка последовательности $\{x_k t_k\}$, то $y \in J_p^+ \neq \emptyset$. Покажем, что J_p^+ компактно. Пусть $\{y_m\} \subseteq J_p^+$, $\varepsilon_m \downarrow 0, k_m \in \mathbb{N}$ и $x_k^m \to p$ и $t_k^m \to +\infty$ при $k \to +\infty$ (при каждом натуральном $m \in \mathbb{N}$) такие, что:

a. $x_k^m t_k^m \to y_m$ при $k \to +\infty$ $(m \in \mathbb{N})$;

b. $\rho(x_{k_m}^m, p) < \varepsilon_m$;

c. $t_{k_m}^m > m$ и $\rho(x_{k_m}^m t_{k_m}^m, y_m) < \varepsilon_m$.

Положим $\overline{x}_m = x_{k_m}^m$ и $\bar{t}_m = t_{k_m}^m > m$, тогда $\overline{x}_m \to p$ и $\bar{t}_m \to +\infty$ и, следовательно, в условиях теоремы последовательность $\{\overline{x}_m \bar{t}_m\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{y} = \lim\limits_{m\to+\infty} \overline{x}_m \bar{t}_m$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(y_m, \overline{y}) &\leq \rho(y_m, \overline{x}_m \bar{t}_m) + \rho(\overline{x}_m \bar{t}_m, \overline{y}) \\ &< \varepsilon_m + \rho(\overline{x}_m \bar{t}_m, \overline{y}). \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

Переходя к пределу в неравенстве (1.10.2), когда $m \to +\infty$, мы получим $\overline{y} = \lim\limits_{m\to+\infty} y_m$, т.е. J_p^+ компактно.

Покажем, что J_p^+ инвариантно, т.е. $\pi^t J_p^+ = J_p^+$ при всех $t \in T$. Прежде всего заметим, что непосредственно из определения J_p^+ вытекает его полуинвариантность, т.е. $\pi^t J_p^+ \subseteq J_p^+$

при всех $t \in T$. Таким образом для инвариантности J_p^+ достаточно показать, что $J_p^+ \subseteq \pi^t J_p^+$ при всех $t \in T$. Пусть $q \in J_p^+$ и $t \in T$. Тогда существуют $x_k \to p$ и $t_k \to +\infty$ такие, что $q = \lim_{k\to+\infty} x_k t_k = \lim_{k\to+\infty} \pi^t(\pi^{t_k - t} x_k)$. Так как $t_k - t \to +\infty$ и $x_k \to p$, то последовательность $\{x_k(t_k - t)\}$ относительно компактна. Не умаляя общности рассуждений, можно считать последовательность $\{x_k(t_k - t)\}$ сходящейся. Положим $z = \lim_{k\to+\infty} x_k(t_k - t)$, тогда $q = \pi^t z$, т.е. $J_q^+ \subseteq \pi^t J_q^+$.

Наконец покажем, что имеет место равенство (1.10.1). Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $x_k \to p$ и $t_k \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_k t_k, J_p^+) \geq \varepsilon_0. \tag{1.10.3}$$

В силу равномерной устойчивости по Лагранжу в положительном направлении точки p последовательность $\{x_k t_k\}$ можно считать сходящейся. Положим $q = \lim_{k\to+\infty} x_k t_k$, тогда $q \in J_p^+$. Переходя к пределу в неравенстве (1.10.3) при $k \to +\infty$, мы получим $\rho(q, J_q^+) \geq \varepsilon_0$, т.е. $q \notin J_p^+$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что из условия 3. и 1. вытекает равномерная устойчивость по Лагранжу в положительном направлении точки p. Теорема полностью доказана.

Лемма 1.10.2. *Пусть $M \neq \emptyset$ и компактно, тогда имеет место равенство*

$$J^+(M) = \cup\{J_m^+ | m \in M\}. \tag{1.10.4}$$

Доказательство. Очевидно имеет место включение $J_m^+ \subseteq J^+(M)$ для любого $m \in M$ и, следовательно, $\bigcup\{J_m^+ | m \in M\} \subseteq J^+(M)$. Покажем, что имеет место и обратное включение. Пусть $x \in J^+(M)$, тогда существуют $\{x_n\}$ и $t_n \to \infty$ такие, что $x = \lim_{n\to+\infty} x_n t_n$ и $\rho(x_n, M) \to 0$ при $n \to +\infty$. В силу компактности M, можно считать, что $\{x_n\}$ является сходящейся. Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = m \in M$, тогда $x \in J_m^+$ и, следовательно, $J^+(M) \subseteq \cup\{J_p^+ | p \in M\}$. Лемма доказана.

Теорема 1.10.3. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, J - ее центр Левинсона и M - компактный слабый аттрактор системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Тогда $J = J^+(M)$.*

Доказательство. Так как M компактно, то согласно лемме 1.10.2 имеет место равенство (1.10.4). Так как $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то каждая точка $p \in X$ является равномерно устойчивой по Лагранжу в положительном направлении. Согласно теореме 1.10.1 при любом $m \in M$ множество $J_m^+ \neq \emptyset$, компактно и инвариантно и, следовательно, $J_m^+ \subseteq J$. Поэтому $J^+(M) \subseteq J$. Покажем, теперь, что имеет место и обратное включение. Пусть $x \in J$, тогда в силу инвариантности J и теоремы 1.1.1 существует целая траектория φ, проходящая через точку x при $t = 0$ и $\alpha_{\varphi_x} \neq \emptyset$, компактно и положительно инвариантно. Пусть $p \in \alpha_{\varphi_x}$, тогда $\omega_p \subseteq \alpha_{\varphi_x}$. Так как $\omega_p \cap M \neq \emptyset$, то существуют $q \in \omega_p \cap M$ и $t_n \to +\infty$ такие, что $\varphi(-t_n) \to q$ и, следовательно, $x = \pi^{t_n}\varphi(-t_n) \in J_q^+ \subseteq J^+(M)$, т.е. $J \subseteq J^+(M)$. Теорема доказана.

Лемма 1.10.4. *Пусть M - слабый аттрактор системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, тогда $\omega(M)$ также является ее слабым аттрактором.*

Доказательство. Так как $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, то согласно лемме 1.2.2 $\omega(M) \neq \emptyset$, компактно и инвариантно. Покажем, что $\omega(M)$ является слабым аттрактором $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Если допустить, что это не так, то найдется $x_0 \in X$ такая, что

$$\omega_{x_0} \cap \omega(M) = \emptyset. \tag{1.10.5}$$

Так как $\omega_{x_0} \cap M \neq \emptyset$, то найдется $m \in \omega_{x_0} \cap M$. В силу компактности и инвариантности ω_{x_0} точку m можно считать рекуррентной и, следовательно, $m \in \omega_m \subseteq \omega(M)$. Последнее противоречит условию (1.10.5). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 1.10.5. *Пусть M - слабый аттрактор системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и точка $p \in X$ рекуррентна, тогда $p \in \omega(M)$.*

Доказательство. Если точка $p \in X$ рекуррентна, то $\omega_p \cap M \neq \emptyset$. Пусть $q \in \omega_p \cap M$. В силу рекуррентности точки p

найдется $t_n \to +\infty$ такая, что $qt_n \to p$ и, следовательно, $p \in \omega(M)$. Лемма доказана.

Лемма 1.10.6. *Замыкание множества $\mathfrak{M}$ всех рекуррент ных точек компактно диссипативной динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является слабым аттрактором.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathfrak{M}$ является слабым аттрактором $(X, \mathbb{T}, \pi)$. Действительно, пусть $x \in X$. Тогда ω_x содержит хотя бы одну рекуррентную точку и, следовательно, $\omega_x \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Пусть теперь M - замкнутое, инвариантное и слабо притягивающее множество (M - слабый аттрактор системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$). Тогда $\omega(M) = M$ и, согласно лемме 1.10.5 $\mathfrak{M} \subseteq \omega(M) = M$. Лемма доказана.

Замечание 1.10.7. *Для компактно диссипативной системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ максимальным компактным инвариантным слабым аттрактором является ее центр Левинсона J.*

Лемма 1.10.8. *Пусть $(X, \mathbb{T}, \pi)$ компактно диссипативна, J - ее центр Левинсона и $\Omega(J) = \overline{\bigcup\{\omega_x | x \in J\}}$, тогда $\Omega(J)$ является слабым аттрактором $(X, \mathbb{T}, \pi)$.*

Доказательство. Пусть $p \in X$ рекуррентна, тогда ω_p непустое компактное минимальное инвариантное множество. Так как J является максимальным компактным инвариантным множеством $(X, \mathbb{T}, \pi)$, то $\omega_p \subseteq J$. Таким образом $p \in \omega_p \subseteq J$ и, следовательно, $p \in \Omega(J)$. Таким образом $\mathfrak{M} \subseteq \Omega(J)$ ($\mathfrak{M}$ - замыкание множества всех рекуррентных точек) и, следовательно, $\Omega(J)$ также является слабым аттрактором. Лемма доказана.

Следствие 1.10.9. $J = J^+(\Omega)$.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из леммы 1.10.8 и теоремы 1.10.3.

1.11. Асимптотическая устойчивость

В этом параграфе изучается вопрос об асимптотической устойчивости компактных полуинвариантных множеств динамических систем с бесконечномерным (не локально компактным) фазовым пространством. Приводятся различные условия, эквивалентные асимптотической устойчивости. Полученные результаты являются локальными вариантами ряда результатов, ранее полученных для диссипативных систем.

Лемма 1.11.1. *Пусть $M \subseteq X$ компактно и асимптотически устойчиво относительно $(X, \mathbb{T}, \pi)$, тогда найдется $\delta_0 > 0$ такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t K, M) = 0 \tag{1.11.1}$$

для любого компакта $K \in C(B(M, \delta_0))$.

Доказательство. Так как M асимптотически устойчиво, то существует δ_0 такое, что $B(M, \delta_0) \subset W^s(M)$. Покажем, что для любого компакта $K \in C(B(M, \delta_0))$ имеет место равенство (1.11.1). Для этого заметим, что из асимптотической устойчивости M вытекает существование для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in B(M, \delta_0)$ положительных чисел $\delta(\varepsilon, x)$ и $l(\varepsilon, x)$, для которых

$$\rho(yt, M) < \varepsilon \tag{1.11.2}$$

при всех $t \geq l(\varepsilon, x)$ и $y \in B(x, \delta)$. Покажем, что из (1.11.2) следует (1.11.1). Если допустить, что это не так, то существуют $K_0 \in C(B(M, \delta_0))$, $t_n \to +\infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\beta(\pi_n^t K_0, M) \geq \varepsilon_0. \tag{1.11.3}$$

Из неравенства (1.11.3) следует существование $x_n \in K_0$ таких, что

$$\rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0. \tag{1.11.4}$$

В силу компактности K_0 последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, тогда из (1.11.2) следует, что для достаточно больших n имеет место неравенство

$$\rho(x_n t_n, M) < \varepsilon_0, \tag{1.11.5}$$

что противоречит (1.11.4). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 1.11.2. *Пусть* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *динамическая система,* $M \subseteq X$ *компактно и полуинвариантно, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество* M *асимптотически устойчиво;*

(2) $W^s(M)$ *открыто и для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x \in W^s(M)$ *найдутся* $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ *и* $\tau = \tau(\varepsilon, x) > 0$ *такие, что*

$$\beta(\pi^t B(x, \delta), M) < \varepsilon \tag{1.11.6}$$

при всех $t \geq \tau$*;*

(3) $W^s(M)$ *открыто и множество* M *притягивает любой компакт из* $W^s(M)$*, т.е. для любого* $K \in C(W^s(M))$ *имеет место равенство (1.11.1).*

(4) $W^s(M)$ *открыто, любой компакт* $K \subseteq W^s(M)$ *уст.* L^+ *и* $\emptyset \neq J_x^+ \subseteq M$ *при всех* $x \in W^s(M)$.

Доказательство. Покажем, что из 1. следует 2. Прежде всего докажем, что $W^s(M)$ открыто. Действительно, так как M - притягивающее множество, то существует такое $\delta > 0$, что $B(M, \delta) \subset W^s(M)$. Покажем, что для любой точки $q \in W^s(M) \setminus B(M, \delta)$ существует такое $\eta > 0$, что $B(q, \eta) \subset W^s(M)$. Gecnm $q \in W^s(M) \setminus B(M, \delta)$. Тогда найдется такой момент времени $\tau_q > 0$, что $q\tau_q \in B(M, \delta)$. В силу открытости $B(M, \delta)$ найдется $\gamma > 0$, для которого

$$B(q\tau_q, \gamma) \subset B(M, \delta). \tag{1.11.7}$$

В силу непрерывности отображения $\pi^{\tau_q} : X \to X$ найдется $\eta > 0$, что имеет место включение

$$\pi^{\tau_q} B(q, \eta) \subset B(q\tau_q, \gamma).$$

Согласно лемме 1.11.1 $B(q, \eta) \subset W^s(M)$ и, следовательно, множество $W^s(M)$ открыто.

Обозначим через $\xi(\varepsilon) > 0$ число, определенное по $\varepsilon > 0$, из условия орбитальной устойчивости M. Далее, так как $W^s(M) = \{x \in X : \lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, M) = 0$ при $t \to +\infty\}$, то для ξ и любых $x \in W^s(M)$ найдется $\tau = \tau(\varepsilon, x) > 0$ такое, что

$\rho(xt, M) < \varepsilon$ при всех $t \geq \tau$. В силу непрерывности отображения $\pi^{\tau(\varepsilon,x)} : X \to X$ для $x \in W^s(M)$ и $\xi > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что

$$\pi^\tau B(x, \delta) \subseteq B(x\tau, \xi). \tag{1.11.8}$$

В силу выбора ξ из (1.11.8) имеем $\beta(\pi^t B(x, \delta), M) < \varepsilon$ при всех $t \geq \tau$.

Покажем, что из 2. следует 3. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\emptyset \neq K \subset W^s(M)$ компактно. Тогда для любой точки $x \in K$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ и $\tau = \tau(\varepsilon, x) > 0$ такие, что имеет место (1.11.6) при всех $t \geq \tau(\varepsilon, x)$. Рассмотрим открытое покрытие $\{B(x, \delta)\}_{x \in K}$ множества K. В силу компактности K и полноты X из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)\}_{i=1}^n$. Положим $l(\varepsilon, K) = \max\{\tau(\varepsilon, x_i) \,|\, i \in \overline{1, n}$. Тогда из (1.11.6) следует, что $\beta(\pi^t K, M) < \varepsilon$ при всех $t \geq l(\varepsilon, K)$.

Теперь покажем, что из 3. следует 4. Действительно, так как множество M притягивает любой компакт $K \subset W^s(M)$, то согласно теореме 1.2.5 множество $\Sigma^+(K) = \cup\{\pi^t K \,|\, t \geq 0\}$ относительно компактно, т.е. уст. L^+ и, следовательно, $J_x^+ \supseteq \omega_x \neq \emptyset$ для любой точки $x \in W^s(M)$. Покажем, что $J_x^+ \subseteq M$ при всех $x \in W^s(M)$. Пусть $y \in J_x^+$, тогда существуют $x_n \to x$ и $t_n \to +\infty$ такие, что $x_n t_n \to y$. Так как $K_1 := \overline{\{x_n\}}$ компактно и множество M притягивает K_1, то $y \in M$, т.е. $J_x^+ \subset M$.

Покажем, что из 4. следует 1. Из открытости $W^s(M)$ и компактности M следует существование $\delta > 0$ такого, что $B(M, \delta) \subset W^s(M)$, т.е. M является притягивающим. Докажем, что множество M является орбитально устойчивым. Так как M полуинвариантно, то

$$M \subseteq D^+(M) = \Sigma^+(M) \cup J^+(M) \subseteq M \cup M = M$$

и, следовательно, $D^+(M) = M$. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что в условиях теоремы из равенства $D^+(M) = M$ следует орбитальная устойчивость множества M. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 > \delta_n \to 0$, $x_n \in B(M, \delta_n)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0. \tag{1.11.9}$$

Так как $x_n \in B(M, \delta_n)$, $\delta_n \to 0$ и M компактно, то множество $K = \overline{\{x_n\}} \subseteq B(M, \varepsilon_0)$ компактно и, следовательно, K уст. L^+, т.е. $\Sigma^+(K)$ относительно компактно. Поэтому последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Пусть $y = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$, тогда $y \in D^+(M) = M$. Из неравенства (1.11.9) следует, что $y \notin M$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 1.11.3. *Пусть $M \subseteq X$ - непустое компактное положительно инвариантное и асимптотически устойчивое множество в $(X, \mathbb{T}, \pi)$, тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) $\omega(M) \subseteq M$*;*
(2) $\omega(M)$ *- инвариантно;*
(3) $\omega(M) = \bigcap\limits_{t\geq 0} \pi^t M$*;*
(4) $\omega(M)$ *- максимальное компактное инвариантное множество в* $W^s(M)$*.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из полуинвариантности и замкнутости множества M. Докажем второе утверждение. Так как M уст. L^+ и $\omega(M) \subseteq M$, то согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(M)$ инвариантно. Для доказательства третьего утверждения теоремы заметим, что $\bigcap\limits_{t\geq 0} \pi^t M \subseteq \omega(M)$. Поскольку из включения $\omega(M) \subseteq M$ и инвариантности $\omega(M)$ следует, что $\omega(M) \subseteq \bigcap\limits_{t\geq 0} \pi^t M$, то $\omega(M) = \bigcap\limits_{t\geq 0} \pi^t M$. Наконец, покажем, что имеет место четвертое утверждение. Пусть $K \subset W^s(M)$ любое компактное инвариантное множество. Согласно теореме 1.11.2 множество M притягивает компакт K и, следовательно, $K \subseteq \omega(K) \subseteq \omega(M)$. Теорема доказана.

Теорема 1.11.4. *Пусть $M \subseteq X$ - непустое компактное асимптотическое устойчивое множество. Тогда имеет место следующие утверждения:*

(1) $\omega(M)$ *орбитально устойчиво;*
(2) $\omega(M)$ *притягивает все компакты из* $W^s(M)$*;*
(3) $J^+(A) = \omega(M)$*, где* $A = \cup\{\alpha_{\varphi_x} \,|\, \varphi \in \Phi_x,\ x \in \omega(M)\}$*.*

Доказательство. Покажем, что $\omega(M)$ орбитально устойчиво. Если допустить противное, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_n \to 0$

такие, что для некоторых $x_n \in B(\omega(M), \delta_n)$ и $t_n \to +\infty$

$$\rho(x_n t_n, \omega(M)) \geq \varepsilon_0. \tag{1.11.10}$$

Так как $x_n \in B(\omega(M), \delta_n)$ и $\omega(M)$ компактно, то последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Согласно теореме 1.11.2 множество $K := \overline{\{x_n\}}$ уст. L^+, поэтому множество $H^+(K) := \overline{\cup\{\pi^t K \mid t \geq 0\}}$ компактно. Заметим, что, наряду с множеством M, и множество $M' = M \cup H^+(K)$ является притягивающим для семейства компактных подмножеств из $W^s(M)$ и, следовательно, $\omega(M') = \omega(M)$. В частности $\omega(H^+(K)) \subseteq \omega(M') = \omega(M)$. В силу компактности $H^+(K)$, последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n = y$, тогда $y \in \omega(H^+(K)) \subseteq \omega(M)$. Однако из (1.11.10) следует, что $y \notin \omega(M)$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Пусть K_1 - произвольное компактное подмножество из $W^s(M)$. Тогда согласно теореме 1.2.5 множество K_1 уст. L^+ и $\omega(K_1) \neq \emptyset$, компактно и $\beta(\pi^t K_1, \omega(K_1)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(K_1)$ инвариантно, а из теоремы 1.11.3 имеем $\omega(K_1) \subseteq \omega(M)$, ибо $\omega(M)$ является максимальным компактным инвариантным множеством в $W^s(M)$.

Покажем теперь, что $J^+(A) = \omega(M)$. Так как $A \subseteq \omega(M)$, то $J^+(A) \subseteq J^+(\omega(M))$. В силу асимптотической устойчивости $\omega(M)$ имеем $J^+(\omega(M)) \subseteq \omega(M)$ и, следовательно, $J^+(A) \subseteq \omega(M)$. Докажем теперь обратное включение. Пусть $x \in \omega(M)$ и $\varphi \in \Phi_x$, тогда $\emptyset \neq \alpha_{\varphi_x} \subset A$ и, следовательно, существуют $y \in \alpha_{\varphi_x}$ и $t_n \to +\infty$ такие, что $\varphi(-t_n) \to y \in A$ и $x = \pi^{t_n}\varphi(-t_n)$. Таким образом $x \in J^+_y \subseteq J^+(A)$, т.е. $\omega(M) \subseteq J^+(A)$. Теорема полностью доказана.

Обозначим через $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ - семейство непустых компактных положительно инвариаантных множеств, притягивающих все компакты из $W^s(M)$ и $I = \cap\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Теорема 1.11.5. *Пусть $M \neq \emptyset$, компактно, положитель но инвариантно и асимптотически устойчиво. Тогда имеет* *место равенство* $I = \omega(M)$, *т.е.* $\omega(M)$ *является наименьшим компактным положительно инвариантным множеством, притягивающим все компакты из* $W^s(M)$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\omega(M) \subseteq I$ и, следовательно, $I \neq \emptyset$. В самом деле, для любого $\lambda \in \Lambda$ имеем $\omega(M) = \omega(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, т.е. $\omega(M) \subseteq I$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $I \subseteq \omega(M)$. Так как $\omega(M) \neq \emptyset$, компактно и притягивает все компакты из $W^s(M)$, то $\omega(M) \in \{M_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ и, следовательно, $I \subseteq \omega(M)$. Теорема доказана.

Глава 2

Невтономные диссипативные динамические системы

2.1. Об устойчивости центра Левинсона

Рассмотрим неавтономную систему

$$\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle. \tag{2.1.1}$$

Обозначим через 2^X семейство всех ограниченных, замкнутых подмножеств X, наделенных метрикой Хаусдорфа. Пусть $K \subseteq X$ - некоторое компактное подмножество X. Будем говорить, что K удовлетворяет условию (C), если отображение $F : Y \to 2^X$, определенное равенством

$$F(y) := K_y := \{x \in K \mid h(x) = y\}, \tag{2.1.2}$$

непрерывно.

Отметим, что условие (C) означает открытость $h : X \to Y$ на K. В дальнейших рассуждениях условие (C) играет важную роль, поэтому мы приведем простой признак, который гарантирует для некоторого компактного инвариантного множества наличие этого свойства.

Лемма 2.1.1. *Для того чтобы непустое компактное множество $K \subseteq X$ удовлетворяло условию (C), достаточно выполнения одного из следующих условий:*

(1) *существуют $y_0 \in Y$ и $\tau > 0$ ($\tau \in \mathbb{T}_2$) такие, что $y_0\tau = y_0$ и $Y = \{\sigma(y_0, t) \mid 0 \leq t < \tau\}$, т.е. τ – наименьший положительный период для y_0;*

(2) *Y – компактное минимальное множество и неавтономная система (2.1.1) дистальна на K, т.е. для любых различных точек x_1 и x_2 из K, при которых*

$h(x_1) = h(x_2)$, *выполняется неравенство*

$$\inf_{t\in\mathbb{T}_2} \rho(x_1t, x_2t) > 0. \qquad (2.1.3)$$

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Второе вытекает из предложения 4 работы [**61**, с.107].

Неавтономную динамическую систему (2.1.1) назовем поточечно (компактно, локально) диссипативной, если этим свойством обладает динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Пусть неавтономная система (2.1.1) компактно диссипативна и J – центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Множество J будем называть центром Левинсона неавтономной диссипативной системы (2.1.1).

Как было установлено выше, центр Левинсона J орбитально устойчив относительно динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. При рассмотрение J, как центра Левинсона неавтономной динамической системы (2.1.1), более естественной является орбитальная устойчивость относительно неавтономной системы (2.1.1).

Множество $K \subseteq X$ называют орбитально устойчивым относительно неавтономной системы (2.1.1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, K_y) < \delta$ $(x \in X, y = h(x))$ влечет $\rho(xt, K_{yt}) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Если при этом,

a. существует $\gamma > 0$ такое, что $\rho(xt, K_{yt}) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $x \in K_y$ таких, что $\rho(x, K_y) \leq \gamma$, то говорят, что K орбитально асимптотически устойчиво;
b. $\rho(xt, K_{yt}) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $x \in X_y$, то говорят что множество $K \subseteq X$ асимптотически устойчиво в целом относительно неавтономной динамической системы (2.1.1).

Следуя [**34**] множеств $K \subseteq X$ назовчм асимптотически устойчивым в целом в смысле Ляпунова–Барабашина, если

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, K_{h(x)t}) = 0 \qquad (2.1.4)$$

при всех $x \in X$, причем равенство (2.1.4) имеет место равномерно по x на компактах из X.

Как было показано в работе [**34**], центр Левинсона неавтономной системы, вообще говоря, не является асимптотически устойчивым в целом в смысле Ляпунова–Барабашина. Ниже нами будет установлено, что центр Левинсона неавтономной системы (2.1.1) будет асимптотически устойчивым в целом, если он удовлетворяет условию (C).

Имеет место

Лемма 2.1.2. *Пусть $K \subseteq X$. Если множество $\Sigma^+(K)$ относительно компактно и M ($\omega(K) \subseteq M$, $h(M) = Y$) удовлетворяет условию (C), то при каждом $x \in K$ равномерно относительно $y \in h(H^+(K))$ выполняется равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in K_y} \rho(xt, M_{yt}) = 0, \tag{2.1.5}$$

где $M_y = M \cap h^{-1}(y)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\{y_n\} \subseteq h(H^+(K))$, $x_n \in M_{y_n}$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, M_{y_n t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.6}$$

В силу относительной компактности множества $\Sigma^+(K)$ последовательности $\{x_n t_n\}$ и $\{y_n t_n\}$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x} := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$ и $\bar{y} := \lim\limits_{n\to+\infty} y_n t_n$. Заметим, что

$$h(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} h(x_n t_n) = \lim_{n\to+\infty} h(x_n) t_n = \bar{y} \tag{2.1.7}$$

и, следовательно, $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$. С другой стороны, согласно лемме 1.2.1 $\bar{x} \in \omega(K)$. Таким образом, $\bar{x} \in \omega_{\bar{y}}(K) \subseteq M_{\bar{y}}$.

Обратимся теперь к неравенству (2.1.6). Так как множество M удовлетворяет условию (C), то, переходя к пределу в неравенстве (2.1.6) при $n \to +\infty$, получим

$$\rho(\bar{x}, M_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.8}$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $\bar{x} \in M_{\bar{y}}$. Лемма доказана.

Теорема 2.1.3. *Пусть система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ компактно диссипативна и центр Левинсона J данной системы удовлетворяет условию (C). Если $Y = h(J)$, то:*

(1) *J орбитально устойчиво в положительном направлении относительно неавтономной динамической системы (2.1.1).*

(2) *J является компактным аттрактором данной системы т.е.,*

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, J_{h(x)t}) = 0, \tag{2.1.9}$$

причем (2.1.8) имеет место равномерно по x на каждом компакте из X.

Доказательство. Покажем, что центр Левинсона J орбитально устойчив в положительном направлении относительно неавтономной системы (2.1.1). Допустим, что это не так. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $x_n \in B(J_{h(x_n)}, \delta_n)$ и $t_n \geq 0$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.10}$$

В условиях теоремы последовательности $\{x_n\}$ и $\{h(x_n)\}$ можно считать сходящимися. Положим $x_0 := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Так как неавтономная система (2.1.1) компактно диссипативна, то множество $H^+(\{x_n\})$ компактно и, следовательно, последовательности $\{x_n t_n\}$ и $\{h(x_n)t_n\}$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x} := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$ и $\bar{y} := \lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n)t_n$.

Покажем теперь, что последовательность $\{t_n\}$, фигурирующая в (2.1.10), стремится к $+\infty$. Если допустить противное, то ее можно считать сходящейся. Положим $t_0 := \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$ и, переходя к пределу в (2.1.10) с учетом того, что J удовлетворяет условию (C), получаем

$$\rho(x_0 t_0, J_{h(x_0)t_0}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.11}$$

С другой стороны, $\rho(x_n, J_{h(x_n)}) < \delta_n$ и, следовательно, $x_0 \in J_{h(x_0)}$. Так как J инвариантно, то из последнего включения следует, что $x_0 t_0 \in J_{h(x_0)t_0}$. Но это противоречит (2.1.11). Таким образом, $t_n \to +\infty$ и, следовательно, $\bar{x} \in \omega(K_0) \subseteq J$. Из (2.1.5) следует, что $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$ т.е. $\bar{x} \in \omega_{\bar{y}}(K) \subseteq J_{\bar{y}}$. Из (2.1.6) следует, что $\bar{x} \in X_{\bar{y}}$ т.е. $\bar{x} \in \omega_{\bar{y}}(K) \subseteq J_{\bar{y}}$.

Переходя в неравенстве (2.1.10) к пределу, когда $n \to +\infty$ и учитывая, что $\bar{x} \in J_{\bar{y}}$ и множество J удовлетворяет условию (C), мы получим $\varepsilon_0 \leq 0$. Последнее противоречит выбору ε_0. Таким образом орбитальная устойчивость в положительном направлении множества J доказана.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть $K \subseteq X$ произвольный компакт, тогда в условиях теоремы множество $H^+(K)$ компактно и $\omega(K) \subseteq J$ и для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 2.1.2.

Замечание 2.1.4. *Отметим, что вопрос об устойчивости в целом в смысле Ляпунова–Барабашина центра Левинсона неавтономной динамической системы (в одном специальном случае) изучался в работе* [**34**]. *Следует, однако, подчеркнуть, что в работе* [**34**] *под устойчивостью понимается не орбитальная устойчивость, а равенство (2.1.9). Пользуясь нашей терминологией, результат работы* [**34**] *можно сформулировать следующим образом. Пусть X - локально-компактно, неавтономная динамическая система (2.1.1) поточечно диссипативна и Y – компактное минимальное множество. Тогда, если центр Левинсона J динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию (C), то $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ компактно диссипативна и ее центр Левинсона является аттрактором для компактных подмножеств из X относительно неавтономной динамической системы (2.1.1).*

Это утверждение вытекает из теорем 1.4.3 и 2.1.3. Однако из этих же теорем вытекает также, что центр Левинсона J орбитально устойчив в положительном направлении.

Теорема 2.1.5. *Пусть неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ компактно диссипативна, ец центр Левинсона J удовлетворяет условию (C) и $h(J) = Y$, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *J асимптотически устойчиво в целом, т.е. J – орбитально устойчиво, и*
$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, J_{h(x)t}) = 0 \tag{2.1.12}$$
при всех $x \in X$;

(2) *J асимптотически устойчиво в целом в смысле Ляпунова–Барабашина.*

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы из 1. следует 2. В самом деле, если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $K_0 \in C(X)$, $x_n \in K_0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.13}$$

В силу компактной диссипативности $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ последовательности $\{x_n t_n\}$ и $\{h(x_n)t_n\}$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$ и $\bar{y} = \lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n)t_n$, тогда $\bar{x} \in J_{\bar{y}} = J \cap X_{\bar{y}}$. С другой стороны, переходя к пределу в неравенстве (2.1.12) при $n \to +\infty$ и учитывая, что $J_{h(x_n)t_n} \to J_{\bar{y}}$ в метрике Хаусдорфа, получим $\rho(\bar{x}, J_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0$ т.е. $\bar{x} \notin J_{\bar{y}}$. Полученное противоречие завершает доказательство требуемого утверждения.

Теперь покажем, что из 2. следует 1. Для этого, очевидно, достаточно показать, что из 2. следует орбитальная устойчивость множества J. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $x_n \in B(J, \delta_n)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.14}$$

В силу компактности J последовательность $\{x_n\}$ относительно компактна и согласно условию 2. для числа $\varepsilon_0 > 0$ и компакта $K_0 = \overline{\{x_n\}}$ найдется число $L = L(\varepsilon_0, K_0) > 0$ такое, что

$$\rho(x_n t, J_{h(x_n)t}) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.1.15}$$

при всех $t \geq L$. Неравенства (2.1.14) и (2.1.15) не могут выполнятся одновременно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 2.1.6. *Заметим, что в доказательстве второй части теоремы 2.1.5 мы не использовали тот факт, что J удовлетворяет условию (C). Нам неизвестно насколько существенно условие (C) в первой части теоремы.*

Приведем пример неавтономной динамической системы с неустойчивым (орбитально) центром Левинсона.

Пример 2.1.7. Рассмотрим пример Опяля [**242**] скалярного почти периодического дифференциального уравнения

$$\dot{p} = f(t, p), \tag{2.1.16}$$

у которого все решения ограничены, но не почти периодичны. Зафиксируем некоторое минимальное множество $M \subset X = \mathbb{R} \times$

$H(f)$ $(H(f) = \overline{\{f_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\}})$, где чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}))$ и пусть φ^* и $\varphi_* : H(f) \to M$ - отображения определенные следующими равенствами: $\varphi^*(p) = \sup\{p \mid (p,g) \in M\}$ и $\varphi_*(p) = \inf\{p \mid (p,g) \in M\}$ $(g \in H(f))$.

Напомним, что уравнение (2.1.16) получается следующим образом. Пусть $\dot{y} = g(t,y)$ – пример Данжуа [**34**], [**242**] периодического по обоим аргументам, реализующего неэргодический случай на торе (функцию g можно взять из класса C^1 на торе), P – совершенное нигде не плотное предельное множество на прямой: $t = 0$ и α – число вращения. Положим $p(t) = y(t) - \alpha t$, получим

$$\dot{p}(t) = g(t, p(t) + \alpha t) - \alpha = f(t, p(t)).$$

Используя теорию уравнений на торе (см., например, [**79**, гл.2]), можно показать, что решение $p(t)$ уравнения (2.1.16) рекуррентно тогда и только тогда, когда $p(0) \in P$.

Нам нужно теперь изменить функцию $f(x) = f(p,h)$ вне M с тем, чтобы новая система оказалось диссипативной и чтобы верхняя граница $p^*(h)$ была разрывна.

Положим сначала $F(x) = f(x) - \rho(x,M)$; затем (с сохранением непрерывности) изменим эту функцию при всех достаточно больших по модулю отрицательных p с тем, чтобы при этих значениях выполнялось неравенство $F(p,h) \geq 1$ $(h \in H)$. Ясно, что неавтономная динамическая система, порожденная уравнением $\dot{p} = F(p, \sigma_t h)$, диссипативна ($\sigma_t h$ – иррациональная оболочка тора).

Предположим, что верхняя граница $p^*(h)$ центра Левинсона J непрерывна. Так как $p^*(h) \geq \varphi^*(h)$ и решения $p^*(\sigma_t h)$ почти периодичны в отличие от решений $\varphi^*(\sigma_t h)$, то $\inf\{p^*(h) - \varphi^*(h) \mid h \in H(f)\} > 0$. Из определения $F(x)$ вытекает тогда неравенство

$$F(p^*(h), h) \leq f(p^*(h), h) - c_1 \quad (c_1 > 0,\ h \in H). \tag{2.1.17}$$

Положим $p(t) = p^*(\sigma_t h)$ и пусть $q(t)$ – решение уравнения (2.1.16) с тем же начальными условием, т.е. $q(0) = p(0)$. Из (2.1.17) получаем неравенства

$$\inf_{t\geq 1}(q(t) - p(t)) > 0, \qquad \inf_{t\leq -1}(p(t) - q(t)) > 0. \tag{2.1.18}$$

Из этих неравенств следует, что $q(t)$ не рекуррентна, т.е. $q(0) \notin P$. Пусть q_1, q_2 $(q_1 > q_2)$ - концы соответствующего смежного интервала и $q_1(t), q_2(t)$ - решения уравнения (2.1.16) с начальными условиями $q_1(0) = q_1,\ q_2(0) = q_2$. Так как функции $q_1(t), p(t)$ совместно рекуррентны, то найдчтся последовательность $t_m \to +\infty$ такая, что $q_1(t + t_m) \to q_1(t),\ p(t + t_m) \to p(t)$ при любом $t \in R$. Но тогда из неравенств (2.1.18) получаем неравенство $\inf\{q_1(t) - p(t) \,|\, t \in R\} > 0$. Аналогично устанавливается неравенство

$$\inf\{p(t) - q_2(t) \,|\, t \in R\} > 0.$$

Но это противоречит тому, что $\lim\limits_{t \to +\infty}(q_1(t) - q_2(t)) = 0$ (см. [**242**]). Нужный пример построен.

Отметим что приведенный выше пример принадлежит В.В.Жикову [**34**]. Аналогичный пример опубликован также в [**199**].

Лемма 2.1.8. *Пусть $M \subseteq X$ - непустое компактное множество и отображение $F : Y \to 2^M$ $(F(y) = M_y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа, тогда для любого $\delta > 0$ существует $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ такое, что имеет место включение*

$$B(M, \gamma) \subset \widetilde{B}(M, \delta) = \bigcup_{y \in Y} B_y(M, \delta), \tag{2.1.19}$$

где $B_y(M, \delta) = \{x \,|\, x \in X_y,\ \rho(x, M) < \delta\}$.

Доказательство. Допустим, что заключение леммы не имеет место, тогда найдутся $\delta_0 > 0$, $\gamma_n \downarrow 0$ и $x_n \in B(M, \gamma_n)$ такие, что $x_n \notin \widetilde{B}(M, \delta)$ т.е.

$$\rho(x_n, M_{y_n}) \geq \delta_0 \tag{2.1.20}$$

при всех n, где $y_n = h(x_n)$. Так как M компактно и отображение $F : Y \to 2^M$ непрерывно, то можем считать что $x_n \to x_0$ и $M_{y_n} \to M_{y_0}$, где $y_0 = h(x_0)$. Переходя в неравенстве (2.1.20) к пределу, когда $n \to +\infty$, мы получим

$$x_0 \notin B(M_{y_0}, \delta_0). \tag{2.1.21}$$

С другой стороны, $x_n \in B(M, \gamma_n)$ и так как $\gamma_n \to 0$, то $x_0 \in M$ и, следовательно, $x_0 \in M_{y_0}$. Последнее противоречит (2.1.21). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 2.1.9. *Пусть $M \subseteq X$ - непустое компактное орбитально асимптотически устойчивое отностельно системы (2.1.1) инвариантное множество, то оно орбитально асимптотически устойчиво и относительно динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из леммы 2.1.8 и из соответствующих определений.

Теорема 2.1.10. *В условиях леммы 2.1.8, если M орбитально асимптотически устойчиво относительно (X, T_1, π), то M орбитально асимптотически устойчиво и относительно $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$.*

Доказательство. Покажем, что M орбитально устойчиво относительно $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$. Допустим, что это не так, тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $x_n \in B(M_{y_n}, \delta_n)$ $(y_n = h(x_n))$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, M_{y_n t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.1.22}$$

Согласно теореме 1.11.2 последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n t_n$, $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, $y_0 = h(x_0)$ и $\bar{y} = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n t_n$. Заметим, что $\bar{x} \in J^+_{\bar{y}}$. Согласно теореме 1.11.2 $\bar{x} \in J^+_{\bar{y}} \subseteq M$ и, следовательно, $\bar{x} \in M_{\bar{y}}$. С другой стороны переходя к пределу в (2.1.22) когда $n \to +\infty$. Мы получим $\bar{x} \notin M_{\bar{y}}$. Полученное противоречие показывает, что M орбитально устойчиво относительно неавтономной системы $\langle (X, T_1, \pi), (Y, T_2, \sigma), h\rangle$.

Пусть теперь $x \in W^s(M)$, тогда $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, M) = 0$. Согласно лемме 2.1.2 имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, M_{h(x)t}) = 0, \tag{2.1.23}$$

и, следовательно, $W^s(M) = \bigcup\limits_{y \in Y} W^s_y(M)$. Теорема доказана.

2.2. Положительно устойчивые системы

Пусть $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ – неавтономная динамическая система. Обозначим через $C(X,Y;h)$ множество всех функций $\xi : X \to X$ удовлетворяющие следующим двум условиям:

(1) $\xi\left(X_{h(x)}\right) \subseteq X_{h(\xi(x))}$ при всех $x \in X$,
(2) $\xi : X_{h(x)} \longrightarrow X_{h(g(x))}$ непрерывна на $X_{h(x)}$ при каждом $x \in X$.

Топологию на $C(X,Y;h)$ определим семейством псевдометрик

$$\rho_{y,K}(f,g) := \max_{x\in K_y} \rho(f(x),g(x)) \tag{2.2.1}$$

где K – произвольный непустой компакт из X и $y \in Y$. Отметим, что семейство псевдометрик (2.2.1) задает на $C(X,Y;h)$ топологию равномерной сходимости (послойно) на компактах.

Лемма 2.2.1. $C(X,Y;h)$ *является топологической полугруппой относительно послойной композиции.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно проверить непрерывность отображения

$$F : C(X,Y;h)\times C(X,Y;h) \to C(X,Y;h),$$

определенного равенством $F(f,g) := f\circ g$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что в некоторой точке (f_0,g_0) отображение F не является непрерывным, т.е. существует направленность $(f_\lambda,g_\lambda) \to (f_0,g_0)$ такая, что $f_\lambda\circ g_\lambda \nrightarrow f_0\circ g_0$. Тогда существуют $\varepsilon_0>0$, компакт $K^0\subseteq X$ и $y_0\in Y$ такие, что

$$\max_{x\in K^0_{y_0}} \rho(f_\lambda(g_\lambda(x)),f_0(g_0(x))) \geq \varepsilon_0. \tag{2.2.2}$$

Из (2.2.2) следует существование $\{x_\lambda\}\subseteq K^0_{y_0}$ такой, что

$$\rho(f_\lambda(g_\lambda(x_\lambda)),f_0(g_0(x_\lambda))) \geq \varepsilon_0. \tag{2.2.3}$$

В силу компактности K^0, направленность $\{x_\lambda\}$ можно считать сходящейся. Пусть $x_\lambda\to x_0$, тогда $g_0(x_\lambda)\to g_0(x_0)$. Покажем, что $g_\lambda(x_\lambda) \to g_0(x_0)$. Действительно,

$$\rho(g_\lambda(x_\lambda), g_0(x_0)) \le \max_{x \in K^0_{y_0}} \rho(g_\lambda(x), g_0(x))$$
$$+\rho(g_0(x_\lambda), g_0(x_0)) \tag{2.2.4}$$

и переходя к пределу в (2.2.4), получим требуемое утверждение. Аналогично устанавливается, что $f_\lambda(g_\lambda(x_\lambda)) \to f_0(g_0(x_0))$. Переходя к пределу в (2.2.3) мы получим $\varepsilon_0 \le 0$, что противоречит выбору ε_0. Лемма доказана.

Пусть $\alpha > 0$ и $\mathbb{T}_\alpha := \{t \in \mathbb{T} : t \ge \alpha\}$. Положим $\mathcal{P}^\alpha := \mathcal{P}^\alpha(X, Y; h) := \overline{\{\pi^t : t \in \mathbb{T}_\alpha\}}$, где чертой обозначено замыкание в $C(X, Y; h)$.

Лемма 2.2.2. *$\mathcal{P}^\alpha$ является замкнутой подполугруппой полугруппы $C(X, Y; h)$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из леммы 2.2.1 и определения $\mathcal{P}^\alpha$.

Неавтономную динамическую систему (2.1.1) назовем равномерно устойчивой в положительном направлении на компактах из X, если для любых $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subseteq X$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что при всех $x_1, x_2 \in K$, для которых $h(x_1) = h(x_2)$, из неравенства $\rho(x_1, x_2) < \delta$ следует $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \ge 0$.

Положим $\mathcal{P}_y := \{\xi \in \mathcal{P}^\alpha : \xi X_y \subseteq X_y\}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{P}_y$ есть замкнутая подполугруппа полугруппы $\mathcal{P}^\alpha$. Имеет место

Лемма 2.2.3. *Если система (2.1.1) компактно диссипативна и равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из X, то $\mathcal{P}^\alpha$ есть компактная полугруппа и $\mathcal{P}_y$ - ее непустая подполугруппа для любой устойчивой по Пуассону в положительном направлении точки $y \in Y$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях леммы полугруппа $\mathcal{P}^\alpha$ компактна. Пусть $K \subseteq X$ - произвольный компакт. Тогда в силу компактной диссипативности неавтономной системы (2.1.1) множество $\Sigma^+(K)$ компактно. В силу равномерной положительной устойчивости неавтономной системы (2.1.1) семейство отображений $\{\pi^t : t \in \mathbb{T}_\alpha\} \subseteq C(X, Y; h)$

равностепенно непрерывно на K_y $(y \in Y)$. Тогда согласно теореме Асколи-Арцеля, с учетом топологии на $C(X, Y; h)$, заключаем, что $\{\pi^t : t \in \mathbb{T}_\alpha\}$ компактно в $C(X, Y; h)$ и, следовательно, его замыкание есть компакт.

Покажем, что $\mathcal{P}_y \neq \emptyset$. Пусть $t_n \to +\infty$ такова, что $yt_n \to y$. Рассмотрим последовательность $\{\pi^{t_n}\} \subseteq \mathcal{P}^\alpha$. В силу компактности $\mathcal{P}^\alpha$ последовательность $\{\pi^{t_n}\}$ можно считать сходящейся в $C(X, Y; h)$. Положим $\xi := \lim\limits_{n \to +\infty} \pi^{t_n}$ и покажем, что $\xi \in \mathcal{P}_y$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $\xi X_y \subseteq X_y$. Пусть $x \in X_y$, тогда $\xi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} xt_n$ и, следовательно,

$$h(\xi(x)) = h(\lim_{n \to +\infty} xt_n) = \lim_{n \to +\infty} h(xt_n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} h(x)t_n = \lim_{n \to +\infty} yt_n = y.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2.4. *Пусть Y - компактное минимальное множество, а неавтономная динамическая система (2.1.1) удовлетворяет условиям леммы 2.2.3. Тогда центр Левинсона J системы (2.1.1) двусторонне дистален, т.е. для любых x_1 и x_2 из J $(x_1 \neq x_2,\ h(x_1) = h(x_2))$ справедливо неравенство* $\inf\{\rho(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) : s \in \mathbb{S}\} > 0$, *где φ_i есть продолжение на $\mathbb{S}$ движения $\pi(\cdot, x_i)$* $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Согласно теореме 1.3.4 на множестве J все движения продолжаемы влево. Из равномерной устойчивости в положительном направлении множества J следует его дистальность в отрицательном направлении. Посклльку Y минимально, то согласно лемме 22.4 [**15**] (см. также [**16**] и лемму 1 из [**61**, с.104]) J двусторонне дистально.

Теорема 2.2.5. *Пусть неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ компактно диссипативна, равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из X и Y минимально, тогда:*

(1) *Все движения на центре Левинсона J системы (2.1.1) продолжаемы влево и множество J двусторонне дистально;*

(2) *J состоит из рекуррентных траекторий и любые две точки $x_1, x_2 \in J_y := X_y \cap J$ $(y \in Y)$ совместно рекуррентны;*

(3) *Если слои X_y связны, то при каждом $y \in Y$ множество J_y связно и при различных y_1 и y_2 множества J_{y_1} и J_{y_2} гомеоморфны;*

(4) *J орбитально устойчиво относительно (2.1.1), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, J_{h(x)}) < \delta$ влечет $\rho(xt, J_{h(x)}t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;*

(5) $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt, J_{h(x)t}) = 0$ *каково бы ни было $x \in X$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы совпадает с леммой 2.2.4.

Второе утверждение теоремы вытекает из первого и леммы 1 из [**61**, с.104]

Докажем теперь третье утверждение теоремы. Пусть $y \in Y$, тогда в условиях теоремы точка y устойчива по Пуассону и согласно лемме 2.2.3 $\mathcal{P}_y$ есть непустая компактная топологическая подполугруппа полугруппы $\mathcal{P}^\alpha$. Согласно лемме 4.11 [**15**] в $\mathcal{P}_y$ существует идемпотент т.е. такой элемент $u \in \mathcal{P}_y$, что $u \circ u = u$. Покажем, что для идемпотента u найдется $t_n \to +\infty$ для которой $u = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^{t_n}$. Действительно, так как $u \in \mathcal{P}_y \subseteq \mathcal{P}^\alpha$, то существует последовательность $\bar{t}_n \geq \alpha$ такая, что $u = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^{t_n}$. Если последовательность $\{t_n\}$ неограничена, то из нее можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ и нужное утверждение доказано. Пусть теперь $\{t_n\}$ ограничена, тогда ее можно считать сходящейся. Положим $t_0 := \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$ $(t_0 \geq \alpha)$ и $t'_n := nt_0$. Как нетрудно сообразить, что $t'_n \to +\infty$ и $\pi^{t'_n} \to u$.

Итак, в $\mathcal{P}_y$ имеется идемпотент u и $t_n \to +\infty$ такая, что $u = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^{t_n}$. Но тогда из первых двух утверждений теоремы 2.2.5 следует, что $u(X_y) \subseteq J_y$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство $J_y = u(X_y)$. Для этого достаточно показать, что $J_y = u(J_y)$. Справедливость последнего равенства следует из того, что на J имеется двусторонняя дистальность и, следовательно, всякий идемпотент из $\mathcal{P}_y$ на множестве J_y действует как тождественное отображение. Связность J_y следует из непрерывности u, связности X_y и равенства $J_y = u(X_y)$.

Покажем, что имеет место вторая часть третьего утверждения теоремы. Пусть y_1 и $y_2 \in Y$. Так как Y является минимальным множеством, то существует $\{t_n\} \subseteq \mathbb{T}$ такая, что $y_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_1 t_n$. Рассмотрим последовательность $\{\pi^{t_n}\}$ на J_{y_1}. Так как $\pi^{t_n} : J_{y_1} \to J$ и на J имеет место двусторонняя равномерная устойчивость [**61**, с.107], то семейство отображений $\{\pi^{t_n}\}$ равностепенно непрерывно и, следовательно, ее можно считать равномерно сходящейся. Положим $\xi := \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^{t_n}$. Из третьего утверждения теоремы и предложения 4 из [**61**, с.107] следует, что $\xi(J_{y_1}) = J_{y_2}$. Итак, мы показали, что непрерывное отображение ξ отображает J_{y_1} на J_{y_2}. Из двусторонней дистальности J следует, что $\xi x_1 \neq \xi x_2$, если $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in J_{y_1})$. Из последнего следует, что ξ есть гомеоморфизм J_{y_1} и J_{y_2}.

Четвертое утверждение теоремы вытекает из равномерной устойчивости в положительном направлении системы (2.1.1) на компактах из X. Действительно, если допустить, что не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $x_n \in X$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n, J_{h(x_n)}) < \delta_n \quad \text{и} \quad \rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.2.5}$$

Из (2.2.5) вытекает, что множество $K_0 = \overline{\{x_n\}}$ компактно. Для числа $\frac{\varepsilon_0}{2}$ и компакта $K = K_0 \cup J$ выберем $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, K\right) > 0$ из условия равномерной устойчивости в положительном направлении системы (2.1.1) на компактах и пусть $\overline{x}_n \in J_{h(x_n)}$ таково, что $\rho(x_n, J_{h(x_n)}) = \rho(x_n, \overline{x}_n)$. Тогда для достаточно больших n имеем $\rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta$ и, следовательно,

$$\rho(x_n t_n, J_{h(x_n)t_n}) \leq \rho(x_n t_n, \overline{x}_n t_n) < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.2.6}$$

Неравенства (2.2.6) и (2.2.5) не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Докажем пятое утверждение теоремы, т.е. если $x \in X$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt, J_{h(x)t}) = 0$. Если допустить, что это не так, то найдутся $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_0 t_n, J_{h(x_0)t_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.2.7}$$

В условия теоремы последовательность $\{\pi^{t_n}\}$ можно считать сходящейся в $C(X,Y;h)$. Пусть $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^{t_n}$, $\bar{x} = \xi(x_0)$ и $\bar{y} = \xi(y_0)$. Переходя к пределу в неравенстве (2.2.7) и учитывая, что $\xi(J_{h(x_0)}) = J_{h(\xi(x_0))}$, получим

$$\rho(\overline{x}, J_{\overline{y}}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.2.8}$$

С другой стороны $\overline{x} \in \omega_x$ и $\overline{x} \in X_{\overline{y}}$ и, следовательно, $\overline{x} \in J_{\overline{y}}$. Последнее противоречит (2.2.8). Полученное противоречие полностью завершает доказательство теоремы.

2.3. Гомоморфизмы диссипативных систем

В этом параграфе устанавливаются условия, при которых свойства поточечной, компактной и локальной диссипативности сохраняются при гомоморфизмах.

Пусть X и Y - полные метрические пространства, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ - динамические системы на X и Y соответственно, Ω_X (Ω_Y) - замыкание множества всех ω-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ ($(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$) и J_X (J_Y) - ее центр Левинсона.

Лемма 2.3.1. *Пусть $h : X \to Y$ - гомоморфизм динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, тогда:*

(1) $h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y$;

(2) *если множество M компактно, то* $h(D^+(M)) \subseteq D^+(h(M))$ *и* $h(J^+(M)) \subseteq J^+(h(M))$;

(3) *если* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *поточечно диссипативна, то* $h(D^+(\Omega_X)) \subseteq D^+(\Omega_Y)$ *и* $h(J^+(\Omega_X)) \subseteq J^+(\Omega_Y)$.

Доказательство. Пусть $x \in \Omega_X$, тогда существует $x_n \in \omega_{x_n}$ $(\tilde{x}_n \in X)$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Так как $h(\omega_{\tilde{x}_n}) \subseteq \omega_{h(\tilde{x}_n)}$, то $h(x_n) \in \omega_{h(\tilde{x}_n)}$ и, следовательно, $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) \in \Omega_{h(X)} \subseteq \Omega_Y$.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть $x \in \Omega_X$, тогда согласно лемме 1.5.5 существует $\tilde{x} \in M$ такое, что $x \in D^+_{\tilde{x}}$ и, следовательно, существуют $x_n \to \tilde{x}$ и $t_n \ge 0$ такие, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$. Заметим, что $h(x_n) \to h(\tilde{x}) \in h(M)$ и $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n)t_n \in D^+(h(M))$. Аналогично устанавливается и включение $h(J^+(M)) \subseteq J^+(h(M))$.

Наконец, заметим, что третье утверждение леммы вытекает из первых двух.

Теорема 2.3.2. *Пусть h гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$. Имеют место следующие утверждения:*

(1) *если динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечено диссипативна, то $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ также является поточечно диссипативной и $h(\Omega_X) = \Omega_Y$;*
(2) *если динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна, то $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ также компактно диссипативна и $h(J_X) = J_Y$;*
(3) *если динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ локально диссипативна и h - открытое отображение, то $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ также локально диссипативна.*

Доказательство. В силу того, что $Y = h(X)$ и все положительные полутраектории системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ относительно компактны, то таковыми являются и положительные полутраектории системы $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$. Поэтому для ее поточечной диссипативности достаточно показать, что $\Omega_Y = h(\Omega_X)$. Пусть $y \in \Omega_Y$, тогда существуют $\{y_n\}$ и $\{\tilde{y}_n\}$ такие, что $y_n \in \omega_{\tilde{y}_n}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Так как $Y = h(X)$, то существует $\tilde{x}_n \in X$ такое, что $\tilde{y}_n = h(\tilde{x}_n)$ и, следовательно, $h(\omega_{\tilde{x}_n}) = \omega_{\tilde{y}_n}$. Поэтому найдется $x_n \in \omega_{\tilde{x}_n} \subseteq \Omega_X$, для которого $h(x_n) = y_n$. В силу поточечной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ множество Ω_X компактно и, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $x := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, тогда $x \in \Omega_X$ и $h(x) = y$. Таким образом $\Omega_Y \subseteq h(\Omega_X)$. Для завершения доказательства первого утверждения теоремы достаточно сослаться на лемму 2.3.1.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Если h - гомоморфизм компактно диссипативной динамической системы

$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$, то согласно первому утверждению теоремы система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ поточечно диссипативна. Согласно теореме 1.5.17 для компактной диссипативности $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ достаточно показать, что для любого непустого компакта $N \subset Y$ множество $\Sigma_N^+ = \{\sigma(t, y) \mid t \geq 0, y \in N\}$ относительно компактно. Пусть $\{\tilde{y}_n\} \subset \Sigma_N^+$ - произвольная последовательность. Тогда существуют $\{y_n\} \subseteq N$ и $\{t_n\} \subset \mathbb{T}_2$ $(t_n \geq 0)$ такие, что $\tilde{y}_n = \sigma(t_n, y_n)$. Если $\{t_n\}$ ограничена, то последоательность $\{\tilde{y}_n\}$ относительна компактна, поэтому без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что $t_n \to +\infty$ и $y_n \to y \in Y$. Так как (X, h, Y) локально-тривиально, то существует последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ такая, что $x_n \to x$ и $h(x_n) = y_n$. В силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся, и, следовательно, $\{h(x_n t_n)\} = \{h(x_n) t_n\} = \{y_n t_n\}$ также является сходящейся. Таким образом, $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна. Покажем теперь, что $h(J_X) = J_Y$. Согласно лемме 2.3.1 $h(J^+(\Omega_X)) \subseteq J^+(\Omega_Y)$. Покажем, что имеет место и обратное включение $J^+(\Omega_Y) \subseteq h(J^+(\Omega_X))$. Пусть $q \in J^+(\Omega_Y)$, тогда найдется $y \in \Omega_Y$ такое, что $q \in J_y^+$. Согласно первому утверждению теоремы 2.3.2 имеем $h(\Omega_X) = \Omega_Y$ и, следовательно, существует $x \in \Omega_X$ такой, что $h(x) = y$. Пусть $y_n \to y$ и $t_n \to +\infty$ таковы, что $y_n t_n \to q$. Так как $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ локально-тривиально, то существует $\{x_n \to x\}$ такая, что $h(x_n) = y_n$. В силу компактной диссипативности системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n t_n$, тогда $p \in J_x^+ \subseteq J^+(\Omega_X)$ и, следовательно, $h(p) = \lim\limits_{n \to +\infty} h(x_n t_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n t_n = q$, т.е. $J^+(\Omega_Y) \subseteq h(J^+(\Omega_X))$. Таким образом, $h(J^+(\Omega_X)) = J^+(\Omega_Y)$, и для завершения доказательства второго утверждения теоремы достаточно заметить, что согласно теореме 1.5.11 $J_X = J^+(\Omega_X)$ и $J_Y = J^+(\Omega_Y)$.

Покажем третье утверждение теоремы. Прежде всего заметим, что согласно второму утверждению теоремы динамическая система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $h(J_X) = J_Y$. По теореме 1.6.4 для локальной диссипативности $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ достаточно показать, что J_Y является равномерно притягивающим множеством. Предварительно докажем, что для любого

$\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(h(x), J_Y) < \varepsilon \tag{2.3.1}$$

при всех $x \in B(J_X, \delta)$. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0, \delta_n \downarrow 0$ и $x_n \in B(J_X, \delta_n)$ такие, что

$$\rho(h(x_n), J_Y) \geq \varepsilon_0. \tag{2.3.2}$$

Последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Полагая $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ и переходя к пределу в неравенстве (2.3.2), когда $n \to +\infty$, мы получим

$$\rho(h(x_0), J_Y) \geq \varepsilon_0, \tag{2.3.3}$$

т.е. $h(x_0) \notin J_Y$ и $x_0 \in J_X$. Последнее противоречит равенству $h(J_X) = J_Y$. Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ таковы, что выполнено неравенство (2.3.1). В силу локальной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ из теоремы 1.6.4 следует, что найдется $\gamma > 0$ такое, что будет выполняться равенство

$$\lim \beta(\pi^t B(J_X, \gamma), J_X) = 0. \tag{2.3.4}$$

В силу открытости гомоморфизма h множество $V = h(B(J_X, \gamma)) \supset J_Y$ открыто. Пусть $\alpha > 0$ таково, что $B(J_Y, \alpha) \subset V$. Из Равенства (2.3.4) следует, что для $\delta(\varepsilon) > 0$ найдется $L(\varepsilon) = L(\delta(\varepsilon)) > 0$ такое, что

$$\beta(\pi^t B(J_X, \gamma), J_X) < \delta(\varepsilon) \tag{2.3.5}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Из неравенств (2.3.1) и (2.3.5) вытекает неравенство

$$\beta(\sigma^t B(J_Y, \alpha), J_Y) < \varepsilon$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Теорема полностью доказана.

Следствие 2.3.3. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - компактно диссипативная неавтономная динамическая система и Y компактное инвариантное множество (т.е. $\sigma^t Y = Y$ при всех $t \in \mathbb{T}_2$), тогда:*

(1) *$h(J_X) = Y$ и, следовательно, $J_y = J_X \bigcap X_y \neq \emptyset$ при всех $y \in Y$, где $X_y = h^{-1}(y)$;*

(2) *$J_y = \{x \in X_y|$ существует целая относительно компакнтая траектория φ_x динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ такая, что $\varphi(0) = x\}$.*

Замечание 2.3.4. *Нам неизвестно, насколько существенно условие открытости h в теореме 2.3.2, однако полностью отказаться от этого условия, видимо, нельзя.*

Напомним, что $\varphi : Y \to X$ называют непрерывным сечением гомоморфизма $h : X \to Y$, если φ непрерывно и $h \circ \varphi = Id_Y$.

Непрерывное сечение φ называют инвариантным, если $\varphi \circ \sigma^t = \pi^t \circ \varphi$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$.

Теорема 2.3.5. *Пусть гомоморфизм h допускает непрерывное инвариантное сечение, тогда:*

(1) *если $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна, то $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ также поточечно диссипативна, $h(\Omega_X) = \Omega_Y$ и $h(D^+(\Omega_X)) = D^+(\Omega_Y)$;*

(2) *если $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна, то и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $h(J_X) = J_Y$;*

(3) *если $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ локально диссипативна, то и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ локально диссипативна.*

Доказательство. Пусть φ - непрерывное инвариантное сечение h. Так как $h \circ \varphi = id_Y$, то $h(X) = Y$, и первое и второе утверждения вытекают из теоремы 2.3.2, кроме равенства $h(D^+(\Omega_X)) = D^+(\Omega_Y)$. Для доказательства последнего равенства заметим, что в силу компактности Ω_X из леммы 2.3.1 следует включение $h(D^+(\Omega_X)) \subseteq D^+(\Omega_Y)$.

Покажем, что имеет место и обратное включение. Действительно, согласно теореме 2.3.2 динамическая система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ поточечно диссипативна и $\Omega_Y = h(\Omega_X)$ компактно. Так как $\varphi : Y \to X$ есть гомоморфизм $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ в $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, то согласно лемме 2.3.1 $\varphi(D^+(\Omega_Y)) \subseteq D^+(\Omega_X)$ и, следовательно,

$$D^+(\Omega_Y) = h \circ \varphi(D^+(\Omega_X)) \subseteq h(D^+(\Omega_X)).$$

Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ локально диссипативна, тогда по доказанному выше динамическая система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна. Согласно теореме 1.6.4 для локальной диссипативности $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ достаточно показать, что ее центр Левинсона J_Y является равномерно притягивающим множеством. Также, как и в теореме 2.3.2, для произвольного $\varepsilon > 0$ $(\eta > 0)$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ $(\xi(\eta) > 0)$ так, что

$$\rho(h(x), J_Y) < \varepsilon \quad (\rho(\varphi(y), J_X) < \eta) \tag{2.3.6}$$

при всех $x \in B(J_X, \delta)$ $(y \in B(J_Y, \xi))$. Так как $X, \mathbb{T}_1, \pi)$ локально диссипативна, то существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(J_X, \gamma), J_X) = 0. \tag{2.3.7}$$

Положим $\nu = \xi(\gamma) > 0$ и покажем, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\sigma^t B(J_Y, \nu), J_Y) = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, согласно (2.3.7) найдется $L(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\pi^t B(J_X, \gamma) \subseteq B(J_X, \delta) \tag{2.3.8}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. В силу выбора ν имеем

$$\varphi(B(J_X, \gamma)) \subseteq B(J_X, \gamma). \tag{2.3.9}$$

Из включений (2.3.8) и (2.3.9) вытекает, что

$$\pi^t \varphi(B(J_X, \gamma)) \subseteq B(J_X, \delta) \tag{2.3.10}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Из (2.3.6) и (2.3.10) получаем

$$h(\pi^t \varphi(B(J_Y, \nu))) \subseteq B(J_Y, \varepsilon) \tag{2.3.11}$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Так как $h \circ \pi^t \circ \varphi = \sigma^t \circ h \circ \varphi = \sigma^t$ $(h \circ \varphi = Id_Y)$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$, то из (2.3.11) имеем

$$\sigma^t B(J_Y, \nu) \subseteq B(J_Y, \varepsilon)$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$. Теорема полностью доказана.

2.4. Динамические системы с конвергенцией

Изучим один специальный класс неавтономных динамических систем, называемых системами с конвергенцией.

Неавтономную систему $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ назовем конвергентной, если выполнены следующие условия:

(1) $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативны;
(2) $J_X \bigcap X_y$ содержит ровно одну точку x_y (т.е. $J_X \bigcap X_y = \{x_y\}$), каково бы ни было $y \in J_Y$, где $J_X(J_Y)$ - центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ $((Y, \mathbb{T}_2, \sigma))$.

Напомним, что целой траекторией динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, проходящей через точку $x \in X$, называется непрерывное отображение $\varphi : S \to X$, удовлетворяющее следующим условиям: $\varphi(0) = x$ и $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$ и $s \in S$.

Множество $K \subseteq X$ назовем слабо инвариантным, если через каждую точку $x \in K$ проходит хотя бы одна целая траектория, целиком лежащая в K.

Пусть $K \subseteq X$ и $K \bigotimes K = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in K, h(x_1) = h(x_2)\}$. Имеет место следующая

Лемма 2.4.1. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система, $K \subseteq X$ - компактное слабо инвариантное множество и $M = h(K)$. Если*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{(x_1, x_2) \in K \bigotimes K} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0, \qquad (2.4.1)$$

то $K_y = K \bigcap X_y$ состоит ровно из одной точки при всех $y \in M$.

Доказательство. Если допустить, что это не так, то найдется $y_0 \in M$, такое что K_{y_0} содержит по крайней мере две различные точки $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Так как K слабо инвариантно, то существует целая траектория φ_i, проходящая через точку $\bar{x}_i (i = 1, 2)$ при $t = 0$ и целиком находящаяся в K, т.е. $\varphi_i(\mathbb{S}) \subseteq K$. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{2}$ и $L(\varepsilon) > 0$ таковы, что

$$\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon \qquad (2.4.2)$$

при всех $t \geq L(\varepsilon)$ и $(x_1, x_2) \in K \bigotimes K$. Тогда, в частности, имеем

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \rho(\pi^t \varphi_1(-t), \pi^t \varphi_2(-t)) < \varepsilon \qquad (2.4.3)$$

при $t \geq L(\varepsilon)$. Неравенство (2.4.3) противоречит выбору ε. Лемма доказана.

Будем говорить, что система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию (A), если для любого $K \in C(X)$, множество $\Sigma^+(K) := \bigcup \{\pi^t K \mid t \geq 0\}$ относительно компактно.

Обозначим через L_X множество всех точек $x \in X$, через которые проходит чотя бы одна целая относительно компакная траектория $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Замечание 2.4.2. *Заметим, что для компактно диссипативных динамических систем $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ имеет место равенство $L_X = J_X$, где J_X центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Будем говорить, что полутраектория $\Sigma_x^+ = \{xt \mid t \geq 0\}$ асимптотически устойчива относительно неавтономной системы (2.1.1), если

(1) для любых $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $\rho(x,p) < \delta$ $(h(x) = h(p))$ влечет $\rho(xt, pt) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;

(2) существует $\gamma = \gamma(x) > 0$ такое, что из $(x,p) \in X \bigotimes X$ и $\rho(x,p) < \gamma$ следует $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt, pt) = 0$.

Теорема 2.4.3. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ неавтономная динамическая система, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию (A) и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$L_X \bigcap X_y$ содержит не более одной точки, каково бы ни было $y \in J_Y$;*

(2) *каждая полутраектория $\Sigma_x^+ = \{xt \mid t \geq 0\}$ асимптотически устойчива относительно неавтономной системы (2.1.1).*

(3) (a) *для любого $\varepsilon > 0$ и $K \in C(X)$ существует $\delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(h(x_1) = h(x_2), x_1, x_2 \in K)$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;*

(b) *$\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ при всех $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$;*

(4) *Имеет место равенство (2.4.1) для любых $K \in C(X)$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. и докажем 2.. Прежде всего докажем 2а. Если допустить, что 2.(a) неверно, то найдутся $p_0 \in X, \varepsilon_0 > 0, p_n \to p_0$ $(h(p_n) = h(p_0))$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(p_n t_n, p_0 t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{2.4.4}$$

Так как $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию (A), то последоательности $\{p_n t_n\}$ и $\{p_0 t_n\}$ можно считать сходящимися. Положим

$\bar{p} = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n t_n$ и $\bar{p}_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} p_0 t_n$. Из неравенства (2.2.2) следует, что $\bar{p} \neq \bar{p}_0$. С другой стороны, $h(\bar{p}) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(p_n)t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h(p_0)t_n = h(\bar{p}_0) = \bar{y} \in J_Y$, и, согласно лемме 1.2.2, $\bar{p}, \bar{p}_0 \in L_X \bigcap X_{\bar{y}}$, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие показывает, что из 1. следует 2a. Покажем теперь, что для любого $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0. \tag{2.4.5}$$

Если допустить, что противное, то найдутся $(x_1^0, x_2^0) \in X \bigotimes X, \varepsilon > 0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_1^0 t_n, x_2^0 t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{2.4.6}$$

Так как $(X, \mathbb{T}, \pi)$ удовлетворяет условию (A), то последовательности $\{x_i^0 t_n\}$ $(i = 1, 2)$ и $\{y_0 t_n\}$ $(y_0 = h(x_1^0) = h(x_2^0))$ можно считать сходящимимся. Положим $\bar{x}_i^0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_i^0 t_n$ и $\bar{y}_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_0 t_n$, тогда $\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0 \in L_X \bigcap X_{\bar{y}_0}$, и в силу условия 1. $\bar{x}_1^0 = \bar{x}_2^0$. Последнее противоречит неравенству (2.4.6). Докажем теперь, что из 2. следует 3. Прежде всего покажем, что если $p_0 \in X$ и $x \in X_q$ $(q = h(p))$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, pt) = 0. \tag{2.4.7}$$

Допустим, что это не так. Обозначим через G_q множество всех точек $x \in X_q$, для которых имеет место равенство (2.4.7). В силу нашего допущения $G_q \neq X_q$. Отметим, что в условиях теоремы множество G_q открыто в X_q. Положим $\Gamma_q := \partial G_q$ (∂G_q - граница G_q) и пусть $\bar{p} \in \Gamma_q$. Тогда $B(\bar{p}, \gamma(\bar{p}))$ имеет пустое пересечение с G_q и с $X_q \setminus G_q$. Нетрудно заметить, что эти соотношния совместно выполнятся не могут и, следовательно, $\Gamma_q = \emptyset$ для любого $q \in Y$, т.е. $X_q = G_q$. Пусть теперь $K \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(h(x_1) = h(x_2), x_1, x_2 \in K)$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Если допустить, что это не так, то найдутся $K_0 \in C(X), \varepsilon_0 > 0, \delta_n \to 0, \{x_n^i\} \subseteq K_0$ $(i = 1, 2)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что $\rho(x_n^1, x_n^2) < \delta_n$ и

$$\rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \geq \varepsilon_0 \tag{2.4.8}$$

В силу компактности K_0 последовательности $\{x_n^i\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^1 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2$ $(\bar{x} \in K_0)$. Так как полутраектория $\Sigma_{\bar{x}}^+$ асимптотически устойчива, то для $\frac{\varepsilon_0}{3} > 0$ и $\bar{x} > 0$ существует $\delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \bar{x})$ такое, что $\rho(x, \bar{x}) < \delta(\frac{\varepsilon_0}{3}, \bar{x})$ $(h(x) = h(\bar{x}))$ влечет $\rho(xt, \bar{x}t) < \frac{\varepsilon_0}{3}$ при всех $t \geq 0$. Так как $x_n^i \to \bar{x}$ $(i = 1, 2)$ при $n \to +\infty$, то существует $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n^i, \bar{x}) < \frac{\varepsilon_0}{3}$ при всех $n \geq \bar{n}$. Из последнего неравенства получаем

$$\rho(x_n^1 t, x_n^2 t) \leq \frac{2\varepsilon_0}{3} \tag{2.4.9}$$

при всех $t \geq 0$ и $n \geq \bar{n}$. Однако, неравенство (2.4.9) противоречит (2.4.8). Таким образом мы показали, что из 2. следует 3.

Покажем теперь, что из условия 3. следует 4. Доказательство проведем методом от противного. Если допустить, что из 3. не следует 4., то найдутся $\varepsilon_0 > 0, K_0 \in C(X)$, последовательности $t_n \to +\infty$ и $\{x_n^i\} \subseteq K_0$ $(i = 1, 2; h(x_n^1) = h(x_n^2))$ такие, что выполнено неравенство (2.4.8). В силу компактности K_0 последовательности $\{x_n^i\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $x^i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^i$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\delta(\frac{\varepsilon}{3}, K_0) > 0$ выбрано по $\frac{\varepsilon_0}{3}$ и по компакту $K_0 \in C(X)$ из условия 3.(a). Так как $h(x^1) = h(x^2)$ и $x^1, x^2 \in K_0$, то для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ найдется $L(\frac{\varepsilon}{3}, x^1, x^2) > 0$ такое, что $\rho(x^1 t, x^2 t) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $t \geq L(\frac{\varepsilon}{3}, x^1, x^2)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) &\leq \rho(x_n^1 t_n, x^1 t_n) \\ &+ \rho(x^1 t_n, x^2 t_n) + \rho(x^2 t_n, x_n^2 t_n) < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

при достаточно больших n. Неравенство (2.4.10) противоречит (2.4.8). Полученное противоречие показывает, что наше допущение не имеет места, т.е. выполняется неравенство (2.4.1). Наконец, заметим, что из 4. следует 1. Действительно, если допустить, что это не так, то найдется $y_0 \in J_Y$, такое, что $L_X \bigcap X_{y_0}$ содержит более одной точки. Пусть $x_1, x_2 \in L_X \bigcap X_{y_0}$ $(x_1 \neq x_2)$ и M - компактное инвариантное множество, содержащее точки x_1 и x_2. Тогда согласно лемме 2.4.1 $M_{y_0} = M \bigcap X_{y_0}$ содержит не более одной точки, а, с другой стороны, $x_1 \neq x_2$ и $x_1, x_2 \in M_{y_0}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 2.4.4. *Пусть $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ и $(Y,\mathbb{T}_2,\sigma)$ компактно диссипативны, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ конвергентна;*
(2) *каждая полутраектория $\Sigma_x^+ (x\in X)$ асимптотически устойчива;*
(3) (a) *для любого $\varepsilon > 0$ и $K \in C(X)$ существует $\delta(\varepsilon,K) > 0$ такое, что $\rho(x_1,x_2) < \delta$ ($h(x_1) = h(x_2), x_1,x_2\in K$);*
   (b) *$\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(x_1t,x_2t)=0$ для любых $(x_1,x_2)\in X\dot{\times}X$;*
(4) *для любого $K\in C(X)$ имеет место равенство (2.4.1).*

Теорема 2.4.5. *Пусть $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ - неавтономная динамическая система, $(Y,\mathbb{T}_2,\sigma)$ компактно диссипативна и $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ локально вполне непрерывна (т.е. для любого $x \in X$ существуют $\delta=\delta_x>0$ и $l=l_x>0$ такие, что $\pi^l B(x,\delta_x)$ относительно компактно). Для того, чтобы $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы каждая полутраектория Σ_x^+ системы $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ была относительно компактной и чтобы была конвергентной система $\langle (h^{-1}(J_Y),\mathbb{T}_1,\pi),(J_Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$, где J_Y - центр Левинсона $(Y,\mathbb{T}_2,\sigma)$.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Достаточность. Прежде всего покажем, что $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ поточечно диссипатвина. Для этого в условиях теоремы достаточно показать, что $\Omega_X=\overline{\bigcup\{\omega_x | x\in X\}}$ компактно. Заметим, что $h(\omega_x)\subseteq\omega_{h(x)}\subseteq J_Y$ и, следовательно, $\omega_x\subseteq h^{-1}(J_Y)$. Так как ω_x компактно и инвариантно, то $\omega_x\subseteq\tilde{J}$, где $\tilde{J}$ центр Левинсона динамической системы $(h^{-1}(J_Y),\mathbb{T}_1,\pi)$. Таким образом, $\Omega_X\subseteq\tilde{J}$, и, следовательно, Ω_X компактно. Согласно теореме 1.4.3 для локально вполне непрерывных динамических систем поточечная и компактная диссипативности эквивалентны. Таким образом, $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ компактно диссипативна. Пусть J_X - центр Левинсона $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$, тогда $h(J_X)\subseteq J_Y$ и, следовательно, $J_X\subseteq h^{-1}(J_Y)$. Так как $\tilde{J}$ - максимальное компактное инвариантное множество в $(h^{-1}(J_Y),\mathbb{T}_1,\pi)$, то $J_X\subseteq\tilde{J}$, и поэтому

$J_X \bigcap X_y \subseteq \tilde{J} \bigcap X_y$ при всех $y \in J_Y$. Из последнего включения следует, что множество $J_X \bigcap X_y$ содержит не более одной точки, каково бы ни было $y \in J_Y$. Теорема доказана.

Теорема 2.4.6. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система, $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и существует $y_0 \in Y$ такое, что $Y = H^+(y_0)$. Для того чтобы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

(1) *$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию (A);*
(2) *$L_X \bigcap X_y$ содержит не более одной точки, каково бы ни было $y \in J_Y = \omega_{y_0}$.*

Доказательство. Необходимость условий 1 и 2 очевидна.

Достаточность. Пусть $x_0 \in X_{y_0}$, тогда $h(H^+(x_0)) = H^+(y_0)$ и $h(\omega_{x_0}) = \omega_{y_0}$. Далее заметим, что $h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y \subseteq J_Y = \omega_{y_0}$ и так как $\omega_{x_0} \subseteq \Omega_X$, то $h(\Omega_X) = \omega_{y_0}$. Так как $\Omega_X \subseteq L_X$, $L_X \bigcap X_y$ содержит не более одной точки при всех $y \in J_Y = \omega_{y_0}$. Таким образом, $\Omega_X = \omega_{x_0}$ компактно, а, значит, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна. Так как $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна и удовлетворяет условию (A), то согласно теореме 1.5.17 $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна. Пусть J_X - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, тогда $J_X \subseteq L_X$, и, следовательно, $J_X \bigcap X_y$ содержит не более одной точки, каково бы ни было $y \in J_Y$. Теорема доказана.

Точка $y_0 \in Y$ называется [**153**] асимптотически стационарной (асимптотически τ-периодической, асимптотически почти периодической, асимптотически рекуррентной), если существует стационарная (τ-периодическая, почти периодическая, рекуррентная) точка $p \in Y$ такая, что

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(y_0 t, qt) = 0. \qquad (2.4.11)$$

Замечание 2.4.7. *1. Пусть $Y = H^+(y_0)$ компактно. Тогда динамическая система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $J_Y = \omega_{y_0}$;*

2. Пусть y_0 асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна) и $Y = H^+(y_0)$. Тогда $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $J_Y = \omega_{y_0}$.

Точка $x \in X$ называется [**131**], [**153**] сравнимой по возвращаемости в пределе с $y \in Y$, если $\mathcal{L}_y \subseteq \mathcal{L}_x$, где $\mathcal{L}_y = \{\{t_n\} | t_n \to +\infty$ и $\{yt_n\}$ сходится $\}$.

Известно [**153**],[**99**], что точка $x \in X$, сравнимая по возвращаемости в пределе с $y \in Y$, имеет тот же характер возвращаемости в пределе, что и $y \in Y$. В частности, если точка $y \in Y$ асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимтотически рекуррентна) и $x \in X$ сравнима по возращаемости в пределе с $y \in Y$, то и точка x асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимптотически рекуррентна).

Теорема 2.4.8. *Пусть $y_0 \in Y$ асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимптотически почти периодична, асимтотически рекуррентна) и $Y = H^+(y_0)$. Тогда чтобы система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) *$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию (A);*
(2) *каждая точка $x \in X$ сравнима по возвращаемости в пределе с $y = h(x)$, и, в частности, x асимптотически стационарна (асимптотически τ-периодична, асимп- тотически почти периодична, асимтотически рекуррентна);*
(3) *для любых $\varepsilon > 0$ и $K \in C(X)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(h(x_1) = h(x_2), x_1, x_2 \in K)$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ для любого $t \geq 0$;*
(4) *равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ имеет место для любых $(x_1, x_2) \in X \dot{\times} X$.*

Доказательство. Необходимость условий 1., 3. и 4. вытекает из замечания 2.4.7. Нам остается доказать, что в условиях теоремы имеет место условие 2. Пусть $x \in X$ и $y = h(x)$, тогда согласно конвергентности системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ множество $H^+(x)$ компактно. Заметим, что $\omega_x \bigcap X_q \subseteq J_X \bigcap X_q$ для любого $q \in \omega_y$, и так как $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ конвергентна, то $\omega_x \bigcap X_q$ содержит ровно одну точку. Согласно теореме 1 [**99**] точка x сравнима по возвращаемости в пределе с

y. Если $y \in H^+(y_0)$, то очевидно, что y асимптотически стационарна (асимптотически ω-периодична, асимптотически почти периодична, асимтотически рекуррентна) и, следовательно, x тоже.

Покажем, что 1., 2., 3. и 4. обуславливают конвергентность системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$. Сначала из условия 2. получаем, что $\omega_x \neq \emptyset$, компактно, минимально и $h(\omega_x) = \omega_{y_0}$ для любого $x \in X$. Отметим, что $\omega_x \bigcap X_q$ содержит ровно одну точку для любого $q \in \omega_{y_0}$. В противном случае существуют $q_0 \in \omega_{y_0}, p_1, p_2 \in \omega_x \bigcap X_q$ $(p_1 \neq p_2)$ и $t_n^i \to +\infty$ $(i = 1, 2)$ такие, что $xt_n^i \to p_i$ $(i = 1, 2)$ при $n \to +\infty$. Заметим, что $yt_n^i \to q_0$ $(i = 1, 2)$ при $n \to +\infty$, где $y = h(x)$. Положим $\tilde{t}_{2n-1} = t_n^1$ $\tilde{t}_{2n} = t_n^2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, тогда $\{\tilde{t}_n\} \in \mathcal{L}_y$ и следовательно $\{\tilde{t}_n\} \in \mathcal{L}_x$, т.е. $\{x\tilde{t}_n\}$ сходится, откуда следует, что $p_1 = p_2$. Последнее равенство противоречит выбору p_1 и p_2. Полученное противоречие доказывает необходимое утверждение. Докажем сейчас, что $\omega_{x_1} \bigcap X_q = \omega_{x_2} \bigcap X_q$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и $q \in \omega_{y_0}$. Пусть $q \in \omega_{y_0}$, $\{p_i\} = \omega_{x_i} \bigcap X_q$ $(i = 1, 2)$ и $\{t_n\} \in \mathcal{L}_q$ такие, что $qt_n \to q$. Из условия 4. и минимальности ω_{x_i} $(i = 1, 2)$ имеем $\rho(p_1 t_n, p_2 t_n) \to 0$ при $n \to +\infty$ и, следовательно, $p_1 = p_2$. Таким образом $\omega_{x_1} = \omega_{x_2}$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и, следовательно, система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна, и так как она удовлетворяет условию (A), то согласно теореме 2.4.6 $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна. Для завершения доказательства теоремы достаточно применить теорему 2.4.3 и замечание 2.4.2.

Следствие 2.4.9. *В условиях теоремы 2.4.5 если пространство X локально компактно, то условие 1. теоремы 2.4.8 вытекает из условий 2., 3. и 4.*

Теорема 2.4.10. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система, $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и ее центр Левинсона J_Y является минимальным множеством (т.е. любая полутраектория Σ_y^+ $(y \in J_Y)$ является плотной в J_Y). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ конвергентна;*
(2) *$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию (A) и для любого $K \in C(X)$ имеет место равенство (2.4.1).*

Доказательство. Согласно следствию 2.4.4 из 1. следует 2. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что из 2 следует 1. Пусть $K \in C(X)$. Так как $\Sigma^+(K)$ относительно компактно, то согласно лемме 1.2.2 множество $\omega(K) = \bigcap\limits_{t\geq 0}\overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t}\pi^\tau K}$ непусто, компактно, инвариантно и, следовательно, $h(\omega(K)) \subseteq \omega(h(K\ )) \subseteq J_Y$, так как J_Y максимальное компактное инвариантное множество в Y. В силу минимальности J_Y имеет место равенство

$$h(\omega(K)) = J_Y. \tag{2.4.12}$$

Заметим, что $\omega(K_1) = \omega(K_2)$ для любого K_1 и K_2 из $C(X)$. Действительно, так как $M = \omega(K_1)\bigcup\omega(K_2)$ компактно и инвариантно, а J_Y минимально, то $h(M) = J_Y$. С другой стороны, согласно лемме 2.4.1 $M_y = M\bigcap X_y$ содержит ровно одну точку, каково бы ни было $y \in J_Y$. Далее, так как $\omega(K_i)\bigcap X_y \subseteq M\bigcap X_y (i = 1, 2)$, то $\omega(K_1)\bigcap X_y = \omega(K_2)\bigcap X_y = M\bigcap X_y$ при всех $y \in J_Y$ и, следовательно, $\omega(K_1) = \omega(K_2)$. Поскольку $\omega(K_1) = \omega(K_2)$ для любых K_1 и K_2 из $C(X)$, то $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна и, согласно теореме 2.4.3 $\langle(X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна.

Следствие 2.4.11. *Пусть $\langle(X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ - неавтономная динамическая система, $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна, J_Y минимально и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию (A), тогда условия 1.-4. в следствии 2.4.4 эквивалентны.*

Теорема 2.4.12. *Пусть $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $h(L_X) = J_Y$. Для того чтобы неавтономная динамическая система $\langle(X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ была конвергентной, необходимо, а если $J_Y = Y$, то и достаточно, выполнение следующих условий:*

(1) *Σ^+_x относительно компактно, каково бы ни было $x \in X$, и L_X относительно компактно;*
(2) *$L_X\bigcap X_y$ содержит ровно одну точку каково бы ни было $y \in Y$;*
(3) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, x_y) < \delta$ ($\{x_y\} = L_X\bigcap X_y$ и $h(x) = y \in J_Y$) влечет $\rho(xt, x_{yt}) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$ и $x \in X$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle(X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ конвергентна, тогда $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ компактно диссипативна и $J_X = L_X$. Очевидно, что условия 1 и 2 выполнены. Покажем, что имеет место и 3. Допустим, что это не так, тогда существуют $\varepsilon_0 > 0, \delta_n \downarrow 0, \{x_n\}$ из X и $\{y_n\}$ из J_Y и $t_n \to +\infty$ такие, что $\rho(x_n, x_{y_n}) < \delta_n$ $(y_n = h(x_n))$ и

$$\rho(x_n t_n, x_{y_n} t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{2.4.13}$$

Так как J_Y и J_X компактны, то последовательности $\{y_n\}$ и $\{x_{y_n}\}$ можно считать сходящимися. Положим $y_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, тогда $x_{y_0} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. В силу компактной диссипативности $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\bar{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$. Далее, так как $y_n t_n \in J_Y$, то последовательность $\{y_n t_n\}$ также можно считать сходящейся, и положим $\bar{y} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n t_n$. Заметим, что $h(\bar{x}) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n)t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n t_n = \bar{y}$, $\bar{x} \in J_X$, и, следовательно, $\bar{x} \in J_X \bigcap X_{\bar{y}} = \{x_{\bar{y}}\}$, т.е. $\bar{x} = x_{\bar{y}}$. С другой стороны, переходя к пределу в (2.4.13) при $n \to +\infty$, имеем $\rho(\bar{x}, x_{\bar{y}}) \geq \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1., 2. и 3. теоремы. Для конвергентности $\langle(X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ достаточно показать, что в условиях теоремы динамическая система $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ компактно диссипативна. Согласно условию теоремы $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ поточечно диссипативна и $\Omega_X = \overline{\bigcup\{\omega_x | x \in X\}} \subseteq L_X$. Заметим, что L_X замкнуто. Покажем, что L_X орбитально устойчиво. Допустим, что это не так, тогда существуют $\varepsilon_0 > 0, x_n \to x_0 \in L_X$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, L_X) \geq \varepsilon_0. \tag{2.4.14}$$

Так как $y_n \to y_0 = h(x_0)$, где $y_n = h(x_n)$, то в условиях теоремы $x_{y_n} \to x_{y_0} = x_0$, и, следовательно, $\rho(x_n, x_{y_n}) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_{y_n}) \to 0$. Из последнего соотношения и условия 3. теоремы следует, что $\rho(x_n t_n, x_{y_n} t_n) \to 0$. Последнее противоречит неравенству (2.4.14). Итак, L_X компактно, инвариантно и орбитально устойчиво. Так как $\Omega_X \subseteq L_X$, то $J^+(\Omega_X) \subseteq L_X$. Покажем, что $J^+(\Omega_X) = J_X$. Действительно, пусть $\bar{x} \in L_X$ и $\varphi : \mathbb{S} \to L_X$ целая траектория $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$, проходящая через точку $\bar{x}$ при $t = 0$. Обозначим через $\alpha_{\varphi_{\bar{x}}} = \bigcap_{t\le 0} \overline{\bigcup_{\tau \le t} \varphi(\tau)}$, тогда $\Omega_X \bigcap \alpha_{\varphi_{\bar{x}}} \neq \emptyset$. Пусть $p \in \alpha_{\varphi_{\bar{x}}} \bigcap \Omega_X$, тогда существует $t_n \to -\infty$ такая, что $\varphi(t_n) \to p$ и, следовательно, $\pi^{-t_n}\varphi(t_n) = \varphi(0) = \bar{x}$, т.е. $\bar{x} \in J_p^+ \subseteq J^+(\Omega_X)$. Таким образом, $L_X \subseteq J^+(\Omega_X)$, т.е. $L_X = J^+(\Omega_X)$ компактно и орбитально устойчиво и, согласно теореме 1.5.15, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна. Теорема доказана.

Теорема 2.4.13. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *- неавтономная динамическая система и* Y *- компактное минимальное множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *конвергентна;*

(2) *любая полутраектория* Σ_x^+ *(*$x \in X$*) относительно компактна и асимптотически устойчива;*

(3) (a) *любая полутраектория* Σ_x^+ *(*$x \in X$*) относительно компактна;*

(b) $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x_1t, x_2t) = 0$ *при всех* $(x_1, x_2) \in X\dot{\times}X$*;*

(c) *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $K \in C(X)$ *сущесвует* $\delta(\varepsilon, K) > 0$ *такое, что* $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(h(x_1) = h(x_2); x_1, x_2 \in K)$ *влечет* $\rho(x_1t, x_2t) < \varepsilon$ *при всех* $t \geq 0$*;*

(4) *любая полутраектория* Σ_x^+ *(*$x \in X$*) относительно компактна и имеет место равенство (2.4.1) для любого компакта* $K \in C(X)$.

Доказательство. Импликации 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. доказываются незначительной модификацией рассуждений из доказательства теоремы 2.4.3. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что из 4. следует 1.. Пусть $x_0 \in X$. Так как $\Sigma_{x_0}^+$ относительно компактно, то $\omega_{x_0} \neq \emptyset$, компактно и все движения в ω_{x_0} продолжаемы влево. Положим $M = \omega_{x_0}$. Так как $h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y \subseteq Y$ и Y минимально, то $h(M) = Y$ и, следовательно, $M_y = M \bigcap X_y \neq \emptyset$, каково бы ни было $y \in Y$. Согласно лемме 2.1.1 множество M_y состоит ровно из одной точки, каково бы ни было $y \in Y$. Покажем теперь, что для любого $x \in X$ имеет место равенство $\omega_x = M$. Действительно, пусть $K = \omega_x \bigcup M$, тогда согласно лемме 2.4.1 $K_y = K \bigcap X_y$ состоит ровно из одной точки при всех $y \in Y$. Так как $h(\omega_x) = h(\omega_{x_0}) = h(K) = Y$, то $\omega_x \bigcap X_y = \omega_{x_0} \bigcap X_y = K \bigcap X_y$ при всех

$y \in Y$ и, следовательно, $\omega_x = \omega_{x_0} = M$ при всех $x \in X$. Таким образом, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна. Пусть теперь $K \in C(X)$, тогда $\Sigma^+(K)$ относительно компактно. Действительно, если $\{x_n\} \subseteq K$ и $t_n \to +\infty$, то согласно условию 4. имеет место равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x_n t_n, M_{h(x_n)t_n}) = 0,$$

и, следовательно, последовательность $\{x_n t_n\}$ относительно компактна. Согласно теореме 1.5.17 динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна. Пусть J_X - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Тогда согласно лемме 2.4.1 множество $J_X \bigcap X_y$ содержит ровно одну точку, каково бы ни было $y \in Y$. Теорема полностью доказана.

Теорема 2.4.14. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система, $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $M \subseteq X$ - непустое компактное положительно инвариантное множество, удовлетворяющее следующим условиям:*

(1) *$h(M) = Y$;*
(2) *$M \bigcap X_y$ состоит ровно из одной точки, каково бы ни было $y \in J_Y$;*
(3) *M равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, p) < \delta$ ($x \in X_y, p \in M_y = M \bigcap X_y$) влечет $\rho(xt, pt) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt, M_{h(x)t}) = 0$ при всех $x \in X$.*

Тогда неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ конвергентна.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна и $\Omega_X \subseteq M$. Покажем, что M орбитально устойчиво. Допустим, что это не так, тогда существуют $\varepsilon_0 > 0, \delta_n \downarrow 0, x_n \in B(M, \delta_n)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0. \qquad (2.4.15)$$

В силу компактности M последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n, x_{y_n} \in M_{y_n}, \rho(x_n, M) = \rho(x_n, x_{y_n})$ и $y = h(x_0)$, тогда $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{y_n}$ и $x_0 \in M_{y_0}$. Положим $q_n = h(x_n)$ и заметим, что

$$\rho(x_n, x_{q_n}) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(x_{y_n}, x_{q_n}) \to 0. \tag{2.4.16}$$

при $n \to +\infty$, так как $q_n \to y_0$ и $x_{q_n} \to x_0$. Из (2.4.16) и равномерной асимптотической устойчивости по Ляпунову в целом множества M следует, что

$$\rho(x_n t_n, x_{q_n t_n}) = \rho(x_n t_n, x_{q_n} t_n) \to 0. \tag{2.4.17}$$

Неравенство (2.4.17) противоречит (2.4.15). Таким образом, M орбитально устойчиво и согласно теореме 1.5.15 динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна и $J_X \subseteq M$. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что $h(J_X) = J_Y$ и для любого $y \in J_Y$ имеет место включение $J_X \bigcap X_y \subseteq M \bigcap X_y$ и, следовательно, $J_X \bigcap X_y$ содержит ровно одну точку, каково бы ни было $y \in J_Y$. Теорема доказана.

Замечание 2.4.15. *Если существует $y_0 \in Y$ такое, что $Y = H^+(y_0)$, то теорема 2.4.14 очевидно обратима. Для этого в качестве M, фигурирующего в теореме 2.4.14, можно взять $H^+(x_0)$, где $x_0 \in X_{y_0}$.*

2.5. Признаки конвергентности

Отметим, что в теоремах 2.3.2 и 2.3.5 указаны условия, при которых сохраняется свойство компактной диссипативности при гомоморфизмах.

Ниже приводятся некоторые утверждения, которые дают условия диссипативности системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, если таковой является система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ и существует гомоморфизм h первой на вторую.

Пусть h гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$. Множество $M \subseteq X$ называют равномерно устойчивым в положительном направлении относительно гомоморфизма h, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$ такое, что при всех $x_1, x_2 \subseteq M$, для которых $h(x_1) = h(x_2)$ $\rho(x_1, x_2) < \delta$ влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \ge 0$.

Динамическую систему $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ называют равномерно устойчивой (в положительном направлении) относительно гомоморфизма h на компактах из X, если любой компакт $M \in C(X)$ является равномерно устойчивым в положительном направлении относительно гомоморфизма.

Лемма 2.5.1. *Пусть гомоморфизм h удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *существует непрерывное инвариантное сечение $\varphi : Y \to X$ гомоморфизма h;*
(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0$ *при всех* $x_1, x_2 \in X$ $(h(x_1) = h(x_2))$*;*
(3) $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из X относительно h.*

Тогда:

(1) *если $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ поточечно диссипативна, то $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ также поточечно диссипативна, причем Ω_X и Ω_Y гомеоморфны;*
(2) *если $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна, то $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ также компактно диссипативна, причем Ω_X и Ω_Y гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ поточечно диссипативна. Тогда Ω_Y - непустое компактное инвариантное множество и, следовательно, $M := \varphi(\Omega_Y) \subseteq \Omega_X$ также непусто, компактно и инвариантно. Для $x \in X$ и $y = h(x)$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(xt), \varphi(y)t) = 0$. Следовательно, Σ_x^+ относительно компактно. Кроме того $\omega_x \subseteq \omega_{\varphi(y)} \subseteq \varphi(\Omega_Y) = M$. Отсюда $\Omega_X \subseteq M$. Таким образом, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна и $\varphi(\Omega_Y) = \Omega_X$. Так как $\varphi : \Omega_Y \to \Omega_X$ разделяет точки и Ω_Y компактно, то Ω_Y и Ω_X гомеоморфны.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна. Тогда согласно доказанному выше $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна. Положим $M := \varphi(J_Y) = \varphi(D^+(\Omega_Y)) \subseteq D^(+\Omega_X)$. Покажем, что M орбитально устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют $\varepsilon_0, x_n \to x_0 \in$

M и $t_n \to +\infty$, такие что

$$\rho(x_n t_n, M) \geq \varepsilon_0. \tag{2.5.1}$$

Заметим, что $h(x_n) = y_n \to y_0 = h(x_0) \in h(M) = h\varphi(J_Y) = J_Y$ и в силу компактной диссипативности $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ последовательность $\{y_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $y := \lim\limits_{n\to+\infty} y_n t_n$. Ясно, что $y \in J_Y$ и $\varphi(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(h(x_n))t_n$. Так как $\varphi : J_Y \to \varphi(J_Y) = M$ разделяет точки и $h \circ \varphi = id_Y$, то $\varphi : J_Y \to M = \varphi(J_Y)$ есть гомеоморфизм, причем $\varphi \circ h(x) = x$ при всех $x \in M$ и, следовательно, $\varphi(h(x_n)) \to \varphi(h(x_0)) = x_0 \in M$. Из последнего соотношения следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, \varphi \circ h(x_n)) = 0. \tag{2.5.2}$$

Пусть $K = M \bigcup \overline{\{x_n\}} \bigcup \overline{\{\varphi \circ h(x_n)\}}, \varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon, K) > 0$ - числа из условия равномерной устойчивости в положительном направлении на компактах из X динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ относительно гомоморфизма h. Из (2.5.2) следует, что при достаточно больших n имеет место неравенство $\rho(x_n, \varphi \circ h(x_n)) < \delta$ и, следовательно, $\rho(x_n t, \varphi \circ h(x_n)t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. В частности,

$$\rho(x_n t_n, \varphi \circ h(x_n)t_n) < \varepsilon \tag{2.5.3}$$

при достаточно больших n. Из (2.5.3) в силу произвольности ε следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi \circ h(x_n)t_n = \varphi(y) \in M$. Последнее противоречит (2.5.1). Полученное противоречие показывает, что M орбитально устойчиво. Итак, $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна, $\Omega_X \subseteq M$, M непусто, компактно, инвариантно и орбитально устойчиво. Согласно теореме 1.5.15 $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна и $J_X \subseteq M = \varphi(J_Y) \subseteq D^+(\Omega_X)$. Согласно теореме 1.5.11 и следствию 1.5.12 $J_X = \varphi(J_Y) = D^+(\Omega_X)$. Таким образом, φ есть гомеоморфизм J_Y на J_X. Лемма доказана.

Следствие 2.5.2. *В условиях леммы 2.5.1, если* $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ *компактно диссипативна, то* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *конвергентна.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из леммы 2.5.1 и следствия 2.4.4.

Пусть $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ - групповая динамическая система, $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ - полугрупповая динамическая система и $h : X \to Y$ - гомоморфизм $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \pi), h \rangle$ и обозначим через $\Gamma_b(Y, X)$ множество всех непрерывных ограниченных сечений гомоморфизма h. Равенством

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{y \in Y} \rho(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) \tag{2.5.4}$$

определяется метрика на $\Gamma_b(Y, X)$.

Положим $X \bigotimes X := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X, h(x_1) = h(x_2)\}$ и пусть $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ - отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $a(\rho(x_1, x_2)) \leq V(x_1, x_2) \leq b(\rho(x_1, x_2))$ при всех $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$, где a, b некоторые функции из $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} := \{a \mid a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a$ непрерывно, строго возрастает и $a(0) = 0$ $\}$) и $Im(a) = Im(b)$;

(2) $V(x_1, x_2) = V(x_2, x_1)$ при всех $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$;

(3) $V(x_1, x_2) \leq V(x_1, x_3) + V(x_3, x_1)$ при всех $x_1, x_2, x_3 \in X$ таких, что $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3)$.

Из условий 1.–3. следует, что V на каждом слое $X_y = h^{-1}(y)$ задает метрику, топологически эквивалентную ρ.

Лемма 2.5.3. *Пусть $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям 1.–3.. Тогда равенством*

$$p(\varphi_1, \varphi_2) := \sup\{V(\varphi_1(y), \varphi_2(y)) | \ y \in Y\} \tag{2.5.5}$$

определяется на $\Gamma_b(Y, X)$ полная метрика, топологически эквивалентная (2.5.4).

Доказательство. Из условия 1. следует, что функция V обращается в нуль только по диагонали $X \bigotimes X$, т.е. $V(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$. Отсюда, с учетом равенства (2.5.5), следует, что $d(\varphi, \psi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi = \psi$.

Что касается симметричности d $(d(\varphi, \psi) = d(\psi, \varphi))$, то это следует из свойства 2. функции V. Наконец, из 3. следует, что d удовлетворяет неравенству треугольника.

Топологическая эквивалентность метрик (2.5.4) и (2.5.5) следует из условия 1.

Итак, для завершения доказательства леммы достаточно установить полноту пространства $(\Gamma_b(Y,X),d)$. Пусть $\{\varphi_n\}$ - фундаментальная в $(\Gamma_b(Y,X),d)$ последовательность, т.е. $d(\varphi_n,\varphi_m)\to 0$ при $n,m\to+\infty$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется $\mathcal{N}_1(\varepsilon)>0$ такое, что $V(\varphi_n(y),\varphi_m(y))<a(\varepsilon)$ при всех $y\in Y$ и $n,m>\mathcal{N}_1(\varepsilon)$. Тогда $a(\rho(\varphi_n(y),\varphi_m(y)))\le V(\varphi_n(y),\varphi_m(y))<a(\varepsilon)$ и, следовательно, $\rho(\varphi_n(y),\varphi_m(y))<\varepsilon$ при всех $n,m\in\mathcal{N}_1(\varepsilon)$ и $y\in Y$. Из последнего соотношения и полноты пространства (X,ρ) следует, что при каждом $y\in Y$ существует $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(y)$ в (X,ρ). Положим $\varphi(y):=\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(y)$. Последнее равенство имеет место равномерно по $y\in Y$ и, следовательно, $\varphi\in\Gamma_b(Y,X)$. Покажем, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в метрике d. Действительно, так как $\varphi_n(y)\to\varphi(y)$ равномерно по $y\in Y$ в метрике ρ, то для $\varepsilon>0$ найдется $\mathcal{N}_2(\varepsilon)>0$ такое, что имеет место неравенство $\rho(\varphi_n(y),\varphi_m(y))<b^{-1}(\varepsilon)$ при всех $n\ge\mathcal{N}_2(\varepsilon)$ и $y\in Y$. Из последнего неравенства следует, что $V(\varphi_n(y),\varphi(y))\le b(\rho(\varphi_n(y),\varphi(y)))<b(b^{-1}(\varepsilon))=\varepsilon$ при всех $n\ge\mathcal{N}_2(\varepsilon)$ и $y\in Y$, т.е. $d(\varphi_n,\varphi)\to 0$ при $n\to+\infty$. Лемма доказана.

Обозначим через $S^t:\Gamma_b(Y,X)\to\Gamma(Y,X)$ отображение, определенное равенством $(S^t\varphi)(y)=\pi^t\varphi(\sigma^{-1}y)$ при всех $t\in\mathbb{S}_+$, $\varphi\in\Gamma_b(Y,X)$ и $y\in Y$. Легко проверить, что $\{S^t\}_{t\ge o}$ образует коммутативную полугруппу.

Лемма 2.5.4. *Если существует функция $V:X\bigotimes X\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям 1.–3. и*

4. $V(x_1t,x_2t)\le\mathcal{N}e^{-\nu t}V(x_1,x_2)$ *($\forall(x_1,x_2)\in X\bigotimes X$, $t\ge 0$), где $\mathcal{N},\nu>0$,*

то полугруппа $\{S^t\}_{t\ge0}$ имеет единственную общую неподвижную точку $\varphi\in\Gamma_b(Y,X)$, которая является инвариантным сечением h.

Доказательство. Заметим, что

$$p(S^t\varphi_1,S^t\varphi_2)=\sup\{V(\pi^t\varphi_1(\sigma^{-t}y),\pi^t\varphi_2(\sigma^{-t}y))|\ y\in Y\}$$

$$\le\mathcal{N}e^{-\nu t}\sup\{V(\varphi_1(\sigma^{-t}y),\varphi_2(\sigma^{-t}y))\ |\ y\in Y\}\le\mathcal{N}e^{-\nu t}p(\varphi_1,\varphi_2)$$

и, следовательно, S^t при достаточно больших t являются сжатиями. Отсюда в силу коммутативности $\{S^t\}$ следует существование общей неподвижной точки φ полугруппы $\{S^t\}_{t\geq 0}$, которая является инвариантным сечением h. Лемма доказана.

Теорема 2.5.5. *Пусть $\langle (X,\mathbb{S}_+,\pi),(Y,\mathbb{S},\sigma),h\rangle$ - неавтономная динамическая система, для которой выполнены следующие условия:*

(1) *$(Y,\mathbb{S},\sigma)$ компактно диссипативна;*
(2) *$\Gamma_b(Y,X)\neq\emptyset$;*
(3) *существует $V : X\bigotimes X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям 1.–4. леммы 2.5.4.*

Тогда $(X,\mathbb{S}_+,\pi)$ компактно диссипативна и J_X и J_Y гомеоморфны.

Доказательство. В условиях теоремы согласно лемме 2.5.4 полугруппа $\{S^t\}_{t\geq 0}$ имеет единственную общую неподвижную точку φ, которая является инвариантным сечением гомоморфизма h.

Кроме того

$$a(\rho(x_1t,x_2t))\leq V(x_1t,x_2t)$$
$$\leq \mathcal{N}e^{-\nu t}V(x_1,x_2)\leq \mathcal{N}e^{-\nu t}b(\rho(x_1,x_2)).$$

Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} a(\rho(x_1t,x_2t))=0$ для любых $(x_1,x_2)\in X\bigotimes X$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(x_1t,x_2t)=0$. Система $(X,\mathbb{S}_+,\pi)$ равномерно устойчива относительно h. Действительно, пусть $\varepsilon>0$ и $\delta(\varepsilon)=b^{-1}(\mathcal{N}a(\varepsilon))$. Тогда $\rho(x_1,x_2)<\delta(\varepsilon)$ ($h(x_1)=h(x_2)$) влечет $\rho(x_1t,x_2t)<\varepsilon$ при всех $t\geq 0$. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 2.5.1.

Следствие 2.5.6. *В условиях теоремы 2.5.5 неавтономная динамическая система $\langle (X,\mathbb{S}_+,\pi),(Y,\mathbb{S},\sigma),h\rangle$ конвергентна.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 2.5.5 и следствия 2.5.2.

Будем говорить, что функция $V : X\bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ непрерывна, если $x^i_n \to x^i$ ($i=1,2$ и $h(x^1_n)=h(x^2_n)$) влечет $V(x^1_n,x^2_n)\to V(x^1,x^2)$.

Теорема 2.5.7. *Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативны. Для того чтобы динамическая система*

$\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ была конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям:

1. *V положительно определена, т.е. $V(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;*
2. *$V(x_1 t, x_2 t) \leq V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$ и $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$;*
3. *$V(x_1 t, x_2 t) = V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем что для любого $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subseteq X$ существует $\delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ($x_1, x_2 \in K$ и $h(x_1) = h(x_2)$) влечет $\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, компакт $K_0 \subseteq X$, последовательности $\delta_n \downarrow 0$, $\{x_n^i\} \subseteq K_0$ ($i = 1, 2$ и $h(x_n^1) = h(x_n^2)$) и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n^1, x_n^2) < \delta_n \text{ и } \rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{2.5.6}$$

В силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ последовательности $\{x_n^i t_n\}$ ($i = 1, 2$) можно считать сходящимися. Положим $\bar{x}^i := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^i t_n$ ($i = 1, 2$). Понятно, что $h(\bar{x}_1) = h(\bar{x}_2)$. Поскольку, $\{x_n^i\} \subseteq K$, то их также можно считать сходящимися. Согласно (2.5.6) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^1 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2 = \bar{x}$ и

$$\begin{aligned} 0 \leq V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \lim_{n\to+\infty} V(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} V(x_n^1, x_n^2) = V(\bar{x}, \bar{x}) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Последнее противоречит (2.5.6).

Покажем теперь, что для любых $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$ ($h(x_1) = h(x_2)$) имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(x_1 t, x_2 t) = 0.$$

Если допустить, что это не так, то найдутся $y_0 \in Y, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X_{y_0}, \varepsilon_0 > 0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(\bar{x}_1 t_n, \bar{x}_2 t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{2.5.7}$$

Пусть $(X \times X, \mathbb{T}_1, \pi \times \pi) = (X, \mathbb{T}_1, \pi) \times (X, \mathbb{T}_1, \pi)$ - прямое произведение $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. В силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X$ устойчива L^+ в $(X \times X, \mathbb{T}_1, \pi \times \pi)$, и из условия 2 теоремы вытекает существование конечного предела

$$V_0 = \lim_{t \to +\infty} V(\bar{x}_1 t, \bar{x}_2 t). \tag{2.5.8}$$

Пусть $(p, q) \in \omega_(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, тогда из (2.5.8) следует, что $V(p, q) = V_0$. В силу инвариантности $\omega_(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ имеем $V(pt, qt) = V(p, q)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, и согласно условию 3 теоремы $p = q$, т.е.

$$\omega_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \subseteq \Delta_X = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X\}. \tag{2.5.9}$$

Последовательности $\{\bar{x}_i t_n\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{p} = \lim\limits_{n \to +\infty} \bar{x}_1 t_n$ и $\bar{q} = \lim\limits_{n \to +\infty} \bar{x}_2 t_n$, тогда $(\bar{p}, \bar{q}) \in \omega_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$ и из (2.5.7) следует, что $\bar{p} \neq \bar{q}$. Последнее противоречит включению (2.5.9). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. Согласно теореме 2.4.3 неавтономная система (2.1.1) конвергентна.

Обратно. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ конвергентна. Определим функцию $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ равенством

$$V(x_1, x_2) = \sup\{\rho(x_1 t, x_2 t) \mid t \geq 0\}. \tag{2.5.10}$$

Эта функция удовлетворяет условиям 1. и 2. нашей теоремы очевидным образом.

Покажем, что V удовлетворяет условию 3. теоремы. Пусть $V(x_1 t, x_2 t) = V(x_1, x_2)$ при всех $t \geq 0$. Если допустить, что $x_1 \neq x_2$, то $\delta := V(x_1, x_2) > 0$. Согласно теореме 2.4.3 $\rho(x_1 t, x_2 t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому найдется $t_0 = t_0(\delta) > 0$ такое, что $\rho(x_1 t, x_2 t) < \frac{\delta}{2}$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно,

$$V(x_1 t_0, x_2 t_0) = \sup\{\rho(x_1 t, x_2 t) | t \geq t_0\} \leq \frac{\delta}{2} < V(x_1, x_2).$$

Последнее противоречит нашему допущению. Докажем, что для любого компакта $K \subseteq X$

$$\lim_{t \to +\infty} \sup\{\rho(x_1 t, x_2 t) | \ x_1, x_2 \in K, h(x_1) = h(x_2)\} = 0. \tag{2.5.11}$$

Действительно, если допустить, что это не так, то найдется $\varepsilon_0 > 0$, компакт $K \subseteq X$, $\delta_n \downarrow 0$ и последовательности $\{x_n^i\} \subseteq K$

$(i = 1, 2$ и $h(x_n^1) = h(x_n^2))$ $t_n \to +\infty$ такие, что выполнено условие (2.4.8). Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что последовательности $\{x_n^i\}$ и $\{x_n^i t_n\}$ $(i = 1, 2)$ сходятся. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^i = x^i$ $(i = 1, 2)$. Положим $\bar{x}^i := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^i t_n$ $(i = 1, 2)$. Заметим, что $h(\bar{x}_1) = h(\bar{x}_2) = y$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \omega(K) \subseteq J_X$ и, следовательно, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Последнее противоречит (2.4.8). Таким образом, (2.5.11) доказано. Из (2.5.10) и (2.5.11) следует, что

$$V(x_1, x_2) = \rho(x_1\tau, x_2\tau) \tag{2.5.12}$$

при некотором $\tau(x_1, x_2) \in [0, l(K)]$.

Пусть $(x_n^1, x_n^2) \to (x^1, x^2) \in X \bigotimes X$. Последовательность $\{V(x_n^1, x_n^2)\} = \{\rho(x_n^1\tau_n, x_n^2\tau_n)\}$ ограничена, где $\tau_n = \tau(x_n^1, x_n^2)$. Покажем, что она имеет единственную предельную точку.
Пусть $\tilde{V}$ - одна из предельных точек последовательности $\{V(x_n^1, x_n^2)\}$. Существует подпоследовательность $\{V(x_{k_n}^1, x_{k_n}^2)\}$ такая, что $V(x_{k_n}^1, x_{k_n}^2) \to \tilde{V}$ при $n \to +\infty$. Так как $\{\tau_{k_n}\}$ ограничена, то ее можно считать сходящейся. Тогда $\tilde{V} = \rho(x^1\tau', x^2\tau')$, где $\tau' = \lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{k_n}$. Покажем, что $\rho(x^1\tau, x^2\tau) = \rho(x_1\tau', x^2\tau')$ $(\tau = \tau(x^1, x^2) \geq 0$ выбрано из условия (2.5.12)). Если допустить, что $\rho(x^1\tau, x^2\tau) \neq \rho(x_1\tau', x^2\tau')$, то $\rho(x^1\tau, x^2\tau) > \rho(x_1\tau', x^2\tau')$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\rho(x^1\tau, x^2\tau) + 2\varepsilon < \rho(x^1\tau, x^2\tau)$. Тогда для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ имеем $|\rho(x_{k_n}^1\tau, x_{k_n}^2\tau) - \rho(x^1\tau, x^2\tau)| < \varepsilon$ и $|\rho(x_{k_n}^1\tau_{k_n}, x_{k_n}^2\tau_{k_n}) - \rho(x^1\tau', x^2\tau')| < \varepsilon$, и, следовательно,

$$\rho(x_{k_n}^1\tau, x_{k_n}^2\tau) > \rho(x_{k_n}^1\tau_{k_n}, x_{k_n}^2\tau_{k_n}) = V(x_{k_n}^1, x_{k_n}^2). \tag{2.5.13}$$

Неравенство (2.5.13) противоречит выбору числа τ_{k_n}. Таким образом, $V(x^1, x^2) = \rho(x^1\tau', x^2\tau')$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} V(x_n^1, x_n^2) = V(x^1, x^2)$, т.е. V непрерывна. Теорема доказана.

Теорема 2.5.7 является обобщением на абстрактные неавтономные динамические системы теорем 7.2 и 7.3 из [**79**].

Теорема 2.5.8. *Пусть динамические системы* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *и* $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ *компактно диссипативны. Для того чтобы неавтономная динамическая система* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *была* *конвергентной, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция* $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) V *положительно определена;*
(2) $V(x_1 t, x_2 t) < V(x_1, x_2)$ *при всех* $t > 0$ *и* $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X \setminus \Delta_X$, *где* $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы вытекает из предыдущей теоремы. Достаточно лишь заметить, что из второго условия теоремы 2.5.8 вытекают второе и третье условия теоремы 2.5.7.

Необходимость. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ конвергентна и функция $\mathcal{V} : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ определена условием (2.5.10). Тогда она непрерывна и удовлетворяет условиям 1.–3. теоремы 2.5.7. Положим

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \mathcal{V}(x_1 t, x_2 t) e^{-t} dt. \tag{2.5.14}$$

Из определения функции V следует ее непрерывность и положительная определенность. Функция V удовлетворяет условию 2. теоремы 2.5.8. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \bigotimes X$ и $t_0 > 0$ такие, что $V(\bar{x}_1 t_0, \bar{x}_2 t_0) = V(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. Тогда из (2.5.14) и последнего равенство следует, что

$$\mathcal{V}(\bar{x}_1(t_0 + t), \bar{x}_2(t_0 + t)) = \mathcal{V}(\bar{x}_1 t, \bar{x}_2 t) \tag{2.5.15}$$

при всех $t \geq 0$. В силу (2.5.15) функция $\varphi(t) = \mathcal{V}(\bar{x}_1 t, \bar{x}_2 t)$ является t_0-периодической. Очевидно, φ непрерывна и является невозрастающей. Поэтому φ постоянна, и, следовательно, $\mathcal{V}(\bar{x}_1 t, \bar{x}_2 t) = \mathcal{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ при всех $t \geq 0$. Так как функция $\mathcal{V}$ удовлетворяет условиям 1–3 теоремы 2.5.7, то равенство $\mathcal{V}(\bar{x}_1 t, \bar{x}_2 t) = \mathcal{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ при всех $t \geq 0$ влечет $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Это противоречит выбору $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.5.9. *Пусть* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *и* $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ *компактно диссипативны и существует непрерывная функция* $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) V *положительно определена;*

(2) *$V(x_1t, x_2t) \le \omega(V(x_1, x_2), t)$ при всех $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$ и $t \ge 0$, где $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ неубывающая по первой переменной функция и $\omega(x, t) \to 0$ при $t \to +\infty$ при каждом $x \in \mathbb{R}_+$.*

Тогда $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна.

Доказательство. Согласно следствию 2.4.4 для конвергентности $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ достаточно показать, что для любого компакта $K \in C(X)$ имеет место равенство 2.4.1. Прежде всего покажем, что для любого $K \in C(X)$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{(x_1,x_2)\in K \bigotimes K} V(x_1t, x_2t) = 0. \qquad (2.5.16)$$

Действительно, так как K компактно, то существует $\alpha > 0$ такое, что $V(x_1, x_2) \le \alpha$ при всех $(x_1, x_2) \in K \bigotimes K$ и $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \alpha$ при некотором $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in K \bigotimes K$, и, следовательно,

$$V(x_1t, x_2t) \le \omega(V(x_1, x_2), t) \le \omega(\alpha, t). \qquad (2.5.17)$$

Так как $\omega(\alpha, t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то из (2.5.17) следует (2.5.16). Покажем теперь, что из (2.5.16) следует равенство (2.4.1). Если допустить, что это не так, то найдутся $K \in C(X), \varepsilon_0 > 0, \{x_n^i\} \subseteq K$ $(i = 1, 2)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \ge \varepsilon_0. \qquad (2.5.18)$$

В силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ последовательности $\{x_n^i t_n\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Положим $\bar{x}_i = \lim_{n\to+\infty} x_n^i t_n$, тогда из неравенства (2.5.18) следует, что $\bar{x}_1 \ne \bar{x}_2$. С другой стороны, согласно неравенству (2.5.17)

$$0 \le V(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \le V(\alpha, t_n) \to 0$$

при $n \to +\infty$ и, следовательно,

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lim_{n\to+\infty} V(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 2.5.10. *a. Условие 2. теоремы 2.5.9 выполняется, если функция $V : X \bigotimes X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $V(x_1t, x_2t) \le \mathcal{N}e^{-\nu t}V(x_1, x_2)$ *при всех* $t \ge 0$ *и* $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$ $(\omega(x,t) = \mathcal{N}xe^{-\nu t})$*;*

(2) $V(x_1t, x_2t) \le \frac{2V(x_1,x_2)}{2+V(x_1,x_2)t}$ *при всех* $t \ge 0$ *и* $(x_1, x_2) \in X \bigotimes X$ $(\omega(x,t) = \frac{2x}{2+xt})$*;*

b. Все результаты, приведенные в этом параграфе, справедливы и в том случае, когда пространства X и Y не являются метрическими, а являются псевдометрическими.

В заключение отметим, что конвергентные динамические системы в определенном смысле являются простейшими диссипативными динамическими системами. Если $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ - неавтономная система с конвергенцией и J_X (J_Y) - центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ $((Y, \mathbb{T}_2, \sigma))$, то J_X и J_Y гомеоморфны. Хотя центр Левинсона конвергентной неавтономной системы поддается достаточно полному описанию, тем не менее, он может быть достаточно сложным. Приведем пример, подтверждающий сказанное.

Пример 2.5.11. Пусть $Y := \mathbb{R}$ и $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$ - каскад, порожденный положительными степенями нечетной функции g, определенной на $\mathbb{R}_+$ по следующему правилу:

$$g(y) = \begin{cases} -2y & , \quad 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 2(y-1) & , \quad \frac{1}{2} < y \le 1 \\ \frac{1}{2}(y-1) & , \quad 1 < y < +\infty. \end{cases} \tag{2.5.19}$$

Легко убедиться, что $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$ диссипативна и $J_Y \subseteq [-1, 1]$. Положим $X := \mathbb{R}^2$ и через $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$ обозначим каскад, порожденный положительными степенями отображения $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенного равенством

$$P\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,y) \\ g(y) \end{pmatrix}, \tag{2.5.20}$$

где $f(u, y) = \frac{1}{10}u + \frac{1}{2}y$. Наконец, пусть $h = pr_2 : X \to Y$. Из (2.5.20) следует, что h есть гомоморфизм $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{Z}_+, \sigma)$, и, следовательно, $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h\rangle$ есть неавтономная динамическая система. Заметим, что

$$|(u_1, y) - (u_2, y)| = |u_1 - u_2| \tag{2.5.21}$$

$$= 10|P(u_1, y) - P(u_2, y)|.$$

Из (2.5.21) следует, что

$$|P^n(u_1, y) - P^n(u_2, y)| \tag{2.5.22}$$

$$\leq \mathcal{N} e^{-\nu n} |\langle u_1, y\rangle - \langle u_2, y\rangle|$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\mathcal{N} = 1$ и $\nu = \ln 10$. Покажем, что неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h\rangle$ конвергентна. Непосредственно проверяется, что динамическая система $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$ диссипативна, поэтому для конвергентности $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h\rangle$ достаточно показать, что $J_X \bigcap X_y$ содержит ровно одну точку, каково бы ни было $y \in J_Y$. Если допустить, что это не так, то существуют $y_0 \in J_Y$ и $x_1, x_2 \in J_X \bigcap X_{y_0}$ и $x_1 \neq x_2$. Пусть φ_i движение динамической системы $(X, \mathbb{Z}_+, \pi)$, определенное на $\mathbb{Z}$ и проходящее через точку x_i $(i = 1, 2)$. Из (2.5.22) следует, что

$$|\varphi_1(-n) - \varphi_2(-n)| \geq \mathcal{N}^{-1} e^{\nu n} |u_1 - u_2| \tag{2.5.23}$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, где $(u_i, y_0) = x_i$ $(i = 1, 2)$. С другой стороны,

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi_1(n) - \varphi_2(n)| < +\infty. \tag{2.5.24}$$

Неравенства (2.5.23) и (2.5.24) не могут выполняться одновременно. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. Таким образом, $\langle (X, \mathbb{Z}_+, \pi), (Y, \mathbb{Z}_+, \sigma), h\rangle$ конвергентна и, следовательно, J_X и J_Y гомеоморфны.

Отметим, что построенный выше пример является незначительной модификацией одного примера из [**146**, стр. 39–42]. При этом они имеют одинаковые аттракторы, и соответствующие системы на аттракторах действуют одинаково. Следовательно, центры Левинсона J_X и J_Y являются перемешивающими (странными) аттракторами.

Таким образом, центр Левинсона J_X конвергентной динамической системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ полностью определяется структурой J_Y, а последний может быть устроен достаточно сложно.

2.6. Глобальные аттракторы неавтономных систем

Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что Y компактно, (X,h,Y) - локально тривиальное векторное расслоение **[97]** и $|\cdot|$ - норма на (X,h,Y), согласованная с метрикой ρ на X (т.е. $\rho(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$ для любых $x_1,x_2\in X$ таких, что $h(x_1)=h(x_2)$).

Теорема 2.6.1. *Пусть $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ - неавтономная динамическая система и для любого ограниченного множества $A\subseteq X$ существует $l=l(A)>0$ такое, что $\pi^l A$ относительно компактно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует положительное число r такое, что для любого $x\in X$ найдется $\tau=\tau(x)>0$, для которого $|x\tau|<r$;*

(2) *динамическая система $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ компактно диссипативна и*

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{|x|\le R}\rho(xt,J)=0 \tag{2.6.1}$$

при любом $R>0$, где J - центр Левинсона $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$, т.е. неавтономная динамическая система $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ допускает компактный глобальный аттрактор J.

Доказательство. Очевидно, из 2. всегда следует 1.. Покажем, что из 1. следует 2.. Положим $A=\{x\mid x\in X,|x|\le r\}$, где $r>0$ число, фигурирующее в условии 1. Так как множество Y компактно и векторное расслоение (X,h,Y) локально тривиально, то его нулевое сечение $\Theta=\{\theta_y\mid y\in Y,$ где θ_y − нулевой элемент $X_y=h^{-1}(y)\}$ компактно и, следовательно, множество A ограничено, так как $A\subseteq B(\theta,r)=\{x\mid x\in X,\rho(x,\theta)\le r\}$. Согласно условию теоремы для ограниченного множества A существует положительное число l такое, что $\pi^l A$ относительно компактно. Пусть $x\in X$ и $\tau=\tau(x)>0$ такое, что $x\tau\in A$, тогда $x(\tau+l)\in K=\overline{\pi^l A}$. Таким образом, непустой компакт K является слабым k-аттрактором системы $(X,\mathbb{T}_1,\pi)$ и, согласно теореме 1.4.3, динамическая система

$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна. Пусть J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $R > 0$, тогда множество $B = \{x \mid x \in X,\ |x| \le R\}$, как было отмечено выше, ограничено и для него найдется число $l = l(B) > 0$ такое, что $\pi^l B$ относительно компактно и в силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ ее центр Левинсона J согласно теореме 1.3.4 притягивает множество $\pi^l B$ и, следовательно, имеет место и равенство (2.6.1). Теорема доказана.

Следствие 2.6.2. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система и векторное расслоение (X, h, Y) является конечномерным, тогда условия 1. и 2. теоремы 2.6.1 эквивалентны.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 2.6.1. Для этого достаточно заметить, что для любого $r > 0$ множество $\{x \mid x \in X,\ |x| \le r\}$ компактно, если векторное расслоение (X, h, Y) конечномерно и Y компактно.

Теорема 2.6.3. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система и для любого ограниченного множества $A \subseteq X$ существует непустой компакт $K_A \subseteq X$ такой, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t A, K_A) = 0. \tag{2.6.2}$$

Тогда условия 1. и 2. теоремы 2.6.1 эквивалентны.

Доказательство. В силу компактности Y и локальной тривиальности векторного расслоения (X, h, Y) при любом $R > 0$ множество $\{x \mid x \in X, |x| \le R\}$ ограничено. Согласно условию 1. теоремы 2.6.1 для любого $x \in X$ существует $\tau = \tau(x) > 0$ такое, что $x\tau \in B_0 = \{x \mid x \in X, |x| \le r\}$. Согласно теореме 1.7.8 динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна. Пусть J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $R > 0$. Так как множество $A = \{x \mid x \in X, |x| \le R\}$ ограничено, то согласно условию теоремы существует непустой компакт K_A такой, что имеет место равенство (2.6.2). По лемме 1.2.2 множество $\omega(A) \ne \emptyset$, компактно, инвариантно и имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t A, \omega(A)) = 0. \tag{2.6.3}$$

Так как J - максимальное компактное инвариантное множество в $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, то $\omega(A) \subseteq J$ и, следовательно,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t A, J) = 0. \tag{2.6.4}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.6.4. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *- неавтономная динамическая система и выполнено одно из следующих условий:*

(1) *для любого ограниченного множества* $A \subseteq X$ *существует положительное число* l *такое, что* $\pi^l A$ *относительно компактно;*

(2) *для любого ограниченного множества* $A \subseteq X$ *существует непустой компакт* K_A *такой, что имеет место равенство (2.6.2).*

Тогда условия 1. и 2. теоремы 2.6.1 эквивалентны.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теорем 2.6.1 и 2.6.3.

Теорема 2.6.5. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *- неавтономная динамическая система и для любого ограниченного положительно инвариантного множества* $A \subseteq X$ *существует непустой компакт* $K_A \subseteq X$ *такой, что выполнено равенство (2.6.2), т.е.* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *асимптотически компактна, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует положительное число* R_0 *и для любого* $R > 0$ *найдется* $l(R) > 0$ *такое, что*

$$|\pi^t x| \leq R_0 \tag{2.6.5}$$

при всех $t \geq l(R)$ *и* $|x| \leq R$*;*

(2) *динамическая система* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *компак- тно диссипативна и для центра Левинсона* J *динамической системы* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *имеет место равенство (2.6.1) при всех* $R > 0$.

Доказательство. Очевидно, из условия 2. следует 1., поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из 1. следует 2.. Пусть $A_0 \in B(X)$, тогда существует $R > 0$ такое, что $A_0 \subseteq B(R) = \{x \mid x \in X,\ |x| \le R\}$. По условию 1. для данного R найдется $l = l(R) > 0$ такое, что имеет место неравенство (2.6.5) и, в частности, множество $A = \bigcup\{\pi^t A_0 \mid t \ge l(R)\}$ ограничено и положительно инвариантно. В силу асимптотической компактности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ для множества A найдется непустой компакт $K_A \subseteq X$, для которого имеет место равенство (2.6.2). Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.6.3. Теорема доказана.

Теорема 2.6.6. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *- неавтономная динамическая система и отображения* $\pi^t : X \to X$ $(t \in \mathbb{T}_1)$ *представимы в виде суммы* $\pi^t = \varphi(t, \cdot) + \psi(t, \cdot)$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_1$ *и* $x \in X$ *и выполнены следующие условия:*

(1) $|\varphi(t,x)| \le m_1(t) m_2(|x|)$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_1$ *и* $x \in X$, *где* $m_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(i = 1, 2)$ *- непрерывные функции,* $m_1(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *а* m_2 *- неубывающая функция;*
(2) *отображения* $\psi(t, \cdot) : X \to X$ $(t > 0)$ *условно вполне непрерывны, т.е. множество* $\psi(t, \Sigma_A^+)$ *относительно компактно, если* $\Sigma^+(A) \in B(X)$ *и* $t > 0$.

Тогда динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *асимптотически компактна.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq X$ - ограниченное множество, такое что $\Sigma^+(A) = \bigcup\{\pi^t(A) \mid t \ge 0\}$ также ограничено, $r > 0$ и $A \subseteq B(r) = \{x \mid x \in X,\ |x| \le r\}$. Покажем, что, каковы бы ни были $\{x_k\} \subseteq A$ и $t_k \to +\infty$, последовательность $\{x_k t_k\}$ относительно компактна. Убедимся, что множество $M = \{x_k t_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно покрыть компактной ε-сетью, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $l > 0$ таковы, что $m_1(l) \le \varepsilon[2m_2(r)]^{-1}$, и представим M в виде объединения $M_1 \bigcup M_2$, где $M_1 = \{x_k t_k\}_{k=1}^{k_1}$, $M_2 = \{x_k t_k\}_{k=k_1+1}^{\infty}$ и $k_1 = \max\{k \mid t_k < l\}$. Множество M_2 есть подмножество множества $\pi^l(\Sigma^+(A))$, элементы которого можно представить в виде $\varphi(l,x) + \psi(l,x)$ $(x \in \Sigma^+(A))$. Так как множество $\psi\ (l, \Sigma^+(A))$ относительно компактно, то его можно покрыть конечной $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью, а так как для любого $y \in \varphi(l, \Sigma^+(A))$ существует $x \in \Sigma^+(A)$ такое, что $y = \varphi(l,x)$, $|y| = |\varphi(l,x)| \le m_1(l) m_2(|x|) \le m_1(l) m_2(r) \le \frac{\varepsilon}{2m_2(r)} m_2(r) \le \frac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно, нулевое сечение Θ является $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью множества $\varphi(l, \Sigma^+(A))$. Таким образом, M_2, а значит, и M покрывается компактной ε-сетью и в силу полноты пространства X множество $M = \{x_k t_k\}_{k=1}^{\infty}$ относительно компактно. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 1.2.2. Теорема доказана.

В конце этого параграфа изучаются диссипативные динамические системы в конечномерном пространстве. Приводится ряд условий, эквивалентных диссипативности.

Итак, пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi),\ (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ - неавтономная динамическая система, Y компактно, (X, h, Y) конечномерное векторное расслоение **[97]** и $|\cdot|$ - некоторая риманова метрика на (X, h, Y).

Лемма 2.6.7. *При сделанных выше предположениях все типы диссипативности неавтономной динамической системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi),\ (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ эквивалентны.*

Доказательство. В силу компактности Y, конечномерности и локальной тривиальности **[97]** расслоения (X, h, Y) пространство X локально компактно и обладает свойством Гейне–Бореля. Для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на теорему 1.4.3.

Имеет место следующая

Теорема 2.6.8. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ - неавтономная динамическая система, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует положительное число R такое, что для любого $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\limsup_{t\to+\infty} |xt| < R; \tag{2.6.6}$$

(2) *существует положительное число r такое, что для любого $x \in X$ найдется $\tau \geq 0$ такое, что $|x\tau| < r$;*

(3) *существует непустой компакт $K_1 \subset X$ такой, что $\omega_x \bigcap K_1 \neq \emptyset$ при всех $x \in X$;*

(4) *существует непустой компакт $K_2 \subset X$ такой, что $\emptyset \neq \omega_x \subset K_2$ при всех $x \in X$;*

(5) *существует положительное число* R_0 *такое, что для любого* $R_1 > 0$ *найдется* $l(R_1) > 0$ *такое, что*

$$|xt| < R_0 \tag{2.6.7}$$

при всех $t \geq l(R_1)$ *и* $|x| \leq R_1$.

Доказательство. Очевидно имеют место импликации 5. $\Rightarrow$ 1. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2.. Согласно теореме 2.6.1 из 2. следует 5. Теорема полностью доказана.

2.7. Глобальные аттракторы коциклов

Напомним, что тройка $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$, где $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ – динамическая система на Y, W – полное метрическое пространство и φ – непрерывное отображение $\mathbb{T}_1 \times W \times Y$ в W, удовлетворяющее следующим условиям:

a. $\varphi(0, u, y) = u$ $(u \in W, y \in Y)$;
b. $\varphi(t + \tau, u, y) = \varphi(\tau, \varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$ $(t, \tau \in \mathbb{T}_1, u \in W, y \in Y)$,

называется **[156]**, **[250]** – **[251]** коциклом над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W.

Положим $X := W \times Y$ и определим отображение $\pi : X \times \mathbb{T}_1 \to X$ правилом: $\pi((u, y), t) := (\varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$ (то есть $\pi = (\varphi, \sigma)$. Тогда легко проверить, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ – динамическая система на X, называемая косым произведением **[1]**, **[252]**, а $h = pr_2 : X \to Y$ – гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ и, следовательно, $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ есть неавтономная динамическая система.

Таким образом, если задан коцикл $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над динамической системой $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W, то по нему естественным образом строится неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \ \sigma), h\rangle$ $(X := W \times Y)$, которую назовем неавтономной динамической системой, ассоциированной коциклом $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$.

Семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ $(I_\omega \subset W)$ непустых компактных подмножеств W называется (см., например, **[156]** и **[200]**) компактным оттягивающим назад аттрактором (равномерным аттрактором) коцикла φ, если выполнены следующие условия:

(1) множество $I = \bigcup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ относительно компактно;
(2) семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ, т.е. $\varphi(t, I_\omega, \omega) = I_{\sigma(t,\omega)}$ для любых $t \in \mathbb{T}_+$ и $\omega \in \Omega$;
(3) для любых $\omega \in \Omega$ (равномерно по $\omega \in \Omega$) и $K \in C(W)$

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t, K, \omega_{-t}), I_\omega) = 0, \tag{2.7.1}$$

где $\beta(A, B) := \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}$ – полуметрика Хаусдорфа.

Семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}(I_\omega \subset W)$ непустых компактных подмножеств называется компактным глобальным аттрактором коцикла φ, если выполнены следующие условия:

(1) семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ компактно и инвариантно;
(2) для любого $K \in C(W)$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(\varphi(t, K, \omega), I) = 0, \tag{2.7.2}$$

где $I = \bigcup\{I_\omega | \omega \in \Omega\}$.

Если $M \subseteq W$, то положим

$$\omega_y(M) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \varphi(\tau, M, \sigma^{-\tau} y)} \tag{2.7.3}$$

для каждого $y \in Y$.

Лемма 2.7.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *точка $p \in \omega_y(M)$ тогда и только тогда, когда существуют $t_n \to +\infty$ и $\{x_n\} \subseteq M$ такие, что $p = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n, x_n, \sigma^{-t_n} y)$;*
(2) *$U(t, y)(\omega_y(M)) \subseteq \omega_{yt}(M)$ при всех $y \in Y$ и $t \in T_+$, где $U(t, y) = \varphi(t, \cdot, y)$;*
(3) *какова бы ни была точка $w \in \omega_y(M)$ движение $\varphi(t, w, y)$ определено на $\mathbb{T}$;*
(4) *если существует непустой компакт $K \subset W$ такой, что*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t, M, \sigma^{-t} y), K) = 0, \tag{2.7.4}$$

то $\omega_y(M) \neq \emptyset$, *компактно,*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t, M, \sigma^{-t}y), \omega_y(M)) = 0 \qquad (2.7.5)$$

и

$$U(t, y)(\omega_y(M)) = \omega_{yt}(M) \qquad (2.7.6)$$

при всех $y \in Y$ *и* $t \in T_+$.

Доказательство. Первое утверждение леммы непосредственно вытекает из равенства (2.7.3).

Пусть $w \in \Omega_y(M)$, тогда существуют $t_n \to +\infty$ и $\{x_n\} \subseteq M$ такие, что $w = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(t_n, x_n, \sigma^{-t_n}y)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(t, w, y) &= \lim_{n\to+\infty} \varphi(t, \varphi(t_n, x_n, \sigma^{-t_n}y), y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \varphi(t + t_n, x_n, \sigma^{-t_n}y). \end{aligned} \qquad (2.7.7)$$

Таким образом, $\varphi(t, w, y) \in \omega_{yt}(M)$, т.е. $U(t, y)(\omega_y(M)) \subseteq \omega_y(M)$ при всех $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_+$.

Из равенства (2.7.7) следует, что движение $\varphi(t, w, y)$ определено на $\mathbb{T}$, так как $\varphi(t+t_n, x_n, \sigma^{-t_n}y)$ определено на $[-t_n, +\infty)$ и $t_n \to +\infty$.

Четвертое утверждение леммы доказывается точно так же, как и теорема 2.2.5 и лемма 1.1.3 из [**228**].

Коцикл $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W назовем компактно диссипативным, если существует непустой компакт $K \subseteq W$ такой, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup\{\beta(U(t, y)(M), K) \mid y \in Y\} = 0 \qquad (2.7.8)$$

для любого $M \in C(W)$.

Лемма 2.7.2. *Пусть* Y *компактно и* $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ *- коцикл над* $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ *со слоем* W. *Для того чтобы* $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ *был компактно диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы полугрупповая система* $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$ *(косое произведение) была компактно диссипативной.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Напомним, что пространство X обладает свойством (S), если для любого компакта $K \subseteq X$ существует связное множество $M \subseteq X$ такое, что $K \subseteq M$.

Целой траекторией полугрупповой динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ (коцикла $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W), проходящей через точку $x \in X$ $((u, y) \in W \times Y)$, называют непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{S} \to X$ $(\nu : \mathbb{S} \to W)$, удовлетворяющее условиям $\gamma(0) = x$ $(\nu(0) = u)$ и $\pi^t\gamma(\tau) = \gamma(t+\tau)$ $(\varphi(t+\tau, u, y) = \varphi(t, \gamma(\tau), yt))$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$ и $\tau \in \mathbb{S}$.

Теорема 2.7.3. *Пусть Y компактно, $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ компактно диссипативен и K - непустой компакт, фигурирующий в равенстве (2.7.8), тогда:*

(1) *$I_y := \omega_y(K) \neq \emptyset$ компактно, $I_y \subseteq K$ и*
$$\lim_{t\to+\infty} \beta(U(t, \sigma^{-t}y)K, I_y) = 0 \tag{2.7.9}$$
при каждом $y \in Y$;

(2) *$U(t, y)(I_y) = I_{yt}$ при всех $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_+$;*

(3)
$$\lim_{t\to+\infty} \beta(U(t, \sigma^{-t}y)(M), I_y) = 0 \tag{2.7.10}$$
при всех $M \in C(W)$ и $y \in Y$;

(4)
$$\lim_{t\to+\infty} \sup\{\beta(U(t, \sigma^{-t}y)(M), I) \mid y \in Y\} = 0, \tag{2.7.11}$$
каково бы ни было $M \in C(W)$, где $I := \cup\{I_y \mid y \in Y\}$;

(5) *$I_y = pr_1 J_y$ при всех $y \in Y$, где J - центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, и, следовательно, $I = pr_1 J$;*

(6) *множество I компактно;*

(7) *множество I связно, если выполнено одно из следующих условий:*
   (a) *$\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ и пространства W и Y связны;*
   (b) *$\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}_+$ и пространство $W \times Y$ обладает свойством (S) либо связно и локально связно.*

Доказательство. Первые два утверждения теоремы вытекают из леммы 2.7.1.

Если допустить, что равенство (2.7.10) не имеет места, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in Y$, $M_0 \in C(W)$, $\{x_n\} \subseteq M_0$ и $t_n \to +\infty$

такие, что
$$\rho(U(t_n, \sigma^{-t_n} y_0)(x_n), I_{y_0}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.7.12}$$
Согласно равенству (2.7.9) для $\varepsilon_0 > 0$ и $y_0 \in Y$ найдется $t_0 > 0$ такое, что
$$\beta(U(t, \sigma^{-t} y_0)(K), I_{y_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.7.13}$$
при всех $t \geq t_0$. Заметим, что
$$U(t_n, \sigma^{-t_n} y_0)(x_n) = U(t_0, \sigma^{-t_0} y_0)(U(t_n - t_0, \sigma^{-t_n} y_0)(x_n)). \tag{2.7.14}$$
В силу компактной диссипативности $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ последовательность $\{U(t_n - t_0, \sigma^{-t_n} y_0)(x_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(t_n - t_0, x_n, \sigma^{-t_n} y_0)$, тогда согласно лемме 2.7.1 $\overline{x} \in \omega_{\sigma^{-t_0} y_0}(M_0)$ и $U(t_0, \sigma^{-t_0} y_0)(\overline{x}) \in \omega_{y_0}(M_0)$. Из равенства (2.7.8) следует, что $\overline{x} \in K$. Переходя к пределу в (2.7.12), когда $n \to +\infty$, мы получим
$$U(t_0, \sigma^{-t_0} y_0)(\overline{x}) \notin B(I_{y_0}, \varepsilon_0). \tag{2.7.15}$$
С другой стороны, так как $\overline{x} \in K$, то из (2.7.13) имеем
$$U(t_0, \sigma_{-t_0} y_0)\overline{x} \in B(I_{y_0}, \frac{\varepsilon}{2}), \tag{2.7.16}$$
что противоречит (2.7.15). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Докажем теперь равенство (2.7.11). Если допустить, что оно не имеет места, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $M_0 \in C(W)$, $y_n \in Y, \{x_n\} \subseteq M_0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что
$$\rho(U(t_n, \sigma^{-t_n} y_n)(x_n), I) \geq \varepsilon_0. \tag{2.7.17}$$
В силу компактности Y последовательности $\{y_n\}$ и $\{y_n t_n\}$ мож- но считать сходящимися. Положим $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n t_n = \overline{y}$. Согласно (2.7.10) для числа $\varepsilon_0 > 0$ и $y_0 \in Y$ найдется $t_0 = t_0(\varepsilon_0, y_0)$ такое, что
$$\beta(U(t_0, \sigma_{-t}\overline{y})(M_0), I_{y_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.7.18}$$
при всех $t \geq t_0(\varepsilon_0, y_0)$. Заметим, что
$$U(t_n, \sigma^{-t_n} y_n)(x_n) = U(t_0, \sigma^{-t_0} y_n)(U(t_n - t_0, \sigma^{-t_n} y_n))(x_n). \tag{2.7.19}$$

В силу компактной диссипативности $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ последовательность $\{U(t_n - t_0, \sigma^{-t_n} y_n)(x_n)\}$ можно считать сходящейся. Положим $\tilde{x} = \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n - t_0, x_n, \sigma^{-t_n} y_n)$ и заметим, что согласно (2.7.18) $\tilde{x} \in K$. Из равенства (2.7.19) следует, что $U(t_n, \sigma^{-t_n} y_n)(x_n) \to U(t_0, \sigma^{-t_0} y_0)(\tilde{x})$ и, следовательно, из (2.7.17) имеем

$$U(t_0, \sigma^{-t_0} y_0)(\tilde{x}) \notin B(I, \varepsilon_0). \tag{2.7.20}$$

С другой стороны из (2.7.18) и включения $\tilde{x} \in K$ следует, что

$$U(t_0, \sigma^{-t_0} y_0)(\tilde{x}) \in B(I_{\bar{y}}, \frac{\varepsilon_0)}{2}. \tag{2.7.21}$$

Последнее включение противоречит (2.7.19), что и завершает доказательство четвертого утверждения теоремы.

Докажем пятое утверждение теоремы. Для этого заметим, что $w \in I_y$, если $\varphi(t, w, y)$ определена на $\mathbb{T}$ и $\varphi(\mathbb{T}, w, y)$ относительно компактно. Действительно, так как $w = \varphi(t, \varphi(-t, w, y), \sigma^{-t} y)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, то из равенства (2.7.10) следует требуемое включение. Таким образом, мы получаем следующее описание множества $I_y = \{w \in W|$ через точку (x, y) проходит хотя бы одна целая относительно компактная траектория $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle\}$. Теперь остается заметить, что центр Левинсона J компактен и состоит из целых траекторий $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$ и, следовательно, $pr_1 J_y \subseteq I_y$ при всех $y \in Y$.

Компактность множества I следует из равенства $I = pr_1 J$, компактности J и непрерывности $pr_1 : X \to W$.

Последнее утверждение вытекает из того, что в условиях теоремы центр Левинсона J динамической системы $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$, согласно следствию 1.9.7 и теореме 1.8.15 из [**228**], является связным и, следовательно, I, как непрерывный образ связного множества, также является связным. Теорема полностью доказана.

Замечание 2.7.4. *Теорема 2.7.3 усиливает и уточняет основные результаты* [**183**],[**184**],[**228**].

Теорема 2.7.5. *В условиях теоремы 2.7.3 имеют место следующие утверждения:*

(1) $w \in I_y$ $(y \in Y)$ *тогда и только тогда, когда существует целая траектория* $\nu : \mathbb{S} \to W$ *коцикла* φ, *удовлетворяющая следующим условиям:* $\nu(0) = w$ *и* $\nu(\mathbb{S})$ *относительно компактно;*

(2) I_y $(y \in Y)$ *связно, если пространство* W *обладает свойством* (S).

Доказательство. Для доказательства первого утверждения мы заметим, что непрерывная функция $\nu : \mathbb{S} \to W$ является целой траекторией коцикла $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{S}, \sigma)\rangle$ тогда и только тогда, когда $\gamma = (\nu, Id_Y)$ является целой траекторией полугрупповой динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ ($X = W \times Y, \pi = (\varphi, \sigma)$). Согласно лемме 2.7.2 динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является компактно диссипативной и по теореме 1.3.4 множество J компактно и инвариантно и, следовательно, точка $(w, y) = x \in J$ тогда и только тогда, когда через $(w, y) = x$ проходит целая траектория $\gamma = (\nu, Id_Y)$ динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$, которая целиком лежит в J, т.е. $\gamma(0) = (\nu(0), y) = (w, y)$ и $\gamma(s) \in J$ для любых $s \in \mathbb{S}$. Для завершения доказательства первого утверждения теоремы достаточно сослаться на теорему 2.7.3 (пункт 5.).

Для того чтобы доказать второе утверждение теоремы, заметим, что в условиях теоремы 2.7.3 множество $I_y \neq \emptyset$ и компактно. Так как пространство W обладает свойством (S), то существует связный компакт $V \supseteq I$. Согласно (2.7.10) имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(U(t, \sigma^{-t}y)(V), I_y) = 0.$$

Заметим, что $I_y \subseteq U(t, \sigma^{-t}y)(V)$ для любого $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_1$; отображение $U(t, \sigma^{-t}y) : W \to W$ непрерывно и, следовательно, множество $U(t, \sigma^{-t}y)(V)$ компактно и связно. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 3.12 из [**188**].

2.8. Глобальные аттракторы неавтономных систем с минимальной базой

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ - неавтономная динамическая система, Y - компактное минимальное множество и (X, h, Y) - локально тривиальное банахово расслоение.

Теорема 2.8.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *вполне непрерывна, т.е. для любого ограниченного множества* $A \subset X$ *существует* $l = l(A) > 0$ *такое, что* $\pi^l(A)$ *относительно компактно;*

(2) *все движения* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *ограничены на* $\mathbb{T}_+$, *т.е.* $\sup\{|xt| \; |t \in T_+\} < +\infty$ *для любого* $x \in X$*;*

(3) *существуют* y_0 *и* $R_0 > 0$ *такие, что для любого* $x \in X_{y_0}$ *найдется* $\tau = \tau(x) \geq 0$ *такое, что*

$$|x\tau| < R_0. \tag{2.8.1}$$

Тогда неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *допускает компактный глобальный аттрактор.*

Доказательство. Пусть $R > R_0$, тогда для любого $x \in X$ существует $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $|x\tau| < R$. Если допустить, что это не так, то найдутся $R^1 > R_0$ и $x_0' \in X$ такие, что

$$|x_0'\tau| > R^1 \tag{2.8.2}$$

при всех $\tau \geq 0$. В силу вполне непрерывности динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и ограниченности на $\mathbb{T}_+$ движения $\pi(x_0', t)$ точка x_0' устойчива L^+ и в силу минимальности Y множество $\omega_{x_0'} \bigcap X_{y_0}$ непусто . Согласно условию (2.8.2) имеем

$$|xt| \geq R^1 \tag{2.8.3}$$

при всех $x \in \omega_{x_0'} \bigcap X_{y_0}$. Неравенсвто (2.8.3) противоречит (2.8.1). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.6.1.

Замечание 2.8.2. *a. Для конечномерных систем (т.е. векторное расслоение* (X, h, Y) *конечномерно) теорема 2.8.1* *усиливает теорему 2.6.1 из* **[65]**, *а именно условие равномерной ограниченности заменяется просто ограниченностью траекторий* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$;

b. Если условие минимальности Y *в теореме 2.8.1 убрать, то она перестает быть справедливой даже в классе линейных неавтономных систем. Сказанное выше подтверждается следующим примером.*

Пример 2.8.3. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x' = a(t)x, \tag{2.8.4}$$

где $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ определена равенством $a(t) = -1 + \sin \sqrt[3]{t}$. Отметим следующие свойства функции a и уравнения (2.8.4):

(1) $a'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \cos \sqrt[3]{t} \to 0$ при $t \to +\infty$;

(2) $a(t) \in [-2, 0]$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(3) $\{a_\tau \mid \tau \geq 0\}$ относительно компактно в $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, где $a_\tau(t) = a(t + \tau)(t \in \mathbb{R})$;

(4) $\omega_a \neq \emptyset$ и компактно;

(5) $b' \equiv 0$, каково бы ни было $b \in \omega_a$ и, следовательно, $b(t) \equiv c \in [-2, 0]$;

(6) $a(t_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $t_n = -1 + (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2$ $(n \in \mathbb{Z})$;

(7) существует $\{t_{n_k}\} \subseteq \{t_n\}$ такая, что $a(t + t_{n_k}) \to \tilde{b}(t)$ и $\tilde{b}(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(8) каково бы ни было $b \in H^+(a) := \overline{\{a_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}_+\}}$, имеет место неравенство

$$|\varphi(t, x, b) \leq |x| \tag{2.8.5}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_+$, где $\varphi(t, x, b)$ - решение уравнения

$$y'(t) = b(t)y, \tag{2.8.6}$$

проходящее через точку $x \in \mathbb{R}$ при $t = 0$;

(9) если $b \in \omega_a \setminus \{0\}$, то $b(t) \equiv c < 0$ и, следовательно,

$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, x, b)| = 0 \tag{2.8.7}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$;

(10) если $b(t) \equiv 0$ $(b \in \omega_a)$, то $\varphi(t, x, b) = x$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Положим $Y := H^+(a)$ и обозначим через $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ динамическую систему сдвигов на Y. Пусть $X = \mathbb{R} \times Y$ и $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ полугрупповая динамическая система на X, где $\pi := (\varphi, \sigma)$ (т.е. $\pi((x,b),t) = (\varphi(t,x,b), b_t)$ при всех $(x,b) \in X$ и $t \in \mathbb{R}_+$). Тогда $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (2.8.4), где $h = pr_2 : X \to Y$. Из свойств 1–10 следует, что для неавтономной динамической системы $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$, порожденной уравнением (2.8.4), выполнены все условия теоремы 2.8.1, кроме минимальности Y, и она не имеет компактного глобального аттрактора.

Следствие 2.8.4. *Пусть $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна и для любого $y \in Y$ существует $R(y) \geq 0$ такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup |xt| \leq R(y) \tag{2.8.8}$$

для любого $x \in X_y$, тогда неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ допускает компактный гло- бальный аттрактор.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 2.8.1, если заметить, что из условия (2.8.8) следует ограниченность на $\mathbb{T}_+$ каждого движения из $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Теорема 2.8.5. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна, т.е. для любого ограниченного полуинвариантного множества $A \subset X$ существует непустой компакт K_A такой, что*
$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t A, K_A) = 0; \tag{2.8.9}$$

(2) *$(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически ограничена, т.е. для любого ограниченного множества $A \subset X$ существует $l = l(A) \geq 0$ такое, что $\bigcup_{t \geq l} \pi^t A$ ограничено;*

(3) *существуют $y_0 \in Y$ и $R_0 > 0$ такие, что для любого $x \in X_{y_0}$ найдется $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что выполнено (2.8.1).*

Тогда неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ допускает компактный глобальный аттрактор.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в условиях теоремы динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ удовлетворяет условию Ладыженской. Пусть $R > R_0$, тогда для любого $x \in X$ найдется $\tau = \tau(x) \geq 0$ такое, что $|x\tau| < R$. Если допустить, что это не так, то найдутся $x' \in X$ и $\bar{R} > R_0$ такие, что

$$|x'\tau| \geq \bar{R} > R_0 \tag{2.8.10}$$

при всех $\tau \geq 0$ и, следовательно, $\omega_{x'} \bigcap X_{y_0} \neq \emptyset$. Поэтому для любого $x \in \omega_{x'} \bigcap X_{y_0}$ имеет место неравенство (2.8.3), что противоречит (2.8.1). Таким образом, требуемое утверждение доказано. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 1.7.8.

Замечание 2.8.6. *Отметим, что теорема 2.8.5 без требования минимальности Y не имеет места уже в классе линейных систем. Последнее обстоятельсво подтверждается примером 2.8.3.*

Теорема 2.8.7. *Пусть (X, h, Y) - конечномерное векторное расслоение, все движения $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ ограничены на $\mathbb{T}_+$, Y - компактное минимальное множество и $y_0 \in Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ диссипативна;*

(2) *существует $R > 0$ такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup |xt| < R \tag{2.8.11}$$

при всех $x \in X_{y_0}$;

(3) *существует положительное число r такое, что для любых $x \in X_{y_0}$ и $l > 0$ найдется $\tau = \tau(x) \geq l$, для которого*

$$|x\tau| < r; \tag{2.8.12}$$

(4) *существует непустой компакт $K_1 \subset X$ такой, что $\omega_x \bigcap K_1 \neq \emptyset$ при всех $x \in X_{y_0}$;*

(5) *существует непустой компакт $K_2 \subseteq X$ такой, что $\emptyset \neq \omega_x \subseteq K_2$ при всех $x \in X_{y_0}$;*

(6) *существует положительное число R_0 такое, что для любого $R_1 > 0$ найдется $l(R_1) > 0$, для которого*

$$|xt| < R_0 \tag{2.8.13}$$

при всех $t \geq l(R_1)$, $|x| \leq R_1$ $(x \in X_{y_0})$.

Доказательство. Импликации $1 \Rightarrow 6. \Rightarrow 2. \Rightarrow 5. \Rightarrow 4. \Rightarrow 3.$ очевидны. Согласно теореме 2.8.1 из 3. следует 1. Теорема доказана.

2.9. Однородные динамические системы

Обозначим через (X, h, Y) локально тривиальное векторное расслоение **[97]** со слоем E. Неавтономную динамическую систему $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h\rangle$ назовем однородной порядка $k = 1$, если $\pi(t, \lambda x) = \lambda\pi(t, x)$ при всех $\lambda > 0$, $x \in X$ и $t \in T$. Динамическую систему $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ назовем однородной порядка k ($k \geq 1$), если $\pi(t, \lambda x) = \lambda^k \pi(\lambda^{k-1} t, x)$ при всех $\lambda \geq 0$, $x \in X$ и $t \in T$.

Если $x \in X$, то положим $|x| = \rho(x, \theta_{h(x)})$, где θ_y $(y \in Y)$ - нулевой элемент линейного пространства X_y и $\Theta := \{\theta_y | y \in Y\}$ нулевое сечение векторного расслоения. Через X^s обозначим устойчивое многообразие $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$, т.е. $X^s = \{x | x \in X, \lim\limits_{t\to+\infty} |\pi(t, x)| = 0\}$.

Лемма 2.9.1. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (X, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *однородная порядка* $k = 1$ *неавтономная динамическая система, тогда:*

(1) *если* Ω_X *компактно, то* $\Omega_X \subseteq \Theta$*;*
(2) *если* $J^+(\Omega_X)$ *компактно, то* $J^+(\Omega_X) \subseteq \Theta$.

Доказательство. Для доказательства включения $\Omega_X \subseteq \Theta$, очевидно, достаточно показать, что $\omega_x \subseteq \Theta$ для любого $x \in X$. Пусть $x \in X$ и $p \in \omega_x$, тогда в силу однородности $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ порядка $k = 1$ имеем $\lambda p \in \omega_{\lambda x}$ для любого $\lambda \geq 0$. Если допустить, что при некотором x_0 не имеет место $\omega_{x_0} \subseteq \Theta$, то найдется $p \in \omega_{x_0} \setminus \Theta$ и, следовательно, $\lambda p \in \Omega$ для любого $\lambda \geq 0$. Последнее противоречит компактности Ω.

Пусть теперь $J^+(\Omega_X)$ компактно. Покажем, что $J^+(\Omega_X) \subseteq \Theta$. Пусть $p \in J^+(\Omega_X)$, тогда существуют $q \in \Omega_X$, $q_n \to q$ и $t_n \to \infty$ такие, что $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(t_n, q_n)$ и $\lambda p = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\pi(t_n, q_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(t_n, \lambda q_n)$. Так как $\lambda q \in \Omega_X$ наряду с точкой q, то $\lambda p \in J^+_{\lambda q} \subseteq J^+(\Omega_X)$ при всех $\lambda \geq 0$ и $p \in J^+(\Omega_X)$. Если бы $J^+(\Omega_X) \nsubseteq \Theta$, то существовала бы точка $p_0 \in J^+(\Omega_X) \setminus \Theta$ и, следовательно,

$\lambda p_0 \in J^+(\Omega_X)\ \ \forall \lambda \geq 0$. Последнее противоречит компактности $J^+(\Omega_X)$. Лемма доказана.

Следствие 2.9.2. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *- однородная порядка* $k = 1$ *неавтономная динамическая система, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *компактно диссипативна;*
(2) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *конвергентна.*

Теорема 2.9.3. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *однородна порядка* $k = 1$ *и* $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ *поточечно* k*-диссипативна, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *поточечно диссипативна (т.е.* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ *поточечно диссипативна);*
(2) $X^s = X$.

Доказательство. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ поточечно диссипативна. Для доказательства равенства $X^s = X$, очевидно, достаточно показать, что $\Omega_X \subseteq \Theta$. Так как $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ поточечно диссипативна, то Ω_X компактно, и согласно лемме 2.9.1 $\Omega_X \subseteq \Theta$.

Пусть теперь $X^s = X$, покажем что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ поточечно диссипативна. Прежде всего заметим, что $\{\pi(t, x) \mid t \geq 0\}$ относительно компактно каково бы ни было $x \in X$. Для этого достаточно показать, что из любой последовательности $\{\pi(t_n, x)\}$ $(t_n \to +\infty)$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть $y = h(x)$, тогда в силу поточечной диссипативности $(Y, \mathbb{T}_2, h)$ последовательность $\{\sigma(t_n, y)\}$ можно считать сходящейся. Положим $q = \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(t_n, y)$, тогда $q \in \omega_y$. В силу локальной тривиальности расслоения (X, h, Y) последовательность $\{\theta_{\sigma(y,t_n)}\} \to \theta_y$ и, следовательно,

$$\rho(xt_n, \theta_q) \leq \rho\left(xt_n, \theta_{\sigma(y,t_n)}\right) + \rho\left(\theta_{\sigma(y,t_n)}, \theta_q\right) \longrightarrow 0$$

при $n \to +\infty$. Кроме того, из приведенных выше рассуждений следует, что $\omega_x \subseteq \Theta$ для любого $x \in X$ и, следовательно, $\Omega_X \subseteq \Theta$. Заметим, что согласно лемме 2.3.1 $h(\Omega_X) \subseteq \Omega_Y$ и, следовательно, $\Omega_X \subseteq \Theta \cap h^{-1}(\Omega_Y)$. Из компактности Ω_Y и локальной тривиальности (X, h, Y) следует компактность $\Theta \cap h^{-1}(\Omega_Y)$ и, следовательно, компактность Ω_X. Теорема доказана.

Теорема 2.9.4. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *однородна порядка* $k = 1$ *и* Y *компактна, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *компактно диссипативна, т.е.* $(X,\ \mathbb{T}_1, \pi)$ *компактно диссипативна;*

(2) $X^s = X$ *и множество* $\Theta \cap h^{-1}(J_Y)$ *равномерно устойчиво, т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $|x| < \delta$ *влечет* $|xt| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq 0$*;*

(3) *если векторное расслоение* (X, h, Y) *является нормированным (т.е метрика* ρ *на слоях* (X, h, Y) *согласована с нормой) существует положительное число* N *такое, что*
$$|xt| \leq N|x| \tag{2.9.1}$$
при всех $x \in X$, $t \geq 0$, *и* $X^s = X$.

Доказательство. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ компактно диссипативна и J - центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Согласно теореме 2.9.3 $X^s = X$. Включение $J_X \subseteq \Theta$ доказывается также, как и включение $\Omega_X \subseteq \Theta$ (см. доказательство теоремы 2.9.3). Покажем, что нулевое сечение Θ расслоения (X, h, Y) равномерно устойчиво. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, $|x_n| < \delta_n$ и $t_n \to +\infty$ такие, что
$$|x_n t_n| \geq \varepsilon_0. \tag{2.9.2}$$
В силу компактности Y и локальной тривиальности (X, h, Y) множество Θ компактно и, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Так как $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна, то последовательность $\{x_n t_n\}$ также можно считать сходящейся и положим $\overline{\overline{x}} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$. Тогда $\overline{\overline{x}} \in J_X \subseteq \Theta$ и, следовательно, $|\overline{\overline{x}}| = 0$. Последнее противоречит неравенству (2.9.2). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Для доказательства импликации 2. $\Rightarrow$ 1. достаточно сослаться на теорему 1.5.15.

Пусть теперь векторное расслоение (X, h, Y) является нормированным. Покажем, что в этом случае каждое из условий 1. и 2. эквивалентно условию 3.. Докажем, например, что из условия 2. вытекает 3.. Так как нулевое сечение Θ устойчиво, то для $\varepsilon = 1$ найдется $\gamma = \delta(1) > 0$ такое, что $|\pi(t,x)| \leq 1$ при всех $t \geq 0$ и $|x| \leq q$. Положим $N = \gamma^{-1}$, тогда

$$|\pi(t,x)| = ||x|\gamma^{-1}\pi(t,x|x|^{-1}\gamma)| \leq |x|\gamma^{-1} = N|x|. \tag{2.9.3}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X \setminus \Theta$.

Обратно. Пусть $X^s = X$ и существует $N > 0$ такое, что выполнено неравенство (2.9.1) при всех $x \in X$ и $t \geq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{N}$, такое $|x| < \delta$ влечет $|xt| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.9.5. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ однородна порядка $k = 1$ и Y компактно, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ *локально диссипативна, т.е.* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *локально диссипативна;*

(2) $X^s = X$ *и нулевое сечение* Θ *является равномерно притягивающим, т.е. существует* $\gamma > 0$ *такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |\pi(t,x)| = 0; \tag{2.9.4}$$

(3) *в случае, когда векторное расслоение является нормированным существуют положительные числа* $\mathcal{N}$ *и* ν *такие, что*

$$|\pi(t,x)| \leq \mathcal{N} e^{-\nu t}|x| \tag{2.9.5}$$

при всех $t \geq 0$ *и* $x \in X$.

Доказательство. Покажем, что имеют место импликации 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3.. Если неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ локально диссипативна и J-ее - центр Левинсона, то согласно теореме 2.9.4 $X^s = X$ и $J_X \subseteq \Theta$. Кроме того, из теоремы 1.6.2 следует существование положительного числа γ такого, что

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\pi^t B(J,\gamma), J) = 0. \tag{2.9.6}$$

Покажем, что для найденного $\gamma > 0$ имеем место равенство (2.9.4). Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\{x_n\}$ ($|x_n| \leq \gamma$) и $t_n \to +\infty$ такие, что имеет место неравенство (2.9.2). Из равенства (2.9.6) следует, что последовательность

$\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} x_n t_n$. Согласно (2.9.6) $\overline{x} \in J$, и так как $J_X \subseteq \Theta$, то $|\overline{x}| = 0$. С другой стороны, переходя к пределу в (2.9.2), когда $n \to +\infty$, мы получим $|\overline{x}| \geq \varepsilon_0 > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство равенства (2.9.4).

Из однородности системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ и равенства (2.9.4) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\leq 1} |\pi(t,x)| = 0. \tag{2.9.7}$$

Положим $\psi(t) = \sup\{|\pi(t,x)| \ : \ |x| \leq 1\}$. Заметим, что $\psi(t+\tau) \leq \psi(t)\psi(\tau)$ при всех $t, \tau \in T_1$ и $\psi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Из равенства (2.9.4) следует равномерная устойчивость нулевого сечения Θ расслоения (X, h, Y). В самом деле, если допустить что это не так, то найдутся ε_0, $\delta_n \downarrow 0$, $|x_n| < \delta_n$ и $t_n \to +\infty$ такие, что имеет место (2.9.2). Можно считать, что $\delta_n \leq \gamma$ и согласно (2.9.4) для $\frac{\varepsilon_0}{2}$ найдется $L_0 > 0$ такое, что

$$|xt| < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.9.8}$$

при всех $t \geq L_0$. Так как $t_n \to +\infty$, то для достаточно больших n неравенства (2.9.8) и (2.9.2) противоречивы. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. По теореме 2.9.4 функция ψ ограничена при $t \geq 0$ и согласно лемме 5.4 **[14]** существуют положительные числа $\mathcal{N}$ и ν такие, что $\psi(t) \leq \mathcal{N} e^{-\nu t}$ при всех $t \geq 0$ и, следовательно, имеет место и (2.9.5).

Покажем теперь, что имеют место и обратные импликации 3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1.. Очевидно, из 3. следует 2., поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что из 2. следует 1.. Прежде всего заметим, что из равенства (2.9.4) как было показано выше, следует равномерная устойчивость нулевого сечения Θ. Согласно теореме 2.9.4 динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ компактно диссипативна и $J_X \subseteq \Theta$. Покажем теперь, что

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\pi^t B(J,\gamma), J) = 0. \tag{2.9.9}$$

Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $x_n \in B(J,\gamma)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n t_n, \Theta_y) \geq \varepsilon_0 \tag{2.9.10}$$

при всех $y \in Y$. Из (2.9.4) следует, что последовательность $\{x_n t_n\}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n = \overline{x} \in \Theta$. С другой стороны, переходя в (2.9.10) к пределу, когда $n \to +\infty$ получим $\rho(\overline{x}, \Theta_y) \geq \varepsilon_0$ для любого $y \in Y$, т.е. $\overline{x} \notin \Theta$. Полученное противоречие завершает доказательство равенства (2.9.5) и, следовательно, локальную диссипативность (X,T,π). Теорема доказана.

Следствие 2.9.6. *Пусть $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ однородная неавтономная динамическая система и (X,T,π) асимптотически компактна, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Неавтономная динамическая система $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ компактно диссипативна;*
(2) *Неавтономная динамическая система $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ локально диссипативна;*
(3) *$X^s = X$ и нулевое сечение Θ расслоения (X,h,Y) равномерно устойчиво;*
(4) *$X^s = X$ и нулевое сечение Θ является равномерно притягивающим;*
(5) *В случае, когда векторное расслоение (X,h,Y) является нормированным, существует положительное число $\mathcal{N} > 0$ такое, что*

$$|xt| \leq \mathcal{N}|x|$$

при всех $x \in X$, $t \geq 0$, и $X^s = X$.
(6) *В случае, когда (X,h,Y) является нормированным существуют положительные числа $\mathcal{N}$ и γ такие, что*

$$|xt| \leq \mathcal{N}e^{-\gamma t}|x|$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теорем 1.7.1, 2.9.4 и 2.9.5.

Следствие 2.9.7. *Пусть* $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ *вполне непрерывна, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *поточечно диссипативна;*
(2) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *компактно диссипативна;*
(3) $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *локально диссипативна;*
(4) $X^s = X$*;*
(5) $X^s = X$ *и* Θ *равномерно устойчиво;*
(6) $X^s = X$ *и* Θ *является равномерно притягивающим;*
(7) *в случае, когда* (X, h, Y) *является нормированным, существует* $\mathcal{N} > 0$ *такие, что*

$$|xt| \le \mathcal{N}|x|$$

при всех $x \in X$, $t \ge 0$ *и* $X^s = X$*;*
(8) *в случае, когда* (X, h, Y) *является нормированным, существуют* $\mathcal{N} > 0$ *и* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$|xt| \le \mathcal{N} e^{-\gamma t}|x|$$

при всех $t \ge 0$ *и* $x \in X$.

Доказательство. Следствие 2.9.7 вытекает из теорем 1.4.3, 2.9.3 – 2.9.5.

Замечание 2.9.8. *a) Все результаты этого параграфа имеют место и для автономных однородных (порядка* $k \ge 1$*) систем с непрерывным временем (*$\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ *или* $\mathbb{R}$*).*

b) Заметим, что результаты этого параграфа имеют место и в том случае, когда расслоение (X, h, Y) *не обязательно является линейным. Достаточно, чтобы существовало линейное расслоение* (W, h, Y) *такое, что* $X \subseteq W$ *и* $\lambda x \in X$ *для любых* $\lambda \ge 0$ *и* $x \in X$ *(в этом случае расслоение* (X, h, Y) *назовем однородным).*

2.10. Степенная асимптотика однородных систем

Пусть (X, h, Y) - локально-тривиальное нормированное векторное расслоение со слоем E. Будем говорить, что неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ допускает степенную асимптотику порядка $m > 1$, если существуют положительные числа a_i и b_i $(i = 1, 2)$ такие, что

$$(a_1 t + b_1 |x|^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}} \le |\pi^t x| \le (a_2 t + b_2 |x|^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}} \quad (2.10.1)$$

при всех $t \ge 0$ и $x \in X$.

Теорема 2.10.1. *Для того чтобы неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ допускала степенную асимптотику порядка $m > 1$, необходимо и достаточно существование непрерывной функции $V : X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющей следующим условиям:*

a) *существуют положительные числа α и β такие, что*

$$\alpha |x| \le V(x) \le \beta |x| \quad (2.10.2)$$

при всех $x \in X$;

b) *V дифференцируема вдоль траекторий системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и*

$$\left. \frac{dV(\pi^t x)}{dt} \right|_{t=0} = -|x|^m \quad (2.10.3)$$

при всех $x \in X$.

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено неравенство (2.10.1) и

$$V(x) := \int_0^{+\infty} |\pi^\tau x|^m d\tau. \quad (2.10.4)$$

Легко заметить, что при выполнении условия (2.10.1) равенство (2.8.4) корректно определяет отображение $V : X \to \mathbb{R}_+$. Кроме того, при выполнении условия (2.10.1) интеграл (2.10.4) является равномерно (но $|x| \le r$, при каждом $r > 0$) сходящимся и, следовательно, функция V непрерывна. Далее, из (2.10.1) и (2.10.4) следует, что $\alpha|x| \le V(x) \le \beta|x|$ при всех $x \in X$, где $\alpha = \frac{m-1}{a_1} b_1^{\frac{1}{1-m}}$ и $\beta = \frac{m-1}{a_2} b_2^{\frac{1}{1-m}}$.

Достаточность. Пусть $V : X \to \mathbb{R}_+$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условиям a) и b) теоремы. Покажем что неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$

допускает степенную асимптотику порядка m. Действительно, положим $\varphi(t) := V(\pi^t x)$ и заметим, что согласно (2.10.3)

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -|\pi^t x|^m \tag{2.10.5}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$. Из условия (2.10.2) следует, что $|\pi^t x| \geq \frac{1}{\beta} V(\pi^t x)$ при всех $t \geq 0$ и $x \in X$ и, следовательно,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leq -\frac{1}{\beta}\varphi^m(t). \tag{2.10.6}$$

Учитывая, что $\varphi(t) = V(\pi^t x) > 0$ при всех $t \geq 0$, если $x \neq 0$, мы имеем

$$V(\pi^t x) \leq \left(\frac{m-1}{\beta^m} t + \alpha^{-m+1}|x|^{-m+1}\right)^{-\frac{1}{m-1}}. \tag{2.10.7}$$

С другой стороны, $|\pi^t x| \leq \frac{1}{2} V(\pi^t x)$ и, следовательно,

$$|\pi^t x| \leq \left(a_2 t + b_2 |x|^{1-m}\right)^{-\frac{1}{m-1}} \tag{2.10.8}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$, где $a_2 = \frac{m-1}{\beta^m \alpha^{1-m}}$ и $b_2 = 1$.

Аналогично устанавливается и степенная асимптотика снизу для $|\pi^t x|$. Теорема полностью доказана.

Теорема 2.10.2. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ - неавтономная динамическая система, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют положительные числа $\mathcal{N}_i$ и ν_i $(i = 1, 2)$ такие, что*

$$\mathcal{N}_1 e^{-\nu_1 t}|x| \leq |\pi^t x| \leq \mathcal{N}_2 e^{-\nu_2 t}|x| \tag{2.10.9}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$;

(2) (a) *существуют положительные числа α и β такие, что имеет место (2.10.2) при всех $x \in X$;*

(b) *V дифференцируема вдоль траекторий системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и*

$$\left.\frac{dV(\pi^t x)}{dt}\right|_{t=0} = -|x| \tag{2.10.10}$$

при всех $x \in X$.

Доказательство. Доказательство сформулированного утверждения строится по той же схеме, что и теоремы 2.10.1.

Лемма 2.10.3. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ - неавтономная динамическая система и существуют положительные числа a, b и $m > 1$ такие, что*

$$|\pi^t x| \leq (at + b|x|^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}} \tag{2.10.11}$$

при всех $x \in X$ и $t \geq 0$, тогда

$$\lim_{t\to+\infty} |\pi^t x| = 0 \tag{2.10.12}$$

равномерно по $|x| \leq r$ при каждом $r > 0$ и

$$|\pi^t x| \leq \mathcal{N}|x| \tag{2.10.13}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$, где $\mathcal{N} = b^{1-m}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\omega(r,t) = (at + br^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}}$, определенную при всех $t \geq 0$ и $r \geq 0$. Заметим, что

$$\frac{\partial \omega(r,t)}{\partial t} = br^{1-m}(at + br^{1-m})^{\frac{m}{1-m}} \geq 0 \tag{2.10.14}$$

при всех $t \geq 0$ и, следовательно, при $|x| \leq r$ имеем соотношение

$$|\pi^t x| \leq (at + b|x|^{1-m})^{-\frac{1}{m}} \leq (at + br^{1-m})^{=\frac{1}{m-1}}, \tag{2.10.15}$$

из которого и следует (2.10.12).

Что касается (2.10.13), то оно вытекает из (2.10.11) и равенства

$$(at + b|x|^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}} = |x|(at|x|^{m-1} + b)^{-\frac{1}{m-1}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.10.4. *Пусть $\mathfrak{D}$ - семейство функций $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям:*

a. *существует $M > 0$ такое, что $0 < m(t) \leq M$ при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathfrak{D}$;*
b. *$m(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по $m \in \mathfrak{D}$, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathfrak{D}$ существует $L(\varepsilon) > 0$ такое, что $m(t) < \varepsilon$ при всех $t \geq L(\varepsilon)$.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *если* $m(t+\tau) \le m(t)m(\tau)$ *при всех* $t, \tau \ge 0$ *и* $m \in \mathfrak{D}$, *то существуют положительные числа* $\mathcal{N}$ *и* ν *такие, что*

$$m(t) \le \mathcal{N} e^{-\nu t} \tag{2.10.16}$$

при всех $t \ge 0$ *и* $m \in \mathfrak{D}$;

(2) *если* $m(t+\tau) \le m(t)m(\tau m^{\alpha-1}(t))$ $(\alpha > 1)$ *при всех* $t, \tau \ge 0$ *и* $m \in \mathfrak{D}$, *то существуют положительные числа* a *и* b *такие, что*

$$m(t) \le M(a+bt)^{-\frac{1}{\alpha-1}} \tag{2.10.17}$$

при всех $t \ge 0$ *и* $m \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть $\gamma \in (0,1)$ и $\tau > 0$ - такое, что $m(\tau) \le \gamma < 1$ при всех $m \in \mathfrak{D}$. Положим $\nu := -\tau^{-1} \ln \gamma$ и $\mathcal{N} = Me^{\nu\tau}$, тогда

$$m(n\tau) \le \gamma^n \tag{2.10.18}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $t \ge 0$ и n - натуральное число, такое что $t \in [n\tau, n\tau + \tau]$. Таким образом

$$m(t) = m(t - n\tau + n\tau) \le m(t - n\tau)m(n\tau) \le M\gamma^n.$$

Справедливо также неравенство

$$m(t) \le e^{\nu(t-n\tau)} m(t-n\tau)\gamma^n e^{-\nu t}.$$

Так как $e^{\nu\tau} = \gamma^{-1}$, то согласно выбору числа $\mathcal{N}$ получаем требуемое неравенство (2.10.16).

Для доказательства второго утверждения леммы выберем $\tau > 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$m(t) \le \frac{1}{2} \tag{2.10.19}$$

при всех $t \ge \tau$ и $m \in \mathfrak{D}$. Так как $0 < m(t) \le M$ и $m(t+\tau) \le m(t)m(\tau m^{\alpha-1}(t))$ при всех $t, \tau \ge 0$ и $m \in \mathfrak{D}$, то

$$m(t) \le M \qquad (0 \le t \le q\tau,\ q = 2^{\alpha-1}) \tag{2.10.20}$$

и

$$m(t) \le \frac{1}{2} \qquad (\tau \le t < +\infty) \tag{2.10.21}$$

при всех $m \in \mathfrak{D}$. Положим $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + \tau q_i$ ($q_i = q^i$) и заметим, что

$$m(t_i) \leq \frac{1}{2} \qquad (i \geq 1) \tag{2.10.22}$$

при всех $m \in \mathfrak{D}$. В самом деле, $m(t_1) \leq 2^{-1}$ согласно (2.10.19), кроме того

$$m(t_{i+1}) = m(t_i + \tau q_i) \leq m(t_i) m(\tau q_i m^{\alpha-1}(t_i)) \tag{2.10.23}$$

при всех $m \in \mathfrak{D}$. Предположим, что (2.10.22) имеем место для всех $i \leq n$. Тогда из (2.10.23) следует, что

$$m(t_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{2.10.24}$$

ибо $\tau q_n m^{\alpha-1}(t_n) \geq \tau$ (для любого $m \in \mathfrak{D}$) в силу выбора q_n и индуктивного предположения (2.10.22). Таким образом, из (2.10.20) и (2.10.22) следует, что

$$m(t) \leq \frac{1}{2^n} \tag{2.10.25}$$

при всех $t \geq t_n$ и $n \geq 1$. Заметим, что $t_{n+1} = \tau(q^{n+1} - 1)(q-1)^{-1}$ и, следовательно,

$$2^{-n} = 2 \left(\frac{2^{\alpha-1} - 1}{\tau} t_{n+1} + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{2.10.26}$$

Пусть теперь $t \in [t_n, t_{n+1})$, тогда

$$2^{-n} < 2 \left(1 + \frac{2^{\alpha-1} - 1}{\tau} t \right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{2.10.27}$$

Из (2.10.20) и (2.10.27) следует, что

$$m(t) \leq M \left(2^{1-\alpha} + \frac{1 - 2^{1-\alpha}}{\tau} t \right)^{-\frac{1}{\alpha-1}} \tag{2.10.28}$$

при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathfrak{D}$. Положив $a = 2^{1-\alpha}$ и $b = \tau^{-1}(1 - 2^{1-\alpha})$, получим требуемое неравенство. Лемма полностью доказана.

Теорема 2.10.5. *Пусть неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ является однородной, Y компактно, и расслоение (X, h, Y) является нормированным, тогда следующие условия эквивалентны:*

a. *нулевое сечение расслоения* (X, h, Y) *равномерно асимптотически устойчиво;*

b. *существуют положительные числа* $\mathcal{N}$ *и* ν *такие, что*

$$|\pi^t x| \leq \mathcal{N} e^{-\nu t}|x| \tag{2.10.29}$$

при всех $x \in X$ *и* $t \geq 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что имеет место импликация $a. \Rightarrow b.$, так как обратное утверждение очевидно.

Заметим, что из равномерной асимптотической устойчивости нулевого сечения Θ расслоения (X, h, Y) и однородности неавтономной системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ следует равенство $X^s = X$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.9.5.

Теорема 2.10.6. *Пусть* X *- банахово пространство. Для автономной однородной (порядка* $k > 1$*) динамической системы* $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) *нулевое движение* $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ *равномерно асимптотически устойчиво;*

(2) *существуют положительные числа* α *и* β *такие, что*

$$|\pi^t x| \leq (\alpha |x|^{1-k} + \beta t)^{-\frac{1}{k-1}} \tag{2.10.30}$$

при всех $t \geq 0$ *и* $x \in X$.

Доказательство. Покажем, что из 1. следует 2.. Пусть $x \neq 0$, тогда в силу однородности порядка $k > 1$ системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned} |\pi(t, x)| &= |x| |\pi(t|x|^{k-1}, \frac{x}{|x|})| \\ &\leq |x| \sup_{|y| \leq 1} |\pi(t|x|^{k-1}, y)| = |x| m(t|x|^{k-1}) \end{aligned} \tag{2.10.31}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$, где

$$m(t) = \sup_{|y| \leq 1} |\pi(t, y)|. \tag{2.10.32}$$

Из равномерной асимптотической устойчивости нулевого движения $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ и однородности порядка $k > 1$ системы

$(X,\mathbb{R}_+,\pi)$ следует, что $X^s = X$. Из теоремы 2.9.3 следует ограниченность функции m, а из равномерной асимптотической устойчивости нулевого движения $(X,\mathbb{R}_+,\pi)$ следует, что $m(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того, заметим что

$$\begin{aligned} m(t+\tau) = \sup_{|y|\le 1} |\pi(t+\tau,y)| = \sup_{|y|\le 1} |\pi(\tau,\pi(t,y))| = \\ = m(t) \sup_{|y|\le 1} \left|\pi\left(\tau m^{k-1}(t), \frac{\pi(t,y)}{m(t)}\right)\right| \le \\ \le m(t) m(\tau m^{k-1}(t)) \end{aligned} \tag{2.10.33}$$

при всех $t,\tau \ge 0$. Согласно лемме 2.10.4 существуют положительные числа M, a и b такие, что

$$m(t) \le M(a+bt)^{-\frac{1}{k-1}} \tag{2.10.34}$$

при всех $t \ge 0$. Положим $\alpha = M^{1-k}a$ и $\beta = M^{1-k}b$, тогда

$$|\pi(t,x)| \le |x| m(t|x|^{k-1}) \le$$

$$|x| M(a+bt|x|^{k-1})^{-\frac{1}{k-1}} = (\alpha|x|^{1-k} + \beta t)^{-\frac{1}{k-1}}$$

при всех $x \in X$ и $t \ge 0$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 2.10.3.

Замечание 2.10.7. *Результаты этого параграфа справедливы для динамических систем с однородными фазовыми пространствами (см. замечание 2.9.8 b.).*

2.11. Линейные системы

Пусть (X,h,Y) – локально тривиальное векторное расслоение со слоем E и $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi), (Y,\mathbb{T}_2,\sigma), h\rangle$ – линейная неавтономная динамическая система, то есть при каждом $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_1$ отображение $\pi^t : X_y \to X_{\sigma^t y}$ линейно. Из результатов предыдущих параграфов вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.11.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *динамическая система $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi), (Y,\mathbb{T}_2,\sigma), h\rangle$ поточечно диссипативна;*
(2) $X^s = X$.

Теорема 2.11.2. *Пусть Y компактно, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ компактно диссипативна;*

(2) *$X^s = X$ и нулевое сечение θ расслоения (X, h, Y) равномерно устойчиво, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x| < \delta$ влечет $|xt| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;*

(3) *в случае, когда векторное расслоение является нормированным, существует положительное число N такое, что*

$$|x| \leq N|x| \tag{2.11.1}$$

при всех $x \in X$, $t \geq 0$, и $X^s = X$.

Теорема 2.11.3. *Пусть Y компактно, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ локально диссипативна;*

(2) *$X^s = X$ и нулевое сечение Θ расслоения (X, h, Y) равномерно притягивающее, то есть существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |\pi(t, x)| = 0; \tag{2.11.2}$$

(3) *в случае, когда векторное расслоение является нормированным, существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$|\pi(t, x)| \leq N e^{-\nu t} |x| \tag{2.11.3}$$

при всех $x \in X$, $t \geq 0$.

Замечание 2.11.4. *a. Для автономных и периодических линейных систем легко устанавливается при помощи теоремы Банаха–Штейнгауза эквивалентность поточечной и компактной диссипативности.*

b. В примере 1.6.6 линейная автономная динамическая система в гильбертовом пространстве $X = L_2[0, 1]$, задаваемая дифференциальным уравнением $x' = Ax$ с непрерывным оператором A, является компактно диссипативной, но не является локально диссипативной.

Теорема 2.11.5. *Пусть* $\langle (X,\mathbb{T},\pi),\,(Y,\mathbb{T},\sigma),h\rangle$ – *групповая (то есть* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{Z}$*) линейная неавтономная динамическая система,* Y *компактно,* (X,h,Y) – *нормированное векторное расслоение и существуют такие положительные числа* M *и* a*, что* $|\pi^t x|\le Me^{a|t|}|x|$ $(x\in X,\ t\in\mathbb{T})$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\langle (X,\mathbb{T},\pi),(Y,\mathbb{T},\sigma),h\rangle$ *локально диссипативна, то есть существуют* N, $\nu>0$ *такие, что* $|xt|\le Ne^{-\nu t}|x|$ *при всех* $t\ge 0$ *и* $x\in X$;

(2) *существует функция* $V: X\to\mathbb{R}_+$*, обладающая свойствами:*

  2.*a*. V – *некоторая норма на* (X,h,Y)*;*

  2.*b*. *существуют положительные числа* α *и* β *такие, что* $\alpha|x|\le V(x)\le\beta|x|$ *при всех* $x\in X$*;*

  2.*c*. $\dot V_\pi(x)=-|x|$ $(x\in X)$*, где* $\dot V_\pi(x)=\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}[V(xt)-V(x)]$ *при* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *и* $\dot V_\pi(x)=V(x1)-V(x)$ *при* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $\langle (X,\mathbb{T},\pi),\,(Y,\mathbb{T},\sigma),h\rangle$ локально диссипативна. Определим функцию $V: X\to\mathbb{R}_+$ при $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ по формуле

$$V(x)=\int_0^{+\infty}|xt|dt\quad (x\in X).\tag{2.11.4}$$

Непосредственно из равенства (2.11.4) следует, что V – некоторая норма на (X,h,Y). Установим некоторые свойства V.

$$a.\quad \frac{1}{Ma}|x|\le V(x)\le\frac{N}{\nu}|x|\quad (x\in X).$$

Действительно,

$$V(x)=\int_0^{+\infty}|xt|dt\le N\int_0^{+\infty}e^{-\nu t}|x|dt=\frac{N}{\nu}|x|.$$

С другой стороны, $|x|=|(xt)(-t)|\le Me^{at}|xt|$ $(x\in X,\ t\ge 0)$ и, следовательно,

$$V(x)=\int_0^{+\infty}|xt|dt\ge\frac{1}{M}\int_0^{+\infty}e^{-at}|x|dt=\frac{1}{Ma}|x|.$$

$$b.\quad \dot V_\pi(x)=-|x|\quad (x\in X).$$

В самом деле,

$$V(xt) \quad - \quad V(x) = \int_0^{+\infty} |(xt)s|ds - \int_0^{+\infty} |xs|ds = \int_t^{+\infty} |xs|ds$$
$$- \quad \int_0^{+\infty} |xs|ds = -\int_0^t |xs|ds$$

и, следовательно,

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[V(xt) - V(x)] = \lim_{t\downarrow 0} -t^{-1}\int_0^t |xs|ds = -|x| \quad (x \in X).$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то положим $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |xn|$ $(x \in X)$. Очевидно, V определяет некоторую норму на (X, h, Y). Нетрудно заметить, что определенная таким образом функция обладает нужными свойствами. Таким образом установлено, что 1. влечет 2..

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Пусть $x \in X$ и $|x| \neq 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = V(xt)$. Так как $\alpha|x| \leq V(x) \leq \beta|x|$ и $\dot{V}_\pi(x) = -|x|$ $(x \in X)$, то мы имеем

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{V}_\pi(xt) = -|xt| \leq -\frac{1}{\beta}V(xt) = -\frac{1}{\beta}\varphi(t)$$

и, следовательно,

$$\varphi(t) \leq \varphi(0)e^{-\frac{1}{\beta}t} \quad (t \geq 0). \tag{2.11.5}$$

С другой стороны

$$\frac{1}{\beta}V(xt) \leq |xt| \leq \frac{1}{\alpha V(xt)} \quad (x \in X,\, t \geq 0). \tag{2.11.6}$$

Из неравенств (2.11.5) и (2.11.6) следует, что

$$|xt| \leq \frac{\beta}{\alpha}e^{-\frac{1}{\beta}t}|x| \quad (x \in X,\, t \geq 0).$$

Теорема доказана.

Пусть $\langle (X, \mathbb{T}, \pi),\, (Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ – линейная неавтономная динамическая система. Неавтономную динамическую систему $\langle (W, \mathbb{T}, \mu),\, (Z, \mathbb{T},\, \lambda), \varrho\rangle$ назовем линейной неоднородной системой, порожденной линейной (однородной) динамической системой $\langle (X, \mathbb{T}, \pi),\, (Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$, если выполнены следующие условия:

1. существует гомоморфизм q динамической системы $(Z, \mathbb{T}, \lambda)$ на $(Y, \mathbb{T}, \sigma)$;
2. при каждом $y \in (q \circ \varrho)(W) \subseteq Y$ пространство $W_y = (q \circ \rho)^{-1}(y)$ является аффинным, а векторное пространство $X_y = h^{-1}(y)$ - присоединенное к W_y ([**147**, c.175]). Отображение $\mu^t : W_y \to W_{\sigma^t y}$ является аффинным, а $\pi^t : X_y \to X_{\sigma^t y}$ является еч линейной присоединенной функцией ([**147**, c.179]), то есть $X_y = \{w_1 - w_2 \mid w_1, w_2 \in W_y\}$ и $\mu^t w_1 - \mu^t w_2 = \pi^t(w_1 - w_2)$ при всех $w_1, w_2 \in W_y$ и $t \in T$.

Замечание 2.11.6. *Определение линейной неоднородной системы, порожденной данной линейной системой, имеется в работе* [**17**]*, но приведенное выше определение является более общим и в ряде вопросов более гибким.*

Лемма 2.11.7. *Пусть* $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \varrho \rangle$ *– линейная неоднородная неавтономная динамическая система и* $(Z, \mathbb{T}, \lambda)$ *компактно диссипативна. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \varrho \rangle$ *компактно диссипативна.*
(2) $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \varrho \rangle$ *конвергентна.*

Доказательство. Пусть $\langle (W, \mathbb{T}, \mu), (Z, \mathbb{T}, \lambda), \varrho \rangle$ компактно диссипативна и J_W - центр Левинсона $(W, \mathbb{T}, \mu)$. Покажем, что $J_W \cap W_z$ содержит не более одной точки для произвольного $z \in J_Z$. Допустим, что это не так, тогда найдутся $z_0 \in J_Z$ и $w_1, w_2 \in J_W \cap W_{z_0}$ такие, что $w_1 \neq w_2$. Легко заметить, что тогда $w = w_2 + \lambda(w_1 - w_2) = (1 - \lambda)w_2 + \lambda w_1 \in J_W \cap W_{z_0}$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, что противоречит компактности J_W. Таким образом, 1. влечет 2.. Обратная импликация очевидна. Лемма доказана.

Теорема 2.11.8. *Пусть* $\Gamma(Z, W) \neq \emptyset$ *и* $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ *- линейная однородная динамическая система,* $\langle (W, \mathbb{S}_+, \mu), (Z, \mathbb{S}, \lambda), \varrho \rangle$ *– линейная неоднородная динамическая система, порожденная* $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$*, и* q *- гомоморфизм* $(Z, \mathbb{S}, \lambda)$ *на* $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$*. Если* Y *и* Z *компактны и* (X, h, Y) *- нормированное векторное расслоение, то динамическая система*

$\langle (W, \mathbb{S}_+, \mu), (Z, \mathbb{S}, \lambda), \rho \rangle$ *локально диссипативна тогда и только тогда, когда локально диссипативна система* $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$.

Доказательство. Пусть $\langle (W, \mathbb{S}_+, \mu), (Z, \mathbb{S}, \lambda), \rho \rangle$ локально диссипативна и J_W – центр Левинсона $(W, \mathbb{S}_+, \mu)$. Согласно лемме 2.11.7 для любого $z \in J_Z$ $J_W \cap W_z$ содержит ровно одну точку, которую обозначим через w_z. Так как $(W, \mathbb{S}_+, \mu)$ локально диссипативна, то существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\mu^t B(J_W, \gamma), J_W) = 0. \tag{2.11.7}$$

Покажем, что из равенства (2.11.7) следует равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\mu^t w, \mu^t w_z) = 0 \tag{2.11.8}$$

при всех $z \in J_Z$ и $w \in B(w_z, \gamma)$, причем равенство (2.11.8) имеет место равномерно по z и w. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $t_n \to +\infty$, $z_n \in J_Z$ и $x_n \in B(w_{z_n}, \gamma)$ $(h(x_n) = z_n)$ такие, что

$$\rho(\mu^{t_n} w_n, \mu^{t_n} w_{z_n}) \geq \varepsilon_0. \tag{2.11.9}$$

Из равенства (2.11.8) и компактности Z следует, что последовательности $\{\mu^{t_n} w_n\}$, $\{z_n t_n\}$ и $\{\mu^{t_n} w_{z_n}\}$ можно считать сходящимися. Положим $\overline{z} = \lim\limits_{t \to +\infty} z_n t_n$ и $\overline{w} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mu^{t_n} w_n$, тогда $\lim\limits_{t \to +\infty} \mu^{t_n} w_{z_n} = w_{\overline{z}}$. Переходя к пределу в (2.11.9) при $n \to +\infty$, получим $\rho(\overline{w}, w_{\overline{z}}) \geq \varepsilon_0$, что противоречит соотношению $\overline{w} \in W_{\overline{z}} \cap J_W$. Полученное противоречие доказывает равенство (2.11.9) .

Заметим, что из равенства (2.11.8) вытекает равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |xt| = 0, \tag{2.11.10}$$

если заметить, что $xt = \mu^t w_1 - \mu^t w_2 + \mu^t w_z - \mu^t w_z$, где $z = h(x)$, $|x| \leq \gamma$ и $x = w_1 - w_2$. Из равенства (2.11.9) и теоремы 2.11.3 вытекает локальная диссипативность динамической системы $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$.

Обратно. Пусть $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ локально диссипативна, тогда согласно теореме 2.11.3 существуют положительные числа N и ν такие, что выполнено неравенство (2.11.3).

Обозначим через $\Gamma(Z,W)$ пространство всех непрерывных сечений гомоморфизма $\varrho : Z \to W$, наделенное метрикой

$$d(\varphi,\psi) = \max_{z\in Z} \rho(\varphi(z),\psi(z)) = \max_{z\in Z} |\varphi(z) - \psi(z)|,$$

которая превращает его в полное метрическое пространство. При каждом $t \in \mathbb{T}$ определим отображение $S^t : \Gamma(Z,W) \to \Gamma(Z,W)$ по следующему правилу $(S^t\varphi)(z) = \mu^t\varphi(\lambda^{-t}z)$ $(z \in Z$, $\varphi \in \Gamma(Z,W))$. Легко проверить, что семейство отображений $\{S^t : t \in \mathbb{T}\}$ есть коммутативная группа относительно композиции. Заметим, что

$$\begin{aligned} &d(S^t\varphi_1, S^t\varphi_2) = \max_{z\in Z} |\mu^t\varphi_1(\lambda^{-t}z) - \mu^t\varphi_2(\lambda^{-t}z)| = \\ &\max_{z\in Z} |\mu^t\varphi_1(z) - \mu^t\varphi_2(z)| = \max_{z\in Z} |\pi^t(\varphi_1(z) - \varphi_2(z))| \le \\ &Ne^{-\nu t} \max_{z\in Z} |\varphi_1(z) - \varphi_2(z)|. \end{aligned} \qquad (2.11.11)$$

Из неравенства (2.11.11) следует, что

$$d(S^t\varphi_1, S^t\varphi_2) \le Ne^{-\nu t} \max_{z\in Z} |\varphi_1(z) - \varphi_2(z)|$$

при всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(Z,W)$ и $t \ge 0$ и, следовательно, при достаточно больших t отображения S^t являются сжатиями. Из сказанного следует, что коммутативная группа $\{S^t : t \in \mathbb{S}_+\}$ отображений имеет единственную общую неподвижную точку $\varphi \in \Gamma(Z,W)$, то есть $(S^t\varphi)(z) = \varphi(z)$ при всех $z \in Z$ и $t \in \mathbb{S}_+$ и, следовательно, $\mu^t\varphi(z) = \varphi(\lambda^t z)$ $(z \in Z,\ t \in \mathbb{T})$. Пусть $w \in W$ и $z = \rho(w)$. Тогда

$$|\mu^t w - \mu^t\varphi(z)| = |\pi^t(w - \varphi(z))| \le Ne^{-\nu t}|w - \varphi(z)|\ . \qquad (2.11.12)$$

Из (2.11.12) следует, что компактное инвариантное множество $J = \varphi(Z) \subset W$ равномерно асимптотически устойчиво в целом и, кроме того, $J_Z = J \cap W_Z = \{\varphi(z)\}$ при всех $z \in Z$. Согласно теореме 2.4.14 динамическая система $\langle (W,\mathbb{T},\mu), (Z,\mathbb{T},\lambda), \varrho\rangle$ конвергентна и, следовательно, компактно диссипативна и $J = \varphi(Z)$ является центром Левинсона $(W,\mathbb{T},\mu)$. Для локальной диссипативности $(W,\mathbb{T},\mu)$ достаточно показать, множество $J = \varphi(Z)$ является равномерно притягивающим. Покажем, что для любого $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\mu^t B(J,\gamma), J) = 0. \qquad (2.11.13)$$

Если допустить, что это неверно, то то существуют ε_0, γ_0, $w_0 \in B(J, \gamma_0)$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(\mu^{t_n} w_n, J) \geq \varepsilon_0. \tag{2.11.14}$$

Из неравенства (2.11.12) и компактности Z следует, что последовательность $\{\mu^{t_n} w_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{w} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mu^{t_n} w_n$, тогда $\overline{w} \in J$. Переходя к пределу в (2.11.14) при $n \to +\infty$, получим $\overline{w} \notin J$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Глава 3

Аналитические диссипативные системы

3.1. Косое произведение динамических систем и коциклы

Пусть $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ ($\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$) подполугруппы группы $\mathbb{S}$. Напомним, что тройка $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$, где $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ – динамическая система на Y, W – полное метрическое пространство и φ – непрерывное отображение $\mathbb{T}_1 \times W \times Y$ в W, удовлетворяющее следующим условиям:

a. $\varphi(0, u, y) = u$ $(u \in W, y \in Y)$;
b. $\varphi(t + \tau, u, y) = \varphi(\tau, \varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$ $(t, \tau \in \mathbb{T}_1,\ u \in W, y \in Y)$

называется [**156**], [**250**] – [**251**] коциклом над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W.

Положим $X := W \times Y$ и определим отображение $\pi : X \times \mathbb{T}_1 \to X$ правилом: $\pi((u, y), t) := (\varphi(t, u, y), \sigma(t, y))$ (то есть $\pi = (\varphi, \sigma)$. Тогда легко проверить, что $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ – динамическая система на X, называемая косым произведением [**1**], [**252**], а $h = pr_2 : X \to Y$ – гомоморфизм $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ и, следовательно, $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ есть неавтономная динамическая система.

Таким образом, если задан коцикл $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над динамической системой $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем W, то по нему естественным образом строится неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2,\ \sigma), h\rangle$ $(X := W \times Y)$, которую назовем неавтономной динамической системой, ассоциированной коциклом $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$.

Пусть Y - компактное метрическое пространство и $W = E^n$. Рассмотрим коцикл $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над динамической системой $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем E^n и порожденную им неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$. Тогда (X, h, Y), где $X := E^n \times Y$, является конечномерным векторным расслоением (тривиальное расслоение со слоем E^n). Функция $V : X \times X \to \mathbb{R}_+$, определенная равенством $V((u_1, y), (u_2, y)) := |u_1 - u_2|$, где $|\cdot|$ – норма в E^n, задает на X риманову метрику. Из теоремы 2.6.8 вытекает следующая

Теорема 3.1.1. *Пусть Y компактно и $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ – коцикл над динамической системой $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем E^n. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Существует положительное число R такое, что*
$$\lim_{t\to+\infty} \sup \|\varphi(t, u, y)\| < R$$
при всех $u \in E^n$ и $y \in Y$.

(2) *Существует положительное число r_1 такое, что для любых $u \in E^n$ и $y \in Y$ найдется $\tau = \tau(u, y) > 0$, для которого $\|\varphi(\tau, u, y)\| < r_1$.*

(3) *Существует положительное число r_2 такое, что*
$$\lim_{t\to+\infty} \inf \|\varphi(t, u, y)\| < r_2$$
при всех $u \in E^n$ и $y \in Y$.

(4) *Существует положительное число R_0 и для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$ такое, что $\|\varphi(t, u, y)\| \le R_0$ при всех $t \ge l(R)$, $u \in E^n$, $\|u\| \le R$, и $y \in Y$.*

С учетом леммы 2.6.7 мы получаем, что каждое из условий 1.-4., фигурирующие в теореме 3.1.1, эквивалентно диссипативности неавтономной динамической системы $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$, ассоциированной коциклом $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma)\rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем E^n.

Приведем примеры косых произведений, играющих важную роль в теории дифференциальных уравнений.

Пример 3.1.2. Пусть E^n – n-мерное вещественное или комплексное евклидово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение
$$u' = f(t, u), \tag{3.1.1}$$

где $f \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$. Наряду с уравнением (3.1.1) рассмотрим и его H-класс **[15]**,**[32]**,**[61]**, **[152]**,**[154]**, т.е. семейство уравнений

$$v' = g(t,v), \tag{3.1.2}$$

где $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ и $f_\tau(t,u) = f(t+\tau, u)$. В дальнейшем будем предполагать, что функция f регулярна, то есть для каждого уравнения (3.1.2) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $\varphi(\cdot, v, g)$ решение уравнения (3.1.2), проходящее через точку $v \in E^n$ при $t = 0$. Тогда $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \to E^n$ и при этом выполнены следующие условия (см., например, **[15]**,**[250]**,**[251]**):

1) $\varphi(0, v, g) = v$ для любых $v \in E^n$ и $g \in H(f)$;
2) $\varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau) = \varphi(t+\tau, v, g)$ для любых $v \in E^n$, $g \in H(f)$ и $t, \tau \in \mathbb{R}_+$;
3) $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times H(f) \to E^n$ непрерывно.

Обозначим через $Y = H(f)$ и $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ - динамическую систему сдвигов (полугрупповую) на Y, индуцированную динамической системой сдвигов $(C(\mathbb{R} \times E^n, E^n), \mathbb{R}, \sigma)$. Тройка $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{R}_+, \sigma)\rangle$ является коциклом над $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ со слоем E^n. Следовательно, уравнение (3.1.1) естественно порождает коцикл $\langle E^n, \varphi, (Y, \mathbb{R}_+, \sigma)\rangle$ и неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h\rangle$, где $X := E^n \times Y$, $\pi = (\varphi, \sigma)$ и $h = pr_2 : X \to Y$.

Напомним, что уравнение (3.1.1) называют диссипативным **[32]**, **[80]**,**[266]**,**[267]**, если каковы бы ни были $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in E^n$ существует единственное решение $x(t; x_0, t_0)$ уравнения (3.1.1), проходящее через точку (x_0, t_0), и существует число $R > 0$ такое, что $\lim_{t\to+\infty} \sup \|x(t; x_0, t_0)\| < R$ при всех $x_0 \in E^n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$. Иными словами, для каждого решения $x(t; x_0, t_0)$ существует такой момент времени $t_1 = t_0 + l(t_0, x_0)$, что $\|x(t; x_0, t_0)\| < R$ при всех $t \geq t_1$. Если при этом число $l(t_0, x_0)$ можно выбрать не зависящим от t_0, то говорят **[32]**, что уравнение (3.1.1) равномерно диссипативно.

Ниже мы установим связь между диссипативностью уравнения (3.1.1) и диссипативностью неавтономной динамической системы, порождаемой уравнением (3.1.1).

Лемма 3.1.3. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ регулярна и $H(f)$ компактно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Уравнение (3.1.1) равномерно диссипативно, то есть существуют такие $R > 0$ и $l(x_0) > 0$, что*

$$\|x(t; x_0, t_0)\| < R \quad (t \geq t_0 + l(x_0),\, x_0 \in E^n). \tag{3.1.3}$$

(2) *Существует положительное число r такое, что*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \|\varphi(t, x_0, g)\| < r \quad (x_0 \in E^n,\, g \in H(f)). \tag{3.1.4}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in E^n$ и $g \in H(f)$. Если $g = f_\tau$ при некотором $\tau \in \mathbb{R}$, то

$$\varphi(t, x_0, f_\tau) = x(t + \tau, x_0, \tau) \tag{3.1.5}$$

и неравенство (3.1.4) следует из (3.1.3). Для этого достаточно взять $r > R$.

Рассмотрим случай, когда $g = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{\tau_k}$ и $\tau_k \to +\infty$ (или $-\infty$). Согласно теореме 3.2 из **[95]** последовательность $\{\varphi(t, x_0, f_{\tau_k})\}$ сходится к некоторому решению уравнения (3.1.2) и это решение проходит через точку $(x_0, 0) \in E^n \times \mathbb{R}$. Заметим, что решение, проходящее через точку $(x_0, 0)$ единственно, так как f регулярна. Итак, $\varphi(t, x_0, g) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(t, x_0, f_{\tau_k})$ равномерно по t на компактах из $\mathbb{R}$. Из (3.1.3) и (3.1.5) следует, что $\|\varphi(t, x_0, g)\| = \lim\limits_{k\to+\infty} \|\varphi(t, x_0, f_{\tau_k})\| \leq R$ $(t \geq l(x_0))$ и, следовательно, имеет место (3.1.4).

Обратно, пусть выполнено неравенство (3.1.4). Тогда неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.1), диссипативна и согласно теореме 3.1.1 (условие 4.) существует $R_0 > 0$ такое, что для любого $x_0 \in E^n$ найдется $l(x_0) = l(\|x_0\|) > 0$, для которого

$$\|\varphi(t, x_0, g) \leq R_0 \tag{3.1.6}$$

при всех $t \geq l(x_0)$ и $g \in H(f)$. Заметим, что

$$x(t; x_0, t_0) = \varphi(t - t_0, x_0, f_{t_o}), \tag{3.1.7}$$

и с учетом (3.1.6) получаем (3.1.3), для этого достаточно взять $R > R_0$. Лемма доказана.

Итак, для уравнения (3.1.1) (f регулярно и $H(f)$ компактно) мы установили, что оно равномерно диссипативно тогда и только тогда, когда является диссипативной порожденная ею неавтономная динамическая система.

Следует заметить, что понятия диссипативности и равномерной диссипативности для уравнения (3.1.1) с периодической правой частью совпадают, однако уже для почти периодических уравнений они различны. Сказанное подтверждается следующим примером.

Пример 3.1.4. Рассмотрим линейное скалярное уравнение

$$x' = a(t)x, \tag{3.1.8}$$

где $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – почти периодическая функция такая, что все решения уравнения (3.1.8) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, но нулевое решение уравнения (3.1.8) не является равномерно устойчивым. Уравнения вида (3.1.8) с указанными свойствами существуют (см. [**185**]). Очевидно, наряду с уравнением (3.1.8) этим свойстом обладает и любой сдвиг уравнения (3.1.8), то есть равнение вида

$$x' = a_\tau(t)x,$$

где $a_\tau(t) = a(t+\tau)$ $(t, \tau \in \mathbb{R})$. Поэтому из соотношения (3.1.7) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t; x_0, t_0)| = 0$ $(x(t; x_0, t_0)$ – решение уравнения (3.1.8), проходящее через точку (x_0, t_0)), то есть уравнение (3.1.8) диссипативно.

Покажем, что уравнение (3.1.8) не является равномерно диссипативным. Действительно, если допустить противное, то согласно лемме 3.1.3 будет диссипативной неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.8). Согласно теореме 2.11.3 нулевое решение уравнения (3.1.8) равномерно асимптотически устойчиво, что противоречит выбору функции a. Нужный пример построен.

С учетом сказанного, всюду в этой работе под диссипативностью уравнения (3.1.1) мы будем понимать диссипативность неавтономной динамической системы, порожденной уравнением (3.1.1).

Важным классом диссипативных уравнений вида (3.1.1) являются уравнения с конвергенцией [**32**], [**79**].

Говорят, что уравнение (3.1.1) обладает свойством конвергенции, если оно имеет единственное, ограниченное на $\mathbb{R}$ равномерно асимптотически устойчивое в целом решение. При этом это единственное ограниченное решение называется предельным режимом уравнения (3.1.1).

Из результатов работ [**157**],[**250**],[**251**] следует, что, если уравнение (3.1.1) обладает свойством конвергенции, то и каждое уравнение семейства (3.1.2) обладает этим свойством и, следовательно, неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.1.1), конвергентна. В тоже время легко построить примеры неконвергентных уравнений вида (3.1.1), порождающих неавтономные динамические системы, которые обладают свойством конвергенции в смысле определения, принятого в параграфе 2.4 настоящей работы. Дело здесь в том, что уравнение (3.1.1) может иметь предельный режим, который не является решением этого уравнения. Однако, если правая часть уравнения (3.1.1) устойчива по Пуассону в положительном направлении, то отмеченное обстоятельство не имеет места, то есть в этом случае уравнение (3.1.1) обладает свойством конвергенции тогда и только тогда, когда соответствующая уравнению (3.1.1) неавтономная динамическая система конвергентна.

Под конвергентностью уравнения (3.1.1) мы в дальнейшем будем понимать конвергентность неавтономной динамической системы, порожденной уравнением (3.1.1).

Пример 3.1.5. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' = & F(y,u) \\ y' = & G(y), \end{cases} \tag{3.1.9}$$

где $Y \subseteq E^m, G \in C(Y, E^n)$ и $F \in C(Y \times E^n, E^n)$. Будем предполагать, что для системы (3.1.9) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ динамическую систему на Y, порожденную вторым уравнением системы (3.1.9) и $\varphi(t,u,y)$ – решение уравнения

$$u' = F(\sigma(t,y),u) \tag{3.1.10}$$

проходящее через точку $u \in E^n$ при $t = 0$. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times E^n \times Y \to E^n$ удовлетворяет условиям 1) и 2) из примера 3.1.2 и, следовательно, система (3.1.9) естественным образом порождает неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$ (где $X := E^n \times Y$, $\pi = (\varphi, \sigma)$ и $h = pr_2 : X \to Y$).

Приведем некоторые обобщения системы (3.1.9). А именно, пусть $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ – динамическая система на метрическом пространстве Y. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u' = & F(\sigma(y,t), u) \\ y \in & Y, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

где $F \in C(Y \times E^n, E^n)$. Так же как и выше будем предполагать, что для уравнения (3.1.10) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости на $\mathbb{R}_+$. Система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \rangle$, где $X := E^n \times Y$, $\pi = (\varphi, \sigma)$, $\varphi(\cdot, x, y)$ – решение уравнения (3.1.10) и $h = pr_2 : X \to Y$, является неавтономной динамической системой, индуцированной уравнением (3.1.11).

3.2. $\mathbb{C}$ -аналитические системы

Будем говорить, что неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ $\mathbb{C}$-аналитична, если выполнены следующие условия:

a. $X := \mathbb{C}^n \times Y$ и $\pi((z,y),t) := (\varphi(t,z,y), \sigma(t,y))$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $(z,y) \in \mathbb{C}^n \times Y$ т.е. неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ порожденная коциклом $\langle \mathbb{C}^n, \varphi, (Y, \mathbb{T}_2, \sigma) \rangle$ над $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ со слоем $\mathbb{C}^n$;
b. при каждом $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_1$ отображение $U(t,y) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ($U(t,y) := \varphi(t, \cdot, y)$) голоморфно.

Из приведенных выше результатов следует, что в случае компактности Y все три типа диссипативности для $\mathbb{C}$-аналитических систем эквивалентны. Кроме того, $\mathbb{C}$-аналитическая система диссипативна тогда и только тогда, когда существует положительное число r (не зависящие ни от z ни от y) такое, что $\varlimsup\limits_{t \to +\infty} \|\varphi(t,z,y)\| \leq r$.

Установим одно важное свойство $\mathbb{C}$-аналитических диссипативных систем.

Теорема 3.2.1. *Если Y компактно, то $\mathbb{C}$-аналитическая диссипативная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ равномерно устойчива в положительном направлении на компактах из $\mathbb{C}^n$, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ такое, что $\|z_1 - z_2\| < \delta$ ($\|z_1\|, \|z_2\| \le r$) влечет $\|U(t, y)(z_1) - U(t, y)(z_2)\| \le \varepsilon$ при всех $y \in Y$ и $t \in \mathbb{T}_+$.*

Доказательство. Покажем, что каково бы ни было $a > 0$ существует компакт $K_a \subset \mathbb{C}^n$ такой, что $U(t, y)(B[0, a]) \subseteq K_a$ при всех $t \ge 0$ и $y \in Y$. Действительно, согласно теореме 3.1.1 существует $b > 0$ такое, что для любого $a > 0$ найдется число $l_a \ge 0$, обладающее следующим свойством: $U(t, y)B[0, a] \subseteq B[0, b]$ при всех $t \ge l_a$ и $y \in Y$. Множество $K_a = \varphi([0, l_a], B[0, a], Y) \cup B[0, b]$ является искомым.

Пусть $r > 0$. По доказанному выше семейство голоморфных отображений $\{U(t, y)\}$ пространства C^n в себя равномерно (по $t \ge 0$ и $y \in Y$) ограничено на шаре $B[0, r]$ и из обобщенной теоремы Витали [**21**] следует, что это семейство функций внутри шара $B[0, r]$ равностепенно непрерывно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, r) > 0$ такое, что $\|U(t, y)(z_1) - U(t, y)(z_2)\| < \varepsilon$ при всех $(t, y) \in \mathbb{T}_+ \times Y$, как только $\|z_1 - z_2\| < \delta$ ($\|z_1\|, \|z_2\| < r$). Теорема доказана.

Теорема 3.2.2. *Всякая $\mathbb{C}$ - аналитическая неавтономная диссипативная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$, у которой Y есть компактное минимальное множество, обладает следующим свойствами:*

(1) *при любом $y \in Y$ множество $J_y := J \cap X_y$ ($X_y := h^{-1}(y)$) состоит из единственной точки x_y, где J центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*
(2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $\rho(x, x_y) < \delta$ ($x \in X_y$) следует $\rho(xt, x_{yt}) < \varepsilon$ при всех $t \ge 0$.*
(3) *$\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, x_{h(x)t}) = 0$ при всех $x \in X$, причем это равенство имеет место равномерно по x на компактах из X.*

Доказательство. Так как Y компактно, то, в силу сделанного ранее замечания, неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ компактно диссипативна и по теореме 3.2.1 она равномерно положительно устойчива на компактах из X. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.2.5 и применяя ее в данном случае, получаем утверждения 2. и 3.. Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости утверждения 1..

Пусть $y \in Y$. Согласно теореме 2.2.5 множество J_y связно, поскольку таковыми являются $X_y := \mathbb{C}^n \times \{y\}$ $(y \in Y)$. При доказательстве теоремы 2.2.5 мы установили, что полугруппа $\mathcal{P}_y$ содержит некоторый идемпотент u такой, что $J_y = u(X_y)$. Кроме того, существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $u = \lim\limits_{k\to+\infty} \pi^{t_k}$. Пусть $x \in X_y$, т.е. $x := (z, y)$ $(z \in \mathbb{C}^n)$. Тогда $u(x) = u(z, y) = (\xi_y(z), y)$, где $\xi_y(z) := \lim\limits_{k\to+\infty} U(t_k, y)(z)$. Последнее равенство имеет место равномерно на компактах из $\mathbb{C}^n$. Отображения $U(t_k, y) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $(k = 1, 2, \dots)$ голоморфны, поэтому таковым является и их предел ξ_y. Так как $u(X_y) = J_y$ и $X_y := \mathbb{C}^n \times \{y\}$, то $\xi_y(\mathbb{C}^n)$ компактно, и согласно теореме Лиувилля **[144]** отображение ξ_y постоянно. Отсюда следует, что множество J_y состоит ровно из одной точки x_y. Теорема доказана.

Следствие 3.2.3. *Если Y компактно и минимально, то $\mathbb{C}$-аналитическая диссипативная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна.*

Следствие 3.2.4. *В условиях теоремы 3.2.2 Y рекуррентна (почти периодична, система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ индуцирует на центре Левинсона J системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ динамическую систему $(J, \mathbb{T}_2, \widehat{\pi})$ изоморфную $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$. В частности, если точка y пространства перодична), то рекуррентной (соответственно почти периодической, периодической) является также и точка x_y $(J_y = \{x_y\})$.*

Доказательство. Сформулирование утверждение вытекает из теоремы 3.2.2 (см. также следствие 3.2.3). С учетом того, что отображение $p : Y \to J$, определенное равенством $p(y) := x_y$ ($J_y = \{x_y\}$) является гомоморфизмом $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ на $(J, \mathbb{T}_2, \widehat{\pi})$.

Доказанные в этом параграфе утверждения позволяют изучать диссипативные дифференциальные уравнения, правые части которых рекуррентны по времени и голоморфны по пространственной переменной. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, приведем следующий

Пример 3.2.5. Обозначим через $\mathcal{A}(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ множество всех непрерывных по $t \in \mathbb{R}$ и голоморфных по $z \in \mathbb{C}^n$ функции $f : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$. Рассмотрим уравнение (3.1.1) с правой частью f из $\mathcal{A}(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Наряду с уравнением (3.1.1) рассмотрим его H - класс, т.е. семейство уравнений

$$\dot{z} = g(t, z) \qquad (g \in H(f)), \tag{3.2.1}$$

где $H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$, $f_\tau(t, z) = f(t+\tau, z)$ и чертой обозначено замыкание в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Обозначим через $\varphi(\cdot, z, g)$ решение уравнения (3.2.1), проходящее через точку z при $t = 0$ и определенное на $\mathbb{R}_+$.

Отметим следующие свойства функции $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^n \times H(f) \to \mathbb{C}^n$

a. $\varphi(0, z, g) = z \quad (z \in \mathbb{C}^n, \quad g \in H(f))$;
b. $\varphi(\tau, \varphi(t, z, g), g_t) = \varphi(t+\tau, z, g) \quad (\tau \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}^n$ и $g \in H(f))$;
c. отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^n \times H(f) \to \mathbb{C}^n$ непрерывно, а при фиксированных $t \in \mathbb{R}_+$ и $g \in H(f)$ отображение $U(t, g) := \varphi(t, \cdot, g) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ голоморфно [**51**].

Обозначим через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ ($Y := H(f)$) динамическую систему сдвигов на $H(f)$ и определим на $X := \mathbb{C}^n \times Y$ полугрупповую динамическую систему $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ по следующему правилу: $\pi^\tau(z, g) := (\varphi(\tau, z, g), g_\tau)$. Положим $h := pr_2 : X \to Y$ (h является гомоморфизмом $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$). Таким образом, уравнение (3.2.1) порождает неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$. Из свойства c. функции φ следует, что построенная выше неавтономная система является $\mathbb{C}$-аналитической и, применяя к ней теорему 3.2.2, получим следующий результат.

Теорема 3.2.6. *Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ аналитична по $z \in \mathbb{C}^n$ и непрерывна по $t \in \mathbb{R}$. Если f рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по z на компактах из $\mathbb{C}^n$ (в частности, почти периодична или периодична), то из диссипативности уравнения (3.2.1) следует его конвергентность, т.е. уравнение (3.2.1) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, являющееся равномерно асимптотически устойчивым в целом. Кроме того, решение p рекуррентно (почти периодично или периодично), если таковой является функция f.*

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно следует из теоремы 3.2.2 и следствий 3.2.3 и 3.2.4. При этом следует иметь ввиду, что рекуррентность функции f эквивалентна компактности и минимальности множества $H(f)$ относительно динамческой системы сдвигов на $H(f)$.

Следствие 3.2.7. *Отметим, что имеет место и "локальный"вариант теоремы 3.2.2 (а, следовательно, и теоремы 3.2.6), т.е. она остается справедливой, если всюду $\mathbb{C}^n$ заменить на некоторую область $W \subseteq \mathbb{C}^n$ (область W может быть как ограниченной, так и неограниченной и, в частности, может совпадать с $\mathbb{C}^n$). Из сказанного и теоремы 3.2.6 (см. также следствие 3.2.4) следует, что, если на W функция f голоморфна, то автономное уравнение $\dot{z} = f(z)$ не может иметь предельных циклов в области $W \subseteq \mathbb{C}$.*

Неавтономную систему $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ назовем $\mathbb{C}$-аналитической на множестве $M \subseteq X$, если M инвариантно и система $\langle (M, \mathbb{T}_1, \pi), (\widetilde{Y}, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ $\mathbb{C}$-аналитична, где $\widetilde{Y} := h(M)$, а $(M, \mathbb{T}_1, \pi)$ - сужение $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ на M (аналогично определяется $(\widetilde{Y}, \mathbb{T}_2, \pi)$).

Теорема 3.2.8. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и ее центр Левинсона J_Y является минимальном множеством;*
(2) *система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ компактно диссипативна и J_X - ее центр Левинсона;*
(3) *система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ $\mathbb{C}$-аналитична на J_X. Тогда каково бы ни было $y \in J_Y$ множество $J_X \cap X_y$*

состоит ровно из одной точки и, следовательно, система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна.

Доказательство. Так как J_X непусто, компактно и J_Y минимально, то $h(J_X) = J_Y$. Из $\mathbb{C}$-аналитичности $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ на J_Y следует, согласно теореме 3.2.2, что $J_X \cap X_y$ состоит ровно из одной точки, каково бы ни было $y \in J_Y$. Таким образом неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна.

Следствие 3.2.9. *Пусть для некоторого $y_0 \in Y$ $H^+(y_0) = Y$ компактно и ω_{y_0} минимально. Если выполнены условия 2. и 3. теоремы 3.2.8, то система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.2.6. Действительно, в условиях следствия 3.2.9 система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ компактно диссипативна и $J_Y = \omega_{y_0}$.

Следствие 3.2.10. *Пусть точка y_0 асимптотически рекуррентна (т.е. существует рекуррентная точка $q_0 \in Y$ такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(y_0 t, q_0 t) = 0$). Если $Y := H^+(y_0)$ компактно и выполнены условия теоремы 3.2.8, то система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна и любая точка $x \in X$ асимптотически рекуррентна.*

Доказательство. Первое утверждение следствия вытекает из теоремы 3.2.8 и следствия 3.2.9. Пусть теперь $x \in X_y$ и $y \in Y = H^+(y_0)$. В силу асимптотической рекуррентности y_0 точка y также асимптотически рекуррентна, т.е. существует рекуррентная точка $q \in \omega_{y_0}$ такая, что $\rho(yt, qt) \to 0$ при $t \to +\infty$. Так как $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ конвергентна, то $J_X \cap X_q$ состоит из единственной точки p. Поскольку в наших условиях $\rho(xt, pt) \to 0$ при $t \to +\infty$, то точка x асимптотически рекуррентна.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{z} = f(t, z) + r(t, z) \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{3.2.2}$$

Непосредственно из теоремы 3.2.8 и следствия 3.2.10 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2.11. *Пусть $f, r \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ и выполнены следующие условия:*

(1) *уравнение (3.2.2) диссипативно;*
(2) $\lim\limits_{t \to +\infty} \|r(t,z)\| = 0$ *равномерно по z на компактах из $\mathbb{C}^n$;*
(3) *f голоморфна по $z \in \mathbb{C}^n$ и рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по z на компактах из $\mathbb{C}^n$.*

Тогда уравнение

$$\dot{z} = f(t,z) \tag{3.2.3}$$

имеет единственное ограниченно на $\mathbb{R}$ равномерно согласованное решение $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ такое, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \|\varphi(t) - p(t)\| = 0$, каково бы ни было решение φ уравнения (3.2.2).

В заключении этого параграфа приведем следующий

Пример 3.2.12. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + z_2^2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases} \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}). \tag{3.2.4}$$

Определяемая ею динамическая система $\mathbb{C}$-аналитична и диссипативна. Кроме того, из [**4**, с.167-174] следует, что систему (3.2.4) никаким биголоморфным преобразованием нельзя линеаризовать.

Таким образом, существуют нелинейные $\mathbb{C}$-аналитические диссипативные системы, которые нельзя линеаризировать биголоморфным преобразованием.

Замечание 3.2.13. *Приведенные выше результаты не имеют места для вещественно-аналитических систем. Сказанное подтверждается следующим примером.*

Пример 3.2.14. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x^2 - y^2)x \\ \acute{y} = (1 - x^2 - y^2)y \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Непосредственным интегрированием можно убедится, что система (3.2.5) диссипативна и ее центр Левинсона $J = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ содержит континуум точек. Таким образом, аналог теоремы 3.2.2 для вещественно-аналитических систем не имеет места.

3.3. Обращение теоремы Ляпунова для $\mathbb{C}$-аналитических систем

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z), \tag{3.3.1}$$

где $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ и $f(t, 0) = 0$. Наряду с уравнением (3.3.1) рассмотрим уравнение в вариациях для нулевого решения уравнеия (3.3.1)

$$\frac{du}{dt} = A(t)u, \tag{3.3.2}$$

в котором $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, 0)$. Обозначим через $z(t; t_0, v)$ решение уравнения (3.3.1) проходящее через $v \in \mathbb{C}^n$ при $t = t_0$.

Напомним (см., например, [**83**]), что решение $z = 0$ уравнения (3.3.1) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всех $z \in B(0, \delta) = \{w | \ \|w\| < \delta\}$ и $t \geq t_0$ имеет место неравенство $\|z(t; t_0, v)\| \leq \varepsilon$. Если удается выбрать $\delta(\varepsilon, t_0)$, не зависящим от $t_0 \in \mathbb{R}$, то решение $z = 0$ называется равномерно устойчивым.

Решение $z = 0$ уравнения (3.3.1) называется притягивающим, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется $\eta = \eta(t_0) > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $\|v\| < \eta$ найдется $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, v) > 0$ такое, что $\|z(t; t_0, v)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$. Если удается выбрать η, не зависящим от t_0 и σ, зависящим только от ε, то решение $z = 0$ называется равномерно притягивающим.

Решение $z = 0$ называется асимптотически устойчивым (равномерно асимптотически устойчивым), если оно устойчиво (равномерно устойчиво) и является притягивающим (равномерно притягивающим).

Теорема 3.3.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *если нулевое решение уравнения (3.3.1) устойчиво (равномерно устойчиво), то устойчиво (равномерно устойчиво) и нулевое решение уравнения (3.3.2);*

(2) *если нулевое решение уравнения (3.3.1) является притягивающим (равномерно притягивающим), то таковым является и нулевое решение уравнения (3.3.2).*

Доказательство. Пусть решение $z = 0$ уравнения (3.3.1) устойчиво (равномерно устойчиво), $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$) - положительное число из условия устойчивости

(равномерной устойчивости) нулевого решения уравнения (3.3.1). По теореме об аналитической зависимости от начальных данных **[51]** функция $z(t; t_0, v)$ при фиксированных t и t_0 голоморфна по v в области определения функции $z(t; t_0, v)$. Согласно формуле вариации постоянных имеем

$$z(t; t_0, v) = U(t, t_0)v + \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)F(\tau, z(\tau; t_0, v))d\tau, \qquad (3.3.3)$$

где $U(t, \tau) = U(t, A)U^{-1}(\tau, A)$, $U(t, A)$ - оператор Коши уравнения (3.3.2) и $F(t, z) = f(t, z) - A(t)z$.

Заметим, что $z(t; t_0, v) = v + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau; t_0, v))d\tau$ и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial v}(t; t_0, v)\bigg|_{v=0} = E + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial z}(\tau, z(\tau; t_0, v))\bigg|_{v=0} \frac{\partial z}{\partial v}(\tau; t_0, v)\bigg|_{v=0} d\tau$$

(E - единичная матрица). Таким образом, $V(t, t_0) = U(t, t_0)$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\int_{t_0}^{t} U(t, \tau)F(\tau, z(\tau; t_0, v))d\tau\right]_{v=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)\left[\frac{\partial F}{\partial z}(\tau, z(\tau; t_0, v)) \cdot \frac{\partial z}{\partial v}(\tau; t_0, v)\right]_{v=0} d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} U(t, \tau)\frac{\partial F}{\partial z}(\tau, 0) \cdot U(\tau, t_0)d\tau = 0,$$

то линейная часть тейлоровского разложения по v функции $z(t;t_0,v)$ при любых $(t,t_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ есть $U(t;t_0)v$. С другой стороны, эта линейная часть может быть вычислена по интегральной формуле Коши [**48**]. Если в $\mathbb{C}^n$ выбрана l_∞-норма, то область $B(0,\delta)$ представляет собой открытый полидиск, и можно записать

$$U(t,t_0)w = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|v_1|=\frac{\delta}{2}} \cdot \ldots \cdot \int\limits_{|v_n|=\frac{\delta}{2}} \frac{z(t;t_0,v)}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{v_k} dv_1 \cdot \ldots \cdot dv_n. \tag{3.3.4}$$

Из формулы (3.3.4) вытекает устойчивость (равномерная устойчивость) нулевого решения уравнения (3.3.2), если таковым является нулевое решение уравнения (3.3.1).

Если нулевое решение уравнения (3.3.1) является притягивающим (равномерно притягивающим), то переходя к пределу в равенстве (3.3.4) и учитывая теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла при $t \to +\infty$, получаем аналогичное свойство для нулевого решения уравнения (3.3.2). Теорема доказана.

Следствие 3.3.2. *Если нулевое решение уравнения (3.3.1) асимптотически устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво), то таковым является и нулевое решение уравнения (3.3.2).*

Замечание 3.3.3. *1. В случае, когда уравнение (3.3.1) автономно, теорема 3.3.1 совпадает с результатом Ю.И. Любича*[**63**].

2. В случае вещественно-аналитической системы утверждение, аналогичное теореме 3.3.1, не имеет места, что подтверждается примером: $\dot{y} = -y^3$.

3. Теорема 3.3.1 имеет место и для разностных уравнений.

Наряду с уравнением (3.3.1) рассмотрим и его H-класс

$$\frac{dz}{dt} = g(t,z) \qquad (g \in H(f)). \tag{3.3.5}$$

Положим $\Theta := \{(0,g)|g \in H(f)\} \subseteq \mathbb{C}^n \times H(f)$ и $W^s(\Theta) := \{(v,g)|(v,g) \in \mathbb{C}^n \times H(f), \lim\limits_{t\to+\infty} \|\varphi(t,v,g)\| = 0\}$. Пусть $\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y, \mathbb{R},\sigma),h\rangle$ неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (3.3.1) (см. пример 3.1.2). Если нулевое решение уравнения (3.3.1) равномерно асимптотически устойчиво и $H(f)$ - компактно, то компактное инвариантное множество $\Theta \subseteq X = \mathbb{C}^n \times H(f)$ асимптотически устойчиво и его область притяжения $W^s(\Theta)$ открыта. Имеет место следующая

Теорема 3.3.4. *Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, $H(f)$ компактно и нулевое решение уравнения (3.3.1) равномерно асимптотически устойчиво, тогда множество $W^s(\Theta)$ неограничено.*

Доказательство. Допустим, напротив, что $W^s(\Theta)$ ограничено, тогда $M = \overline{W^s(\Theta)} \subseteq X$ является компактным инвариантным подмножеством $(X,\mathbb{R}_+,\pi)$. Согласно теореме 3.3.1 нулевое решение уравнения (3.3.2) равномерно асимптотически устойчиво и, следовательно, найдутся положительные числа $\mathcal{N}$ и ν такие, что

$$\|U(t,t_0)\| \le \mathcal{N}e^{-\nu(t-t_0)} \tag{3.3.6}$$

при всех $t \ge t_0$ $(t,t_0 \in \mathbb{R})$. Из (3.3.6) следует, что

$$\|U(t,A)\| \ge \mathcal{N}^{-1}\cdot e^{-\nu t} \tag{3.3.7}$$

при всех $t \le 0$.

С другой стороны, из равенства (3.3.4) и ограниченности $W^s(\Theta)$ следует, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|U(t,A)\| < +\infty, \tag{3.3.8}$$

что противоречит неравенству (3.3.7). Полученное противоречие показывает, что наше допущение об ограничености $W^s(\Theta)$ не имеет места. Теорема доказана.

Следствие 3.3.5. *Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, $H(f)$ компактно и нулевое решение уравнения (3.3.1) равномерно асимптотически устойчиво, тогда множество $W^s_f(0) = \{v \mid v \in \mathbb{C}^n, \lim\limits_{t\to+\infty} \|\varphi(t,v,f)\| = 0\}$ неограничено.*

Пусть Ω - метрическое пространство и $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ - динамическая система на Ω. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(\omega t, x) \tag{3.3.9}$$

где $\omega t := \sigma(t, \omega), f \in \mathcal{A}(\Omega \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, $x \in \mathbb{C}^n$ и $f(\omega, 0) = 0$ при всех $\omega \in \Omega$. Приведенные выше результаты имеют место и для уравнений вида (3.3.9). Сформулируем некоторые из них.

Теорема 3.3.6. *Если нулевое решение уравнения (3.3.9) равномерно асимптотически устойчиво, то таковым является и нулевое решение уравнения*

$$\dot{y} = A(\omega t) y, \tag{3.3.10}$$

где $A(\omega) := \left.\dfrac{\partial f(\omega, x)}{\partial x}\right|_{x=0}$

Теорема 3.3.7. *Пусть нулевое решение уравнения (3.3.9) равномерно асимптотически устойчиво и Ω компактно, тогда*

$$W^s(\Theta) = \{(x, \omega) \in \mathbb{C}^n \times \Omega | \lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, x, \omega)| = 0\}$$

неограничено, где $\varphi(t, x, \omega)$ - решение уравнения (3.3.9) выходящее из точки $x \in \mathbb{C}^n$ при $t = 0$ и определенное на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Сформулированные утверждения доказываются также как и теоремы 3.3.1 и 3.3.4.

3.4. О структуре притягивающих множеств $\mathbb{C}$-аналитических систем

В этом параграфе мы дачм описание структуры равномерно асимптотически устойчивого компактного инвариантного множества $\mathbb{C}$–аналитической неавтономной динамической системы с компактной минимальной базой.

Напомним, что множество $K \subseteq X$ называют орбитально устойчивым относительно неавтономной системы (2.1.1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, K_y) < \delta$ $(x \in X, y = h(x))$ влечет $\rho(xt, K_{yt}) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Если при этом, существует $\gamma > 0$ такое, что $\rho(xt, K_{yt}) \to 0$ при $t \to$

$+\infty$ для всех $x \in K_y$ таких, что $\rho(x, K_y) \le \gamma$, то говорят, что K орбитально асимптотически устойчиво.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ - $\mathbb{C}$-*аналитическая динамическая система и выполнены следующие условия:*

(1) *Y компактно, локально связно и $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ минимальна, т.е. $Y = H(y) = \overline{\{yt \mid t \in \mathbb{S}\}}$ при всех $y \in Y$;*

(2) *$M \subset X$ - непустое компактное инвариантное множество;*

(3) *M орбитально асимптотически устойчиво.*

Тогда $\langle (M, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ есть конечнократное дистальное покрытие, т.е.

(a) *для любого $y \in Y$ множество $M_y = \{m \mid m \in M,\ h(m) = y\}$ состоит из конечного числа точек;*

(b) *$\inf\limits_{t \in S} \rho(x_1 t, x_2 t) > 0$ каковы бы ни были $x_1, x_2 \in M$ $(x_1 \neq x_2,\ h(x_1) = h(x_2))$.*

Доказательство. Так как в условиях теоремы расслоение (X, h, Y) локально тривиально и, следовательно, пространство X локально связано. Поэтому, согласно теореме 1.18 [**17**] множество M имеет конечное число компонент связности $M_1, M_2, \dots, M_p$. Положим

$$W^s_y(M) := \{x \mid x \in X_y = h^{-1}(y),\ \lim_{t \to +\infty} \rho(xt, M_{yt}) = 0\}$$

и заметим, что $W^s_y(M)$ открыто в X_y. Согласно теореме 1.11.2 для любого компакта $K \subset W^s(M) := \cup\{W^s_y(M) \mid y \in Y\}$ множество $\Sigma^+(K) := \cup\{\pi^t K \mid t \ge 0\}$ относительно компактно. Для $K \in C(X)$, положим $K_i = W^s(M_i) \cap K$ и заметим, что множества K_i $(i \in \overline{1,p})$ замкнуты, $K_i \cap K_j = \emptyset$, если $i \neq j$, и $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots K_p$. Пусть $\gamma > 0$ $(\gamma < \alpha = \min\limits_{i \neq j} \rho(K_i, K_j))$ и $l > 0$ таковы, что $\overline{B(M, \gamma)},\ \overline{B(K, \gamma)} \subset W^s(M)$ и $|xt| \le l$ при всех $t \ge 0$ и $x \in \overline{B(K, \gamma)}$. Согласно интегральной формуле Коши [**21**] найдчтся число $L = L(l, \gamma) > 0$ такое, что

$$\rho(\pi^t x_1,\, \pi^t x_2) \le L \rho(x_1, x_2) \tag{3.4.1}$$

при всех $t \ge 0$ и $x_1, x_2 \in K_i$ $(i \in \{1, 2, \dots, p\},\ h(x_1) = h(x_2))$. Покажем теперь, что для любых $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subset W^s(M)$

существует $\delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \delta \quad (x_1, x_2 \in K,\ h(x_1) = h(x_2))$ влеччт

$$\rho(x_1 t, x_2 t) < \varepsilon \tag{3.4.2}$$

при всех $t \geq 0$. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0,\ \delta_n \downarrow 0,\ K_0 \subset W^s(M),\ \{x_n^i\} \subset K_0 \quad (i = 1, 2;\ h(x_n^1) = h(x_n^2))$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$\rho(x_n^1, x_n^2) < \delta_n \quad \text{и} \quad \rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \geq \varepsilon_0. \tag{3.4.3}$$

В силу компактности K_0 последовательности $\{x_n^i\}$ $(i = 1, 2)$ можно считать сходящимися. Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^1 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^2$ и $x_0 \in K_{y_0} := K \cap X_{y_0}$. Так как $W^s_{y_0}(M) = \bigcup\limits_{i=1}^{p} W^s_{y_0}(M_i)$, то существует $i_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ такое, что $x_0 \in W^s_{y_0}(M_{i_0})$. В силу открытости $W^s_{y_0}(M_{i_0})$ в X_y, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $B_{y_0}(x_0, \delta_0) = \{x \,|\, x \in X_{y_0},\ \rho(x, x_0) < \delta_0\} \subset W^s_{y_0}(M_{i_0})$. При достаточно больших n имеем $\rho(x_n^1, x_n^2) < \frac{\varepsilon_0}{2L}$. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\{x_n^i\} \subset K_{i_0}$ $(i = 1, 2)$ и согласно (3.4.1)

$$\rho(x_n^1 t_n, x_n^2 t_n) \leq L\rho(x_n^1, x_n^2) < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{3.4.4}$$

Однако, (3.4.4) противоречит (3.4.3). Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Теперь докажем первое утверждение теоремы. Для этого заметим, что из неравенства (3.4.1) следует дистальность относительно h в отрицательном направлении инвариантного множества M. В силу минимальности Y из леммы 2.2.4 [**15**] (см. также лемму 1 [**61**, с.104]) следует двусторонняя дистальность множества M.

Пусть $\alpha > 0, y \in Y$. Положим $E_y^\alpha := \overline{\{\pi^t|_{W^s_y(M)} \,|\, t \geq \alpha\}}$, где чертой обозначено замыкание в открыто-компактной топологии, и $P_y := \{\xi \,|\, \xi \in E_y^\alpha,\ \xi(W^s_y(M)) \subseteq W^s_y(M)\}$. Так же как и в лемме 2.2.3, устанавливается, что P_y есть непустая компактная топологическая полугруппа. Согласно лемме 4.11 [**15**] в P_y существует идемпотент $u \in P_y$, т.е. $u^2 = u$. Так как $u \in P_y \subseteq E_y^\alpha$ и Y минимально, то существует $t_n \to +\infty$ такая, что $u = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^{t_n}|_{W^s_y(M)}$ и, следовательно $u(W^s_y(M)) \subseteq M_y$.

На самом деле, имеет место равенство $M_y = u(W^s_y(M))$, так как в силу двусторонней дистальности M идемпотент u на M_y действует, как тождественное отображение. Пусть теперь $x \in W^s_y(M)$ и $p = u(x) \in M_y$. Покажем, что

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(xt, pt) = 0. \tag{3.4.5}$$

Действительно, так как $u(p) = u(u(x)) = u(x)$, то $\rho(xt_n, pt_n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$, $K = H^+(x) = \overline{\{xt \mid t \geq 0\}}$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ таково, что выполнено (3.4.2), если $\rho(x_1, x_2) < \delta$ $(x_1, , x_2 \in K$ и $h(x_1) = h(x_2))$. Выберем n_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\rho(xt_n, pt_n) < \delta$ при всех $n \geq n_0$ и, следовательно,

$$\rho(x(t_n + t), p(t_n + t)) < \varepsilon$$

при всех $t \geq 0$ и, следовательно, имеет место (3.4.5).

Рассмотрим открытое покрытие $\{B(p,\gamma) \mid p \in M_y\}$ множества M_y. В силу компактности M_y из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $\{B(p_i,\gamma) | \ i = \overline{1,m}\}$. Заметим, что $u(B(p_i,\gamma)) \subseteq M_y$ и $p_i \in u(B(p_i,\gamma))$. Так как $M_y \subseteq \cup\{B(p_i,\gamma) \mid i \in \overline{1,m}\}$, то $m_y = u(M_y) \subseteq \cup\{u(B(p_i,\gamma)) | i \in \overline{1,m}\} \subseteq M_y$ и, следовательно, $\cup\{u(B(p_i,\gamma)) | i = \overline{1,m}\} = M_y$. Так как u голоморфно и $u(x) = x$ при всех $x \in M_y$, то множество M_y является аналитическим множеством [**21**]. Так как M_y компактно, то оно состоит из конечного числа точек [**21**]. Пусть $M_y = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m(y)}\}$. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\langle (M, \mathbb{S}, \pi),\ (Y, \mathbb{S}, \sigma), h\rangle$. Согласно доказанному выше, эта система двусторонне дистальна. По предложению 4 [**61**] отображение $H : Y \to 2^M$ $(H(y) = M_y)$ непрерывно и, следовательно, $cardM_y = n(y)$ не зависит от $y \in Y$. Теорема полностью доказана.

Следствие 3.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.4.1 и Y - компактное минимальное множество, состоящее из рекуррентных (почти периодических по Бору, квазипериодических, периодических) точек, тогда множество M состоит из рекуррентных (почти периодических по Бору, квазипериодических, периодических) точек.*

Доказательство.

Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 3.4.1,■ теоремы 3 [**61**] и леммы 1 [**61**].

Теорема 3.4.3. *В условиях теоремы 3.4.1 имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество M равномерно устойчиво по Ляпунову, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое что $\rho(x, p_0) < \delta$ ($x \in X_y, p \in M_y$) влечҷт $\rho(xt, pt) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;*

(2) *для любого $x \in W^s(M)$ существует $p \in M_y$ ($y = h(x)$) такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(xt, pt) = 0.$$

В частности, если Y состоит из рекуррентных (почти периодических, квазипериодических, периодических, стационарных) точек, то $W^s(M)$ состоит из асимптотически рекуррентных (асимптотически почти периодических, асимптотически квазипериодических, асимптотически периодических, асимптотически стационарных) точек.

Доказательство. Первое утверждение теоремы, по существу, вытекает из (3.4.2). Что касается второго утверждения, то оно вытекает из теоремы 3.4.1 и леммы 4 [**98**].

Следствие 3.4.4. *Пусть $(\mathbb{C}^n, S, \pi)$ автономная $\mathbb{C}$-аналитическая динамическая система, $M \subset \mathbb{C}$ непустое компактное инвариантное орбитально асимптотически устойчивое множество, тогда M состоит из конечного числа стационарных точек $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.*

Пусть $f \in A(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ и рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z). \tag{3.4.6}$$

Наряду с уравнением (3.4.6) рассмотрим его H-класс

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z) \quad (g \in H(f)). \tag{3.4.7}$$

Множество $M \subseteq \mathbb{C}^n$ назовҷм инвариантным относительно уравнения (3.4.6), если для любой точки $v \in M$ существует $g \in H(f)$, что решение $\varphi(t, v, g)$ уравнения (3.4.7) определена на $\mathbb{R}$ и $\varphi(t, v, g) \in M$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Компактное, инвариантное относительно (3.4.6), множество $M \subset \mathbb{C}^n$ назовҷм орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(v, M_g) < \delta$ влечҷт $\rho(\varphi(t, v, g), M_{g_t}) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$, где $M_g = \{x \mid x \in M,\ \varphi(t, x, g) \in M$ при всех $t \in \mathbb{R}\}$ и g_t - сдвиг по первой переменной на t функции g.

Обозначим через $W^s_g(M) = \{v | v \in \mathbb{C}^n,\ \lim\limits_{t \to +\infty} \rho(\varphi(t, v, g), M_{g_t}) = 0\}$ и $W^s(M) = \cup\{W^s_g(M) \,|\, g \in H(f)\}$.

Компактное инвариантное относительно (3.4.6) множество M назовҷм орбитально асимптотически устойчивым, если оно орбитально

устойчиво и существует $\gamma > 0$ такое, что $B(M, \gamma) = \{x \mid \rho(x, M) < \gamma\} \subseteq W^s(M)$.

Применяя теорему 3.4.1 и следствия 3.4.2, 3.4.4 к построенной в примере 3.2.5 $\mathbb{C}$-аналитической неавтономной системе, порожденной уравнением (3.4.6), получим следующее утверждение.

Теорема 3.4.5. *Пусть $f \in A(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ постоянна (τ-периодична, почти периодична по Бору, квазипериодична, рекуррентна) по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по z на компактах из $\mathbb{C}^n$, $M \subseteq \mathbb{C}^n$ выполнены следующие условия:*

(1) *M компактное инвариантное относительно (3.4.6) множество;*
(2) *M асимптотически орбитально устойчиво,*

Тогда каково бы ни было $g \in H(f)$ множество M_g состоит из конечного числа стационарных ($p\tau$-периодических точек, почти периодических по Бору, квазипериодических, рекуррентных) решений уравнения (3.4.7).

Замечание 3.4.6. *Утверждение, аналогичное теореме 3.4.5, имеет место и для разностных уравнений.*

3.5. Динамические системы в пространствах сечений

Пусть $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi),\ (Y, \mathbb{S}, \sigma), h) \rangle$ - неавтономная динамическая система. Через $\Gamma = \Gamma(Y, X)$ обозначим множество всех непрерывных сечений гомоморфизма h, т.е. $\Gamma(Y, X) = \{\gamma \in$

$C(Y,X) : \, h \circ \gamma = Id_Y \}$. Ниже предполагается, что $\Gamma(Y,X) \neq \emptyset$. Это требование выполняется в наиболее важных для приложений случаях.

Снабдим пространство $\Gamma = \Gamma(Y,X)$ топологией равномерной сходимости на компактах из Y. Пусть $K \subseteq Y$ – непустой компакт из Y. Равенство

$$p_K(\gamma_1, \gamma_2) := \max_{y \in K} \rho(\gamma_1(y), \gamma_2(y)) \tag{3.5.1}$$

определяет некоторую псевдометрику p_K на Γ, а семейство псевдометрик $\{p_K \, : \, K \in C(Y)\}$, где $C(Y)$ – семейство всех непустых компактных подмножеств Y, определяет на Γ равномерную структуру (топологию равномерной сходимости на компактах из Y).

Рассмотрим один частный случай, когда $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, где $\{Q_k\}$ – возрастающая последовательность вложенных друг в друга компактов. В этом случае достаточно взять счетное семейство псевдометрик $\mathcal{P}' = \{p_k : \, k = 1, 2 \ldots\}$, где

$$p_k(\gamma_1, \gamma_2) := \max_{y \in Q_k} \rho(\gamma_1(y), \gamma_2(y)). \tag{3.5.2}$$

Легко проверить, что это семейство псевдометрик разделяет точки и, кроме того, $p_1(\gamma_1, \gamma_2) \leq p_2(\gamma_1, \gamma_2) \leq \ldots p_k(\gamma_1, \gamma_2) \leq \ldots$. Следовательно, топология, определяемая этим семейством псевдометрик метризуема. Например, топология, определяемая метрикой

$$d(\gamma_1, \gamma_2) := \sum \frac{1}{2^k} \frac{p_k(\gamma_1, \gamma_2)}{1 + p_k(\gamma_1, \gamma_2)},$$

согласована с топологией на Γ, определяемой семейством псевдометрик $\mathcal{P}'$.

Замечание 3.5.1. *a. Легко проверить, что* Γ *полно тогда и только тогда, когда* X *является полным.*

b. Если (X, h, Y) *является векторным расслоением, то пространство* $\Gamma = \Gamma(Y,X)$ *естественным образом снабжается структурой топологического векторного пространст- ва.*

c. Если Y компактно, а (X,h,Y) является банаховым расслоением, то равенство

$$||\gamma|| := \max_{y\in Y} |\gamma(y)|$$

определяет норму на Γ (здесь $|\cdot| : X \to \mathbb{R}_+$ – некоторая норма на (X,h,Y), согласованная с метрикой) и топология, определяемая этой нормой, согласована с исходной топологией на Γ.

Обозначим через $\mu : \mathbb{S}_+ \times \Gamma \to \Gamma$ отображение определяемое по следующему правилу: $\mu(t,\gamma)(y) := \pi^t\gamma(\sigma^{-t}y)$ при всех $y \in Y$. Легко проверить, что $\mu(t,\gamma) \in \Gamma$.

Имеет место следующая

Теорема 3.5.2. *Тройка $(\Gamma, \mathbb{S}_+, \mu)$ является динамической системой (полугрупповой) на Γ, т.е.*

(1) $\mu(0,\gamma) = \gamma$ *при всех* $\gamma \in \Gamma$.
(2) $\mu(\tau, \mu(t,\gamma)) = \mu(t+\tau, \gamma)$ *при всех* $\gamma \in \Gamma$ *и* $t, \tau \in \mathbb{S}_+$.
(3) $\mu : \mathbb{S}_+ \times \Gamma \to \Gamma$ *непрерывно.*

Доказательство. Первые два утверждения теоремы очевидны. Нетривиальная часть теоремы 3.5.2 состоит в доказательстве непрерывности μ. Пусть $t_\nu \to t_0$ и $\gamma_\nu \to \gamma_0$ ($\{t_\nu\}$ и $\{\gamma_\nu\}$ направленности в $\mathbb{S}_+$ и Γ соответственно). Покажем, что $\mu(t_\nu, \gamma_\nu) \to \mu(t_0, \gamma_0)$ в пространстве Γ, т.е. для любого компакта $K \subseteq Y$ имеет место равенство

$$\lim_{\nu} \max_{y\in K} \rho(\pi^{t_\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y),\, \pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y)) = 0.$$

Допустим противное. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ и компакт $K_0 \subseteq Y$ такие, что

$$\max_{y\in K_0} \rho(\pi^{t_\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y),\, \pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y)) \geq \varepsilon_0.$$

Так как K_0 компактно, существует направленность $\{y_\nu\} \subseteq K_0$ такая что

$$\rho(\pi^{t_\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\, \pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_\nu)) \geq \varepsilon_0.$$

В силу компактности K_0 направленность $\{y_\nu\}$ можно считать сходящейся. Положим $y_0 := \lim\limits_{\nu} y_\nu$. Заметим, что $\sigma^{-t_\nu}y_\nu \to$

$\sigma^{-t_0}y_0$ и, следовательно,

$$\lim_{\nu}\gamma_0(\sigma^{-t_\nu}y_\nu)=\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0). \tag{3.5.3}$$

Из (3.5.3), в свою очередь, следует, что

$$\lim_{\nu}\pi^{t_\nu}\gamma_0(\sigma^{-t_\nu}y_\nu)=\pi_0^t\gamma_0(\sigma_0^{-t}y_0). \tag{3.5.4}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \quad &\le \rho(\pi^{t_\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\ \pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_\nu))\le\\ &\le \rho(\pi^{t_\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\ \pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0))+\\ &+\rho(\pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0),\pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_\nu)).\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Очевидно, второе слагаемое в правой части неравенства (3.3.5) стремится к нулю, когда $y_\nu\to y_0$. Покажем, что первое слагаемое также стремится к нулю, когда $y_\nu\to y_0$ и $t_\nu\to t_0$. Прежде всего, установим, что $\lim\limits_{\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu)=\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0)$. Так как

$$\begin{aligned}&\rho(\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\ \gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0))\le\rho(\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\gamma_0(\sigma^{-t_\nu}y_\nu))\\ &+\rho(\gamma_0(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0))\le\max_{y\in K'}\rho(\gamma_\nu(y),\gamma_0(y))+\\ &\rho(\gamma_0(\sigma^{-t_\nu}y_\nu),\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0)),\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

где $K'=\sigma(K_0,\mathbb{T}_0)$ и $\mathbb{T}=\overline{\{-t_\nu\}}$, то, переходя в (3.5.6) к пределу и учитывая (3.5.4) и тот факт, что $\gamma_\nu\to\gamma_0$ в топологии Γ, получаем нужное равенство.

Таким образом, $\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu)\to\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0)$ и $t_\nu\to t_0$, откуда следует, что

$$\rho(\pi^{t_\nu}\gamma_\nu(\sigma^{-t_\nu}y_\nu,\ \pi^{t_0}\gamma_0(\sigma^{-t_0}y_0))\to 0. \tag{3.5.7}$$

Переходя в (3.5.5) к пределу при $t_\nu\to t_0$ и $y_\nu\to y_0$ и учитывая (3.5.7), получаем $\varepsilon_0\le 0$. Последнее противоречит выбору ε_0. Следовательно, отображение $\mu:\Gamma\times\mathbb{S}_+\to\Gamma$ непрерывно. Теорема доказана.

Замечание 3.5.3. *a. Если* $\langle(X,\mathbb{S},\pi),\,(Y,\mathbb{S},\sigma),h\rangle$ *– групповая неавтономная динамическая система, то на* Γ *определена групповая динамическая система* $(\Gamma,\mathbb{S},\mu)$.

b. Непрерывное сечение $\gamma\in\Gamma$ *является инвариантным тогда и только тогда, когда* $\gamma\in\Gamma$ *есть точка покоя системы* $(\Gamma,\mathbb{S}_+,\mu)$.

Рассмотрим один частный случай приведенной выше конструкции. Пусть $\langle W, \varphi, (Y, \mathbb{S}, \sigma)\rangle$ – коцикл над $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$ со слоем W и $\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h\rangle$ – порожденная им неавтономная динамическая система. Из равенства $h \circ \gamma = Id_Y$ и $h = pr_2$ следует: $\gamma = (\psi, Id_Y)$, где $\gamma \in \Gamma(Y, X)$ и $\psi : Y \to W$. Таким образом, каждому сечению γ соответствует некоторое отображение $\psi : Y \to W$ и наоборот. Учитывая это и взаимно однозначное соответствие между $\Gamma(Y, W \times Y)$ и $C(Y, W)$, где $C(Y, W)$ - пространство всех непрерывных функций $\psi : Y \to W$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из Y, в дальнейшем эти два множества будем отождествлять. Динамическая система $(\Gamma, \mathbb{S}_+, \mu)$ естественным образом индуцирует динамическую систему $(C(Y, W), , \mathbb{S}_+, Q)$ на $C(Y, W)$. А именно

$$
\begin{aligned}
&(\mu^t\gamma)(y) = \pi^t\gamma(\sigma^{-t}y) = \pi^t(\psi, Id_Y)(\sigma^{-t}y) = \\
&\pi^t(\psi(\sigma^{-t}y), \sigma^{-t}y) = (U(t, \sigma^{-t}y)\psi(\sigma^{-t}y), y) \\
&= ((Q^t\psi)(y), y).
\end{aligned} \tag{3.5.8}
$$

Таким образом, $\mu^t(\psi, Id_Y) = (Q^t\psi, Id_Y)$. Отсюда, отображение $Q : C(Y, W) \times \mathbb{S}_+ \to C(Y, W)$, определенное равенством $Q(\psi, t) = Q^t\psi$, где $(Q^t\psi)(y) = U(t, \sigma^{-t}y)\psi(\sigma^{-t}y)$ $(y \in Y)$, обладает следующими свойствами:

a. $Q^0 = Id_{C(Y,W)}$;
b. $Q^tQ^\tau = Q^{t+\tau}$ $(t, \tau \in \mathbb{S}_+)$
c. Q непрерывно,

т.е. $(C(Y, W), \mathbb{S}_+, Q)$ есть полугрупповая динамическая система на $C(Y, W)$. Учитывая сказанное, в дальнейшем будем отождествлять динамические системы (Γ, S_+, μ) и $(C(Y, W), \mathbb{S}_+, Q)$.

3.6. Квазипериодические решения

В этом параграфе изучаются диссипативные дифференциальные уравнения вида (3.1.1) с квазипериодическими коэффициентами. Доказывается, что для таких уравнений, правые части которых аналитичны, всегда существует хотя бы одно квазипериодическое решение с тем же базисом частот, что и правая часть.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = F(x, \varphi) \\ \varphi' = i\omega\varphi, \end{cases} \tag{3.6.1}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$ ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ линейно независимы относительно целых чисел), $i^2 = -1$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{C}^m$, $\omega\varphi = \mathrm{col}(w_1\varphi_1, \dots, \omega_m\varphi_m)$, $x \in \mathbb{C}^m$ и $F \in C(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$. Обозначим через $\mathcal{T}^m$ m-мерный тор, т.е. $\mathcal{T}^m := \{\varphi \in \mathbb{C}^m : |\varphi_k| = 1, k = \overline{1,m}\}$. В дальнейшем нас будет интересовать система (3.6.1), когда параметр φ пробегает точки тора $\mathcal{T}^m$ и некоторой его малой окрестности

$$D_\delta := \{\varphi \in \mathcal{C}^m : |\varphi_k| < 1 + \delta, k \in \overline{1,m}\}, \tag{3.6.2}$$

где $\delta > 0$ - некоторое достаточно малое число.

Система (3.6.1) эквивалентна уравнению

$$\dot{x} = F(x, \varphi_0 e^{i\omega\varphi}), \tag{3.6.3}$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{C}^m$ или его подмножеству (например, D_δ).

Будем в дальнейшем говорить, что система (3.6.1) (или уравнение (3.6.3)) аналитична на торе $\mathcal{T}^m$, если существует положительное число δ такое, что функция $F : \mathbb{C}^n \times D_\delta \to \mathbb{C}^n$ аналитична.

Обозначим через $(\mathbb{C}^m, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическую систему на $\mathbb{C}^m$, определенную вторым уравнением системы (3.6.1). Таким образом,

$$\sigma(\varphi, t) := \mathrm{col}\left(\varphi_1 e^{i\omega_1 t}, \varphi_2 e^{i\omega_2 t}, \dots, \varphi_m e^{i\omega_m t}\right). \tag{3.6.4}$$

Легко заметить, что при любом $\delta > 0$ множества D_δ и $\overline{D}_\delta$ инвариантны относительно $(\mathbb{C}^m, \mathbb{R}, \sigma)$.

Систему (3.6.1) (и уравнение (3.6.3)) назовем диссипативной на торе $\mathcal{T}^m$, если существует положительное число $\delta > 0$ (достаточно малое) такое, что динамическая система $(\mathbb{C}^m, \mathbb{R}, \sigma)$, порожденная (3.6.1) диссипативна.

Уточним это определение. Предположим, что для системы (3.6.1) выполнены условия существования, единственности и нелокальной продолжаемости вправо. Тогда, как известно, система (3.6.1) определяет полугрупповую систему $(\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi)$ на $\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta$. При этом $\pi((x, \varphi_0), t) :=$

$(\psi(t,x,\varphi_0),\varphi_0 e^{i\omega t})$, где $\psi(\cdot,x,\varphi_0)$ - решение уравнения (3.6.3), проходящее через точку $x \in \mathbb{C}^n$ при $t=0$. Заметим, что тройка $\langle(\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ $(h := pr_2 : \mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta \to \overline{D}_\delta)$ есть неавтономная динамическая система. Таким образом, диссипативность системы дифференциальных уравнений (3.6.1) на торе $\mathcal{T}^m$ означает, что порожденная ею неавтономная динамическая система $\langle(\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ (при достаточно малом δ) диссипативна, т.е. существует положительное число r, для которого

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \|\psi(t,x,\varphi)\| < r \tag{3.6.5}$$

при всех $x \in \mathbb{C}^n$ и $\varphi \in \overline{D}_\delta$, причем r не зависит ни от $x \in \mathbb{C}^n$ ни от $\varphi \in \overline{D}_\delta$.

Теорема 3.6.1. *Если на торе уравнение (3.6.3) аналитично и диссипативно на торе $\mathcal{T}^m$, то оно имеет хотя бы одно квазипериодическое решение с тем же базисом частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, что и правая часть F.*

Доказательство. Пусть (3.6.3) диссипативно на торе $\mathcal{T}^m$ и функция F аналитична на нем. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $F : \mathbb{C}^n \times D_\delta \to \mathbb{C}^n$ аналитична, и неавтономная система $\langle(\mathbb{C}^n \times \overline{D}_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ диссипативна. Обозначим

через $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ множество всех аналитических функций $\gamma : D_\delta \to \mathbb{C}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из D_δ. Очевидно, $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ есть замкнутое подмножество пространства $C(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ всех непрерывных функций $\gamma : D_\delta \to \mathbb{C}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из D_δ. Так как D_δ является инвариантным подмножеством относительно динамической системы $(\overline{D}_\delta, \mathbb{R}, \sigma)$, то неавтономная система $\langle(\mathbb{C}^m \times D_\delta, \mathbb{R}_+, \pi), (D_\delta, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ определена и согласно замечанию 3.5.3 $C(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ - есть пространство всех непрерывных сечений для этой системы. По теореме 3.5.2 тройка $(C(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$, где $(Q^t\gamma)(\varphi) = \psi(t, \gamma(\sigma^{-t}\varphi), \sigma^{-t}\varphi)$, есть динамическая система на $C(D_\delta, \mathbb{C}^n)$. Покажем, что $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ является инвариантным подмножеством динамической системы $(C(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$. Действительно, если $\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$, то из общих свойств решений уравнений с аналитической правой частью следует **[51]**, что $Q^t\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ при всех $t \geq 0$. Таким образом на $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ определена полугрупповая динамическая система $(\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$. Отметим одно свойство этой системы, вытекающее из диссипативности (3.6.3) на торе $\mathcal{T}^m$. Положим $\mathcal{A}_r := \{\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n) : \gamma(D_\delta) \subseteq B(0,r)\}$, где $B(0,r)$ открытый шар в $\mathbb{C}^n$ радиуса r с центром в нуле. В силу теоремы Витали [**21**] при каждом $r > 0$ множество $\mathcal{A}_r$ относительно компактно в $\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$. Очевидно, множества $\mathcal{A}_r$ выпуклы. Согласно теореме 3.1.1 существует такое $b > 0$, что для любого $r > 0$ найдется $l_r \geq 0$, для которого

$$Q^t\mathcal{A}_r \subseteq \mathcal{A}_b \tag{3.6.6}$$

при всех $t \geq l_r$. Пусть $r > b$ (например, $r = b + 1$) и $U = \mathrm{Int}\mathcal{A}_r$ (внутренность $\mathcal{A}_r$). Справедливо включение $Q^t\overline{U} \subseteq \overline{\mathcal{A}}_b \subset U$. Согласно теореме 1 [**224**] существует точка покоя $\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ динамической системы $(\mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n), \mathbb{R}_+, Q)$, т.е.

$$\psi(t, \gamma(\sigma^{-t}\varphi), \sigma^{-t}\varphi) = \gamma(\varphi) \qquad (\varphi \in D_\delta, \quad t \geq 0). \tag{3.6.7}$$

Отсюда следует, что $\psi(t, \gamma(\varphi), \varphi) = \gamma(\sigma^t\varphi)$ $(\varphi \in D_\delta,\ t \geq 0)$, т.е. $\psi(t, \gamma(\varphi_0), \varphi_0) = \gamma(\sigma^t\varphi_0) = \gamma(\varphi_0 e^{i\omega t})$ является квазипериодическим решением уравнения (3.6.3) с базисом частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Теорема доказана.

Замечание 3.6.2. *a. Доказательство теоремы 3.6.1 носит общий характер. Оно непосредственно переносится на уравнения более общего вида. Например, вместо (3.4.1) можно было бы рассмотреть систему уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \varphi) \\ \dot{\varphi} = G(\varphi) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{C}^n,\ \varphi \in \mathbb{C}^m). \tag{3.6.8}$$

При этом надо предпологать, что тор $\mathcal{T}^m$ является квазипериодическим минимальным множеством второго уравнения системы (3.6.8). Кроме того, существует окрестность D_δ тора $\mathcal{T}^m$, являющаяся инвариантным множеством динамической системы, порожденной вторым уравнением системы (3.6.8). Остальные условия, фигурирующие в теореме 3.6.1, очевидным образом модифицируется для этого случая.

b. Теорема 3.6.1 (см. также теорему 3.2.6) подтверждает гипотезу, высказанную И.У.Бронштейном (см. [**15**, с.278]*) о* *том, что диссипативная почти периодическая система, удовлетворяющая условию равномерной положительной устойчивости, допускает хотя бы одно почти периодическое решение. Следует добавить, что для $\mathbb{C}$-аналитичес- ких систем условие равномерной положительной устойчивости является лишним.*

c. Автору не известно, насколько существенным в теореме 3.6.1 является условие аналитичности его правой части F. Мы склонны считать, что теорема 3.6.1 имеет место и в том случае, когда F достаточно гладкая функция. В связи с этим укажем на два примера, построенных в [**34, 199**]. *В этих работах строится пример скалярного уравнения (3.1.1) с квазипериодическими коэффициентами, которое обладает свойством диссипативности, но не имеет ни одного почти периодического решения. Следует отметить, что, как в работе* [**34**], *так и в* [**199**], *все построения базируются на известных результатах Данжуа о потоках на двумерном торе. Как показывает анализ этих примеров, если правая часть уравнения (3.1.1) достаточно гладкая, то отмеченное обстоятельство уже не имеет места.*

Теорема 3.6.3. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.6.1 и кроме того* $\overline{F(x,\varphi)} = F(\overline{x},\overline{\varphi})$ *(чертой обо значено комплексное сопряжение). Тогда существует* $\gamma \in \mathcal{A}(D_\delta, \mathbb{C}^n)$ *такое, что*

(1) $\overline{\gamma(x)} = \gamma(\overline{x})$ *при всех* $x \in D_\delta$;
(2) $\gamma(\varphi_0 e^{i\omega t}) = \psi(t, \gamma(\varphi_0), \varphi_0)$ *при всех* $\varphi_0 \in D_\delta$ *и* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 3.6.1.

3.7. Аналог теоремы Камерона-Джонсона

Известная теорема Камерона-Джонсона [**165**], [**223**] утверждает, что уравнение

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.7.1}$$

с рекуррентной (почти периодической по Бору) матрицей $A(t)$ может быть приведено ляпуновским преобразованием к уравнению $\dot{y} = B(t)y$ с кососимметрической матрицей $B(t)$, если все решения уравнения (3.7.1) и всех его предельных уравнений ограничены на всей прямой. В этом параграфе мы даем обобщение этого результата на линейные $\mathbb{C}$-аналитические уравнения в гильбертовом пространстве.

Пусть $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) - множество всех действительных (комплексных) чисел; $\mathbb{C}^m$ - m-мерное комплексное евклидово пространство; G – область из $\mathbb{C}^m$; H – вещественное или комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $|\cdot|^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$; H_w – пространство H, снабженное слабой топологией; $[H]$ (соответственно $[H_w]$) – множество всех линейных непрерывных операторов, действующих в H (соответственно в H_w), и снабженное операторной нормой (соответственно, слабой топологией); $\mathcal{H}(G,[H])$ (соответственно $\mathcal{H}(G,\mathbb{C}^m)$), $\mathcal{H}(G,[H_w])$ - множество всех голоморфных функций $h : G \to [H]$ (соответственно, $h : G \to \mathbb{C}^m$, $h : G \to [H_\omega]$), наделенное открыто-компактной топологией.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A(z)x \\ \dot{z} = \Phi(z), \end{cases} \tag{3.7.2}$$

где $\Phi \in \mathcal{H}(G,\mathbb{C}^m)$ и $A \in \mathcal{H}(G,[H])$. Будем предпологать, что второе уравнение системы (3.7.2) порождает динамческую систему $(G,\mathbb{R},\sigma)$ на области G. Обозначим через $U(t,z)$ оператор Коши уравнения

$$\dot{x} = A(zt)x \quad (z \in G), \tag{3.7.3}$$

где $zt = \sigma(t,z)$. Из общих свойств решений дифференциальных уравнений (см., например, [**29**],[**32**] и [**51**]) следует, что операторы $\{U(t,z) \mid t \in \mathbb{R}, z \in G\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $U(0,z) = I$ для всех $z \in G$, где I – единичный оператор в H;
(2) $U(t+\tau,z) = U(t,z\tau)U(\tau,z)$ для всех $t,\tau \in \mathbb{R}$ и $z \in G$;
(3) отображение $U : \mathbb{R}\times G \to [H]$ $(U : (t,z) \to U(t,z))$ непрерывно и при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $U(t,\cdot) : G \to [H]$ голоморфно.

Имеет место следующая

Теорема 3.7.1. *Пусть существует $C > 0$ такое, что*

$$\|U(t,z)\| \le C \tag{3.7.4}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Тогда существует $P \in \mathcal{H}(G,[H])$ такое, что

a. *отображение P биголоморфно, т.е. при каждом $z \in G$ оператор $P(z)$ обратим и отображение $P^{-1} : G \to [H]$ $(P^{-1} : z \to P^{-1}(z))$ голоморфно;*
b. *$P^*(z) = P(z)$ при всех $z \in G$, где $P^*(z)$ – оператор, сопряженный к $P(z)$;*
c. *при каждом $z \in G$ оператор $P(z)$ является положительно определенным;*
d. *имеет место оценка $C^{-1}|x| \le |P(z)x| \le C|x|$ при всех $z \in G$ и $x \in H$;*
e. *заменой $x = P(zt)y$ уравнение (3.7.3) приводится к уравнению*

$$\dot{y} = B(zt)y \tag{3.7.5}$$

с косоэрмитовым оператором $B \in \mathcal{H}(G,[H])$, т.е. $B^*(z) = -B(z)$ при всех $z \in G$.

Доказательство. При каждом $t \in \mathbb{R}$ определим оператор S^t равенством

$$(S^t f)(z) = U^*(t,z)f(zt)U(t,z)$$

для всех $z \in G$ и $f \in \mathcal{H}(G,[H])$ (или $\mathcal{H}(G,[H_w])$). Легко проверить, что операторы $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяют условиям:

(4) оператор S^t отображает $\mathcal{H}(G,[H])$ $(\mathcal{H}(G,[H_w]))$ в себя при каждом $t \in \mathbb{R}$;
(5) $S^0 = I$, где I – единичный оператор в $\mathcal{H}(G,[H])$ (или $\mathcal{H}(G,[H_\omega])$);
(6) $S^t S^\tau = S^{t+\tau}$ при всех $t, \tau \in \mathbb{R}$;
(7) отображение S^t $(t \in \mathbb{R})$ линейно и непрерывно в топологии $\mathcal{H}(G,[H])$ (или $\mathcal{H}(G,[H_w])$).

Из условий 4.–7. следует, что семейство $\{S^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ – коммутативная группа линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}(G,[H])$ (или $\mathcal{H}(G,[H_w])$).

Положим $K = \{A \in [H] \mid \|A\| \le C^2\}$ и заметим, что множество K слабо замкнуто. Так как любое ограниченное и замкнутое в H множество слабо компактно, то согласно теореме Тихонова множество K слабо компактно. Обозначим через

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{H}(G, [H]) \mid \|\gamma(z)\| \le C^2\}.$$

Из интегральной формулы Коши [**148**, с.339] и теоремы Асколи [**148**] следует, что Γ компактно в $\mathcal{H}(G, [H_w])$. Пусть

$$V = \overline{\mathrm{conv}}\{S^t Q \mid t \in \mathbb{R}\},$$

где $Q(z) = I$ при всех $z \in G$ и I – единичный оператор в H, а $\overline{\mathrm{conv}}$ – слабое замыкание выпуклой оболочки. В силу линейности и непрерывности в топологии $\mathcal{H}(G, [H_w])$ операторов $\{S^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ множество V инвариантно, т.е. $S^t V \subseteq V$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$(S^t Q(z)x, x) = (U^*(t, z)U(t, z)x, x) = |U(t, z)x|^2 \qquad (3.7.6)$$

при всех $z \in G$, $t \in \mathbb{R}$ и $x \in H$. Из (3.7.4) и (3.7.6) следует, что

$$C^{-2}|x|^2 \le (S^t Q(z)x, x) \le C^2|x|^2 \qquad (3.7.7)$$

и, следовательно,

$$C^{-2}|x|^2 \le (\mathcal{R}(z)x, x) \le C^2|x|^2 \qquad (3.7.8)$$

при всех $\mathcal{R} \in V$, $z \in G$ и $x \in H$. Кроме того, $\mathcal{R}^*(z) = \mathcal{R}(z)$ при всех $z \in G$ и $\mathcal{R} \in V$. Из неравенства (3.7.8) следует, что $\|\mathcal{R}(z)\| \le C^2$ при всех $z \in G$ и, следовательно, $V \subseteq \Gamma$. Согласно теореме Маркова-Какутани [**19**] группа $\{S^t\}$ имеет в V общую неподвижную точку $\mathcal{R}$, т.е. $U^*(t, z)\mathcal{R}(zt)U(t, z) = \mathcal{R}(z)$ при всех $z \in G$ и $t \in \mathbb{R}$. Согласно (3.7.8) оператор $\mathcal{R}(z)$ является положительно определенным, и так как $\mathcal{R}^*(z) = \mathcal{R}(z)$, то согласно [**82**, теорема 12.33] (см. также [**94**, с.65]) существует единственный обратимый самосопряженный положительно определенный оператор $\mathcal{M}(z)$ такой, что $\mathcal{M}^2(z) = \mathcal{R}(z)$ при всех $z \in G$. Из (3.7.8) следует, что $C^{-1}|x| \le |\mathcal{M}(z)x| \le C|x|$ при всех $z \in G$ и $x \in H$. Наконец, из равенства

$$\mathcal{R}^\alpha(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \lambda^\alpha (\mathcal{R}(z) - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

($\alpha = \pm\frac{1}{2}$), где L – простой контур, окружающий спектр оператора $\mathcal{R}(z)$, вытекает биголоморфность оператора $\mathcal{M} : G \to [H]$. Так как $U^*(t,z)\mathcal{M}^2(zt)U(t,z) = \mathcal{M}^2(z)$, то

$$\mathcal{M}(zt)U(t,z)\mathcal{M}^{-1}(z) = \mathcal{M}^{-1}(zt)U^{*-1}(t,z)\mathcal{M}(z)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Положим

$$\mathcal{V}(t,z) = \mathcal{M}(zt)U(t,z)\mathcal{M}^{-1}(z)$$

и заметим, что операторы $\{\mathcal{V}(t,z)|t \in \mathbb{R},\ z \in G\}$ удовлетворяют условиям 1.-3. и, кроме того

(8) $\mathcal{V}^*(t,z) = \mathcal{V}^{-1}(t,z)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$;

(9) $U(t,z)P(z) = P(zt)\mathcal{V}(t,z)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$, где $P(z) = M^{-1}(z)$.

Положим

$$B(z) = \frac{d}{dt}\mathcal{V}(t,z)|_{z=0} = [\mathcal{M}(z) + \mathcal{M}(z)\mathcal{A}(z)]P(z), \tag{3.7.9}$$

где

$$\dot{\mathcal{M}}(z) = \frac{d}{dt}\mathcal{M}(zt)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathcal{M}(z)\Phi(z),$$

тогда $B \in \mathcal{H}(G,[H])$ и

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t,z) = B(zt)\mathcal{V}(t,z) \tag{3.7.10}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Таким образом, $\mathcal{V}(t,z)$ является оператором Коши уравнения (3.7.5). С другой стороны, согласно условию 8. имеем

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{V}}^{*^{-1}}(t,z) = -B^*(zt)\mathcal{V}^{*^{-1}}(t,z) \\ \mathcal{V}^{*^{-1}}(0,z) = I \end{cases} \tag{3.7.11}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Из равенств (3.7.10), (3.7.11) и условия 8. следует, что $B^*(z) = -B(z)$ при всех $z \in G$. Наконец, для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что заменой $x = P(zt)y$, согласно условию 9., уравнение (3.7.3) приводится у уравнению (3.7.5). Теорема полностью доказана.

Замечание 3.7.2. *а. Результат, близкий к теореме 3.7.1, в случае когда H конечномерно, получен в работе В.А.Главана* [**28**].

b. Если точка $z \in G$ является стационарой (τ- периодической, квазипериодической и т.д.), то согласно **[154]** *оператор-функция $P(zt)$ будет также стационарной (τ-периодичес кой, квазипериодической и т.д.).*

c. Теорема 3.7.1 имеет место и для системы разностных уравнений вида

$$\begin{cases} x(k+1) = A(zk)x(k) \\ z(k+1) = \Phi(z(k)) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(G, [H])$ и $\Phi \in \mathcal{H}(G, \mathbb{C}^m)$, а также для систем дифференциальных и разностных уравнений с многомерным временем.

3.8. Почти периодические решения слабо нелинейных диссипативных систем

1. В этом пункте изучим ограниченные и равномерно согласованные решения линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Обозначим через $C_b(\mathbb{R}, E^n)$ множество всех ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $\varphi : \mathbb{R} \to E^n$ с нормой sup. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.8.1}$$

где $A \in C_b(\mathbb{R}, [E^n])$. Наряду с уравнением (3.8.1) рассмотрим неоднородное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \ . \tag{3.8.2}$$

Напомним, что уравнение (3.8.1) называют слабо регулярным, если для любого $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ уравнение (3.8.2) имеет по крайнем мере одно решение $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$.

Теорема 3.8.1. *Пусть $A \in C_b(\mathbb{R}, [E^n])$. Если $H(A)$ компактно, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *уравнение (3.8.1) слабо регулярно;*
(2) *уравнение (3.8.2) имеет по крайнем мере одно ограниченное на $\mathbb{R}$ равномерно согласованное решение при любой ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $f \in C(\mathbb{R}, E^n)$.*

Доказательство. Из 2. очевидно следует 1., поэтому для доказательства теоремы 3.8.1 достаточно показать, что из 1. следует 2.. Доказательство проведем в два этапа.

a. Пусть матрица-функция $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ устойчива по Пуассону хотя бы в одном направлении, т.е. существует $|t_k| \to +\infty$ такая, что $A_{t_k} \to A$ в $C(\mathbb{R}, [E^n])$. В этом случае из теоремы 3.8.1 и леммы 4.2.1 из [**100**] следует, что уравнение (3.8.1) удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии (э.д.) на $\mathbb{R}$ и по теореме 22.23 [**15**] уравнение (3.8.2) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ равномерно согласованное решение.

b. Матрица-функция $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ не является устойчивой по Пуассону ни в каком направлении. Пусть φ – ограниченное на $\mathbb{R}$ решение уравнения (3.8.2) и $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_{(A,f)}$. Существует $(B, g) \in H(A, f)$ такое, что $A_{t_k} \to B$ и $f_{t_k} \to g$. Заметим, что в этом случае для последовательности $\{t_k\}$ возможны только следующие два случая:

(1) $\{t_k\}$ сходится к $t_0 \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_\varphi$;
(2) $\{t_k\}$ такова, что $|t_k| \to +\infty$.

Тогда $B := \lim\limits_{k\to+\infty} A_{t_k}$ является ω- или α-предельной для A и в этом случае также $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Действительно, последовательность $\{\varphi_k\}$ компактна в $C(\mathbb{R}, E^n)$ в силу ограниченности φ. Кроме того, всякая предельная функция для последовательности $\{\varphi_k\}$ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения

$$\dot{x} = B(t)x + g(t) \ . \tag{3.8.3}$$

По лемме 4.2.1 из [**100**] уравнение

$$\dot{y} = B(t)y \tag{3.8.4}$$

удовлетворяет условию э.д. на $\mathbb{R}$ и, следовательно, уравнение (3.8.3) более одного ограниченного на $\mathbb{R}$ решения иметь не может. Отсюда следует, что $\{\varphi_{t_k}\}$ сходится в $C(\mathbb{R}, E^n)$, т.е. $\{t_k\} \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Наконец, покажем, что в случае, когда $\{t_k\}$ неограничена, то она не содержит ни одной ограниченной подпоследовательности. Действительно, если допустить противное, то существует $\{t_k'\} \subseteq \{t_k\}$ такая, что $t_k' \to t' \in \mathbb{R}$ и тогда

$$B := \lim_{k\to+\infty} A_{t_k} = \lim_{k\to+\infty} A_{t_k'} = A_{t'} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Из последнего равенства следует, что A устойчива по Пуассону хотя бы в одном направлении, что противоречит условию. Теорема доказана.

Обозначим через $E_0 := \{u \in E^n : \sup\{\|\varphi(t,u,A)\| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ и $\mathbb{P}_0$ - проектор, отображающий E^n на E_0. Имеет место

Лемма 3.8.2. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$. Если функция A ограничена на $\mathbb{R}$ и уравнение (3.8.1) слабо регулярно, то для любого $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ существует единственное решение $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ уравнения (3.8.2) удовлетворяющее следующим условиям:*

(1) $\mathbb{P}_0\varphi(0) = 0$;
(2) *существует положительная константа K (константа слабой регулярности (3.8.1)), не зависящая от f, такая что $\|\varphi\| \leqslant K\|f\|$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается по той же схеме, что и лемма 6.3 [**95**, с.515].

Следствие 3.8.3. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$. Если $H(A)$ компактно, то следующие условия эквивалентны :*

(1) *уравнение (3.8.1) слабо регулярно;*
(2) *при любой $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ существует единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ равномерно согласованное решение φ уравнения (3.8.2) удовлетворяющее следующим услови-
ям:*

$$a.\ \mathbb{P}_0\varphi(0) = 0 \quad \text{и} \quad b.\ ||\varphi|| \leq K||f||,$$

где K – константа слабой регулярности (3.8.1).

Теорема 3.8.4. *Пусть функция $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ ограничена на $\mathbb{R}$, уравнение (3.8.1) слабо регулярно и $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ удовлетворяет следующему условию: $||F(t,u)|| \leq c(||u||)$ $(\forall t \in \mathbb{R}$ и $u \in E^n)$, где $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая функция. Если $\{r > 0 \ :\ Kc(r) \leq r\} \neq \varnothing$, где K – константа слабой регулярности (3.8.1), то уравнение*

$$\dot{u} = A(t)u + F(t,u) \tag{3.8.5}$$

имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ решение.

Доказательство. Какова бы ни была $f \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$, уравнение (3.8.2) имеет единственное решение $\psi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$ такое, что

$$\mathbb{P}_0\psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \|\psi\| \leq \ K\|f\| \quad , \tag{3.8.6}$$

где K - константа слабой регулярности (3.8.1). Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = A(t)u + F(t, \varphi(t)) \ . \tag{3.8.7}$$

Так как $f(t) := F(t, \varphi(t))$ ограничена на $\mathbb{R}$ ($||f(t)|| = ||F(t, \varphi(t))|| \leq c(||\varphi(t)||) \leq c(||\varphi||)$), то уравнение (3.8.7) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение ψ_φ, удовлетворяющее условиям (3.8.6) и, следовательно,

$$||\psi_\varphi|| \leq K||f|| = K \sup_{t\in\mathbb{R}} ||F(t, \varphi(t))|| \leq Kc(||\varphi||) \ . \tag{3.8.8}$$

Определим оператор $\Phi : C_b(\mathbb{R}, E^n) \to C_b(\mathbb{R}, E^n)$ по следующему правилу $(\Phi\varphi)(t) = \psi_\varphi(t)$ ($\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n), t \in \mathbb{R}$). Покажем, что, если $r_0 > 0$ удовлетворяет условию $Kc(r_0) \leq r_0$, то шар $B[0, r_0] := \{\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n) : ||\varphi|| \leq r_0\}$ переходит в себя при отображении Φ. Действительно, если $\varphi \in B[0, r_0]$, то $||\Phi\varphi|| \leq Kc(||\varphi||) \leq Kc(r_0) \leq r_0$. Рассмотрим теперь $C_b(\mathbb{R}, E^n)$ - как подмножество вложенное в $C(\mathbb{R}, E^n)$. Прежде всего заметим, что любой шар $B[0, r] \subset C_b(\mathbb{R}, E^n)$ является выпуклым, ограниченным и замкнутым подмножеством $C(\mathbb{R}, E^n)$.

Отображение $\Phi : B[0, r_0] \to B[0, r]$ непрерывно в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Действительно, пусть $\{\varphi_k\} \subseteq B[0, r]$ и $\varphi_k \to \varphi$ в $C(\mathbb{R}, E^n)$. Рассмотрим последовательность $(\Phi\varphi_k)(t) := \psi_{\varphi_k}$ ($t \in \mathbb{R}$). Заметим ,что $f_k(t) := F(t, \varphi_k(t)) \to f(t) := F(t, \varphi(t))$ в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Если допустить, что это не так, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $L_0 > 0$ такие, что

$$\max_{|t|\leq L_0} ||F(t, \varphi_k(t)) - F(t, \varphi(t))|| \geq \varepsilon_0 \ .$$

Следовательно, существует $\{t_k\} \subseteq [-L_0, L_0]$ такая, что

$$||F(t_k, \varphi_k(t_k)) - F(t_k, \varphi(t_k))|| \geq \varepsilon_0 \ . \tag{3.8.9}$$

Так как последовательность $\{t_k\}$ ограничена, то ее можно считать сходящейся. Заметим, что $\varphi_k(t_k) \to \varphi(t_0)$, где $t_0 :=$

$\lim\limits_{k\to+\infty} t_k$. Действительно,

$$||\varphi_k(t_k)-\varphi(t_0)|| \le ||\varphi_k(t_k)-\varphi(t_k)|| + ||\varphi(t_k)-\varphi(t_0)|| \le \\ \le \max_{|t|\le L_0} ||\varphi_k(t)-\varphi(t)|| + ||\varphi(t_k)-\varphi(t_0)|| \ .$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, когда $k\to+\infty$, получим требуемое утверждение. Из неравенства (3.8.9) (учитывая, что последовательность $\{\varphi_k(t_k)\}$ сходится к $\varphi(t_0)$ при $k\to+\infty$) мы получим $\varepsilon_0 \le 0$, что противоречит выбору ε_0. Таким образом $f_k \to f$ в $C(\mathbb{R}, E^n)$ и, кроме того, $||f_k|| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} ||F(t,\varphi_k(t))|| \le c(||\varphi_k||) \le c(r_0)$, т.е. $||f_k(t)|| \le c(r_0)$ $(t\in\mathbb{R}\ )$ и, следовательно, $||f(t)|| \le c(r_0)$ $(t\in\mathbb{R}\ )$. С другой стороны, $\Phi\varphi_k$ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения

$$\dot u = A(t)u + f_k(t)\ .$$

Кроме того, функции $\{\Phi\varphi_k\}$ и их производные равномерно ограничены на $\mathbb{R}$ и, следовательно, последовательность $\{\Phi\varphi_k\}$ компактна в $C(\mathbb{R}, E^n)$. Так как $f_k \to f$ в $C(\mathbb{R}, E^n)$, то каждая предельная функция последовательности $\{\Phi\varphi_k\}$ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (3.8.2), удовлетворяющим условиям (3.8.6). Но в силу следствия 3.8.3 уравнение (3.8.2) имеет не более одного ограниченного на $\mathbb{R}$ решения, удовлетворяющего условиям (3.8.6). Из сказанного следует, что последовательность $\{\Phi\varphi_k\}$ сходится в $C(\mathbb{R}, E^n)$ и непрерывность $\Phi : B[0,r_0] \to B[0,r_0]$ установлена.

Теперь покажем, что отображение $\Phi : B[0,r_0] \to B[0,r_0]$ вполне непрерывно в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Для этого заметим, что

$$(\Phi\varphi)'(t) = A(t)(\Phi\varphi)(t) + F(t,\varphi(t))$$

и, следовательно,

$$||(\Phi\varphi)'(t)|| \le a||(\Phi\varphi)(t)|| + ||F(t,\varphi(t))|| \le ar_0 + c(r_0) \quad (t\in\mathbb{R})\ ,$$

где $a = \sup\{||A(t)|| : t\in\mathbb{R}\}$. Откуда следует, что $\Phi(B_{r_0})$ относительно компактно в топологии $C(\mathbb{R}, E^n)$. Согласно теореме Тихонова-Шаудера отображение Φ имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi \in B[0,r_0]$. Очевидно $\varphi \in B[0,r_0]$ является ограниченным на $\mathbb{R}$ решением уравнения (3.8.5). Теорема доказана.

Замечание 3.8.5. *Утверждение, близкое к теореме 3.8.4, получено в работе* [**71**], *но при более сильных ограничениях на нелинейное возмущение F.*

Теорема 3.8.6. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, $F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ и выполнены следующие условия:*

a. $a = \sup\{||A(t)|| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$;
b. *уравнение (3.8.1) слабо регулярно;*
c. $||F(t,u)|| \leq c(||u||)$ ($t \in \mathbb{R},\ u \in E^n$) *и* $\{r > 0 : Kc(r) \leq r\} \neq \varnothing$, *где $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая функция, а K – константа слабой регулярности (3.8.1);*
d. *сужение F_0 функции F на $\mathbb{R} \times B[0, r_0]$ удовлетворяет условию Липшица и $Lip(F_0) < K^{-1}$, где r_0 - некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству $Kc(r_0) \leq r_0$.*

Тогда уравнение (3.8.5) имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}$ равномерно согласованное решение.

Доказательство. Обозначим через $B_{r_0}(\mathfrak{M}) := \{\varphi \in C_b(\mathbb{R}, E^n) : ||\varphi(t)|| \leq r_0 \ (t \in \mathbb{R}\ )\}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_\varphi$, где $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{(A,F)}$. $B_{r_0}(\mathfrak{M})$ - является замкнутым подмножеством $C_b(\mathbb{R}, E^n)$ [**152**, с.60]. Оператор $\Phi : C_b(\mathbb{R}, E^n) \to C_b(\mathbb{R}, E^n)$, определенный так же, как и при доказательстве теоремы 3.8.4, переводит $B_{r_0}(\mathfrak{M})$ в себя. Действительно, если $\varphi \in B_{r_0}(\mathfrak{M})$, то функция $f(t) := F(t, \varphi(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ также принадлежит $B_{r_0}(\mathfrak{M})$. Согласно следствию 3.8.3 $\Phi\varphi$ есть единственное ограниченное на $\mathbb{R}$, равномерно согласованное решение уравнения (3.8.2), удовлетворяющее условиям (3.8.6). Кроме того, как и в теореме 3.5.2, $\Phi(B[0, r_0]) \subseteq B[0, r_0]$ и, следовательно, $\Phi(B_{r_0}(\mathfrak{M})) \subseteq B_{r_0}(\mathfrak{M})$. Пусть φ_1 и φ_2 из $B_{r_0}(\mathfrak{M})$. Заметим, что

$$(\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2)'(t) = A(t)[(\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2)(t)] + F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))$$

и поэтому

$$||\Phi\varphi_1 - \Phi\varphi_2|| \leq K \sup_{t \in \mathbb{R}} ||F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))||$$

$$\leq K Lip(F_0) ||\varphi_1 - \varphi_2|| \ .$$

Из последнего неравенства следует, что отображение $\Phi : B_{r_0}(\mathfrak{M}) \to B_{r_0}(\mathfrak{M})$ является сжатием, поэтому оно имеет единственную неподвижную точку, которая и является равномерно согласованным решением уравнения (3.8.5). Теорема доказана.

Следствие 3.8.7. *Если в условиях теоремы 3.8.6 функции $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и $F_0 = F|_{\mathbb{R}\times B[0,r_0]}$ совместно τ - периодичны (почти периодичны, рекуррентны, устойчивы по Пуассону, асимптотически τ - периодичны, асимптотически почти периодичны, асимптотически рекуррентны), то уравнение (3.8.5) допускает по крайнем мере одно τ - периодическое (почти периодическое, рекуррентное, устойчивое по Пуассону, асимптотически τ - периодическое, асимптотически почти периодическое, асимптотически рекуррентное) решение.*

Следствие 3.8.8. *Вопрос о существовании равномерно согласованных решений слабо нелинейных систем ранее изучался в работах* [**15**],[**152**]. *Основное отличие теоремы 3.8.6 от соответствующих результатов из* [**15**],[**152**] *состоит в том, что уравнение (3.8.1) может и не удовлетворять условию э.д. на $\mathbb{R}$. Кроме того, нелинейное возмущение не обьязательно мало по $u \in E^n$.*

2. В этом пункте изучим равномерно согласованные решения слабонелинейных диссипативных систем.

Теорема 3.8.9. *Пусть $A \in C(\mathbb{R}, [E^n]), F \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$, и выполнены следующие условия:*

(1) $a = \sup\{||A(t)|| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$;

(2) *существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$||U(t,A)U^{-1}(\tau,A)|| \le Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (t \ge \tau,\ t,\tau \in \mathbb{R});$$

(3) $||F(t,u)|| \le M + \varepsilon||u|| \quad (\ u \in E^n,\ t \in \mathbb{R}\ )$ *и* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0 < \nu^2(Na)^{-1}$.

Тогда уравнение (3.8.5) диссипативно, т.е. существует $R_0 > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup ||\varphi(t,\nu,B,G)|| < R_0 \quad (\ \nu \in E^n,\ (B,G) \in H(A,F)\ )\ ,$$

где $\varphi(\cdot, \nu, B, G)$ *– решение уравнения*

$$\dot{\nu} = B(t)\nu + G(t, \nu) \ , \tag{3.8.10}$$

удовлетворяющее условию $\varphi(0, \nu, B, G) = \nu$.

Доказательство. При каждом $B \in H(A)$ определим на E^n норму $|| \cdot ||_B$ равенством

$$||u||_B := \int\limits_0^{+\infty} ||U(t, B)u|| dt \ .$$

Также, как и в доказательстве теоремы 2.11.5, проверяется, что

$$\frac{1}{a}||u|| \leq ||u||_B \leq \frac{N}{\nu}||u|| \quad (\ u \in E^n \ ).$$

Положим

$$u(t) := ||\varphi(t, u, B, G)||_{B_t} = \int\limits_0^{+\infty} ||U(s, B_t)\varphi(t, u, B, G)|| ds \ .$$

Так как

$$\varphi(t, u, B, G) = U(t, B)\big(u + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau, B)G(\tau, \varphi(\tau, u, B, G))d\tau\big),$$

то $u(t) =$

$$\int_0^{+\infty} ||U(s,B_t)U(t,B)\big[u + \int_0^t U^{-1}(\tau,B)G(\tau,\varphi(\tau,u,B,G))d\tau\big]||ds$$

$$= \int_0^{+\infty} ||U(s+t,B)(u + \int_0^t U^{-1}(\tau,B)G(\tau,\varphi(\tau,u,B,G))d\tau)||ds$$

$$\leq \int_0^{+\infty} ||U(s+t,B)u||ds \tag{3.8.11}$$

$$+ \int_0^{+\infty} || \int_0^t U(s+t,B)U^{-1}(\tau,B)G(\tau,\varphi(\tau,u,B,G))d\tau)||ds$$

$$\leq \frac{N}{\nu}e^{-\nu t}||u|| + \int_0^{+\infty}\int_0^t N e^{-\nu(s+t-\tau)}(M + \varepsilon||\varphi(\tau,u,B,G)||)d\tau ds$$

$$= \frac{N}{\nu}e^{-\nu t}||u|| + \frac{N}{\nu}e^{-\nu t}\big(\frac{M}{\nu}(e^{\tau t} - 1) + \varepsilon \int_0^t ||\varphi(\tau,u,B,G)||e^{\nu\tau}d\tau\big)$$

$$\leq \frac{N}{\nu}e^{-\nu t}||u|| + \frac{NM}{\nu^2}(1 - e^{-\nu t})$$

$$+\frac{N\varepsilon}{\nu}e^{-\nu t}\int_0^t a||\varphi(\tau,u,B,G)||_{B_\tau}e^{\nu\tau}d\tau$$

$$= \frac{N}{\nu}e^{-\nu t}||u|| + \frac{NM}{\nu^2}(1 - e^{-\nu t}) + \frac{aN\varepsilon}{\nu}e^{-\nu t}\int_0^t u(\tau)e^{\nu\tau}d\tau.$$

Положим $\varphi(t) := u(t)e^{\nu t}$. Из неравенства (3.8.11) следует, что

$$\varphi(t) \leq \frac{N}{\nu}||u|| + \frac{NM}{\nu^2}(e^{\nu t} - 1) + \frac{a\varepsilon N}{\nu}\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau \qquad (3.8.12)$$

и по теореме 9.3 из **[29]** $\varphi(t) \leq \psi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, где ψ - решение интегрального уравнения

$$y(t) = \frac{N}{\nu}||u|| + \frac{NM}{\nu^2}(e^{\nu t} - 1) + \frac{a\varepsilon N}{\nu}\int\limits_0^t y(\tau)d\tau \ .$$

Решая последнее уравнение, находим, что

$$\psi(t) = \Big(\frac{N}{\nu}||u|| + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N}\Big)e^{\frac{a\varepsilon N}{\nu}t} + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N}e^{\nu t}$$

и, следовательно,

$$u(t)e^{\nu t} \leq \Big(\frac{N}{\nu}||u|| + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N}\Big)e^{\frac{a\varepsilon N}{\nu}t} + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N}e^{\nu t} \ . \qquad (3.8.13)$$

Из неравенств (3.8.11) и (3.8.13) получаем

$$||\varphi(t,u,B,G)|| \leq a|\varphi(t,u,B,G)||_{B_t} \leq$$
$$\leq a\Big(\frac{N}{\nu}||u|| + \frac{NM}{\nu^2 - a\varepsilon N}\Big)e^{-\frac{\nu^2 - a\varepsilon N}{\nu}t} + \frac{aNM}{\nu^2 - a\varepsilon N} \ .$$

Поэтому

$$\lim_{t\to+\infty}\sup||\varphi(t,u,B,G)|| \leq \frac{aMN}{\nu^2 - a\varepsilon N}$$

$(u \in E^n,\ (B,G) \in H(A,F))$, ибо $\nu - \frac{a\varepsilon N}{\nu} > 0$. Теорема доказана.

Следствие 3.8.10. *Простые примеры показывают, что в условиях теоремы 3.8.11 диссипативность не сводится к конвергенции. Сказанное подтверждается уравнением* $\dot{x} = -x + 2x(1 + x^2)^{-1}$.

Теорема 3.8.11. *Пусть* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n]),\ F \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ *и выполнены следующие условия :*

(1) $a := \sup\{\ ||A(t)|| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$

(2) *существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$\|U(t,A)U^{-1}(\tau,A)\| \le Ne^{-\nu(t-\nu)} \quad (t \ge \tau,\ t,\tau \in \mathbb{R})\ .$$

(3) $||F(t,u)|| \le M + \varepsilon||u||$ $(u \in E^n)$ *и* $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0 = \min(\frac{\nu}{N}, \frac{\nu^2}{Na})$, *где M некоторое положительное число.*

(4) *сужение F_0 функции F на $\mathbb{R} \times B[0,r_0]$, где r_0 положительное число, фигурирующее в теореме 3.8.6 (например, $r_0 = \frac{NM}{\nu-\varepsilon_0 N}$), удовлетворяет условию Липшица с константой $Lip(F_0) < N\nu^{-1}$.*

Тогда уравнение (3.8.3) диссипативно и в шаре $B[0,r_0]$ содержится ровно одно ограниченное на $\mathbb{R}$ равномерно согласованное решение этого уравнения.

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно следует из теорем 3.8.6 и 3.8.9

Замечание 3.8.12. *Теоремы 3.8.6 – 3.8.11 имеют место и для уравнений вида (3.8.5) заданных в произвольных банаховых пространствах.*

Следствие 3.8.13. *Если в условиях теоремы 3.8.11 функции A и F_0 почти периодичны, то уравнение (3.8.5) диссипативно и его центр Левинсона содержит по крайнем мере одно почти периодическое решение.*

Следствие 3.8.14. *В условиях теоремы 3.8.11 и следствия 3.8.13 диссипативность не сводится к конвергенции.*

Приведем пример подтверждающий сказанное.

Пример 3.8.15. Рассмотрим скалярное автономное уравнение

$$\dot{x} = -kx + \alpha F(x)\ , \tag{3.8.14}$$

где

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{при } |x| \le 10 \\ 50 + 10[1 - \exp(10 - |x|)] & \text{при } |x| > 10 \end{cases}$$

при $0 < k \le 5\alpha$. При этом можно положить $r_0 = \frac{k}{\alpha}$. Легко проверить, что для уравнения (3.8.14) все условия теоремы 3.8.11

выполнены при выбранных α, k, и F. Кроме того, его центр Левинсона содержит по крайнем мере две различные точки покоя (на самом деле, их 3) и, следовательно, уравнение (3.8.14) не конвергентно.

Глава 4

Структура центра Левинсона неавтономных динамических систем с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений

4.1. Цепно рекуррентные движения

Пусть $\Sigma \subseteq X$ компактное инвариантное множество, $\Sigma, \varepsilon > 0$ и $t > 0$. Набор точек $\{x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = y; t_0, t_1, \dots, t_k\}$ точек $x_i \in \Sigma$ и чисел $t_i \in \mathbb{T}$ такой, что $t_i \geq t$ и $\rho(x_i t_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$ называется (ε, t, π)-цепью, соединяющей x и y. Через $P(\Sigma)$ обозначают множество $\{(x, y) : x, y \in \Sigma, \forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ t > 0\ \exists\ (\varepsilon, t, \pi)$-цепь от x к $y\}$. Отношение $P(\Sigma)$ замкнуто, инвариантно и транзитивно [**17**]. Точку $x \in \Sigma$ называют цепно рекуррентной, если $(x, x) \in P(\Sigma)$. Положим $\mathcal{R}(\Sigma) = \{x \in \Sigma : (x, x) \in P(\Sigma)\}$. Введем на $\mathcal{R}(\Sigma)$ отношение $\sim$ по следующему правилу: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in P(\Sigma)$ и $(y, x) \in P(\Sigma)$. Легко проверить, что введенное отношение $\sim$ на $\mathcal{R}(\Sigma)$ является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает его на классы эквивалентности $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ т.е. $\mathcal{R}(\Sigma) = \sqcup\{\mathcal{R}_\lambda \in \mathcal{L}\}$. Согласно предложению 2.6 из [**17**] составляющие классы, определенного выше разбиения множества $\mathcal{R}(\Sigma)$ являются замкнутыми и инвариантными множествами.

Лемма 4.1.1. *Если компактное инвариантное множество Σ из X содержит лишь конечное число минимальных множеств, то отношение $\sim$ разбивает множество $\mathcal{R}(\Sigma)$ на конечное число различных классов эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}(\Sigma) = \sqcup\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$. Так как $\mathcal{R}_\lambda \subseteq \Sigma$ замкнуты и инвариантны, а Σ компактно, то в $\mathcal{R}_\lambda$

согласно теореме Биркгофа содержится по крайнем мере одно минимальное множество. Следовательно, число различных классов эквивалентности не превосходит числа минимальных множеств. Лемма доказана.

Ниже мы укажем условие, когда число классов эквивалентности $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ конечно и в том случае, когда в Σ содержится бесконечное число минимальных множеств.

Следуя [**1**] в системе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k\}$ введем отношение частичного порядка: $\mathcal{R}_i < \mathcal{R}_j$, если существуют $i_1, i_2, \dots, i_r$ такие что $i_1 = i, i_r = j$ и $W^s(\mathcal{R}_{i_p}) \bigcap W^u(\mathcal{R}_{i_{p+1}}) \neq \varnothing$ при всех $p = 1, 2, \dots, r-1$.

Упорядоченный набор из r $(r \geq 2)$ различных индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ и удовлетворяющих условию $\mathcal{R}_{i_1} < \mathcal{R}_{i_2} < \dots < \mathcal{R}_{i_r} < \mathcal{R}_{i_1}$ называют r-циклом в наборе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \dots, \mathcal{R}_k\}$. Под 1-циклом понимают такой индекс i, что $W^s(\mathcal{R}_i) \bigcap W^u(\mathcal{R}_i) \setminus \mathcal{R}_i \neq \varnothing$.

Отметим, что введенное выше понятие частичного порядка является незначительной модификацией соответствующего понятия из [**17**, с.61].

Следуя [**1**],[**75**],[**80**] набор точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ (или $K := H(x_1) \cup H(x_2) \cup \dots \cup H(x_n)$) назовем обобщенным гомоклиническим контуром, если $\omega_{x_i} \cap \alpha_{x_{i+1}} \neq \varnothing$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, где $x_{n+1} = x_1$.

Лемма 4.1.2. *Пусть $\Sigma \subseteq X$ – компактное инвариантное множество и $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – обобщенный гомоклинический контур. Тогда $(x_i, x_j) \in P(\Sigma)$ при любых $i, j = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Будем считать для определенности, что $i \leq j$ и $0 \leq p = j - i \leq n$. Покажем, что $(x_i, x_j) \in P(\Sigma)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t > 0$. Так как $\omega_{x_k} \cap \alpha_{x_{k+1}} \neq \varnothing$ при всех $k = i+1, \dots, j-1$, то для чисел $\varepsilon > 0$, $t > 0$ и точки x_k $(k = i, i+1, \dots, j-2)$ найдутся $t'_k > t$, $t''_k < -t$ и $p_k \in \omega_{x_k} \cap \alpha_{x_k}$ такие, что $\rho(x_k t'_k, p_k) < \frac{\varepsilon}{3}$ и $\rho(x_k t''_k, p_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Положим $\overline{x}_0 := x_i, \overline{x}_1 := x_{i+1} t'_{i+1}, \dots, \overline{x}_{p-1} := x_j t''_j, \overline{x}_p := x_j; \overline{t}_0 := t'_i, \overline{t}_1 := t'_{i+1} - t''_{i+1}, \dots, \overline{t}_{p-1} := -t''_j$. Ясно, что $\{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p; \overline{t}_0, \overline{t}_1, \dots, \overline{t}_{p-1}\}$ является (ε, t, π) - цепью, соединяющей точки x_i и x_j. Лемма доказана.

В леммах 4.1.3-4.1.5 мы будем предпологать, что $\mathcal{R}(\Sigma)$ состоит из конечного числа различных классов эквивалентности $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \ldots, \mathcal{R}_k$ т.е. $\mathcal{R}(\Sigma) = \mathcal{R}_1 \sqcup \mathcal{R}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{R}_k$. Установим некоторые свойства множеств $\mathcal{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Лемма 4.1.3. *В наборе* $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \ldots, \mathcal{R}_k\}$ *нет* r $(r \geq 1)$ *циклов.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует $r \geq 1$ и $i_1, i_2, \ldots, i_r$ такие, что $\mathcal{R}_{i_1} < \mathcal{R}_{i_2} < \cdots < \mathcal{R}_{i_r} < \mathcal{R}_{i_1}$. Рассуждая также как и в лемме 4.1.2, можно убедиться, что множество $M := \mathcal{R}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{R}_{i_r}$ принадлежит одному классу эквивалентности и, следовательно, $r = 1$. Покажем, что 1-циклы в наборе $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \ldots, \mathcal{R}_k\}$ также отсутствуют. Действительно, если допустить, что существуют $1 \leq i \leq r$ и точкам x из $(W^s(\mathcal{R}_i) \cap W^u(\mathcal{R}_i)) \setminus \mathcal{R}_i$, то $H(x_0) \cup \mathcal{R}_i \subseteq (\Sigma)$. Причем $H(x_0) \cup \mathcal{R}_i$ принадлежит одному классу эквивалентности и, следовательно, $H(x_0) \cup \mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_i$. Последнее противоречит выбору x_0. Лемма доказана.

Лемма 4.1.4. *Множества* $\mathcal{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *локально максимальны в* Σ *т.е. для* $\mathcal{R}_i$ *существует окрестность* U_i *множества* $\mathcal{R}_i$ *в* Σ *такая, что* $\mathcal{R}_i$ *есть максимальное замкнутое инвариантное множество в* U_i.

Доказательство. Так как $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j \neq \varnothing$ для всех $i \neq j$, то существуют окрестности U_i множеств $\mathcal{R}_i$ такие, что $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Заметим, что в U_i множество $\mathcal{R}_i$ максимально. Действительно, если допустить, что существует компактное инвариантное множество $\Lambda_i \subset U_i$ такое, что $\Lambda_i \nsubseteq \mathcal{R}_i$, тогда $\Lambda_i \setminus \mathcal{R}_i \neq \varnothing$. Пусть $x \in \Lambda_i \setminus \mathcal{R}_i$. Так как α_x и ω_x цепно рекуррентны [**17**, с.33], то $\alpha_x, \omega_x \subseteq \mathcal{R}_i$, т.е. мы нашли $x \in (W^s(\mathcal{R}_i) \cap W^u(\mathcal{R}_i)) \setminus \mathcal{R}_i$ и, следовательно, $x \notin \mathcal{R}(\Sigma)$. С другой стороны, рассуждая также, как и при доказательстве леммы 4.1.2, можно показать, что x цепно рекуррентна, т.е. $x \in \mathcal{R}(\Sigma)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 4.1.5. *Множества* $\mathcal{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *неразложимы.*

Доказательство. Допустим, что при некотором i множество $\mathcal{R}_i$ представимо в виде объединения двух своих замкнутых, инвариантных подмножеств A_1 и A_2 т.е. $\mathcal{R}_i = A_1 \sqcup A_2$. Так, как $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \varnothing$ при всех $j \neq i$, то существуют окрестности U_1 и U_2 множеств A_1 и A_2 соответственно, такие что $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \varnothing$ и $(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2) \cap \mathcal{R}_j = \varnothing$ при всех $j \neq i$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ таково, что $B(A_1, \varepsilon_0) \subset \overline{U}_1$ и $B(A_2, \varepsilon_0) \subset \overline{U}_2$. Возьмем произвольные точки $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ и числа $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t > 0$. Так как $a_1, a_2 \in \mathcal{R}_i$, то для чисел ε и t найдется (ε, t, π)-цепь $\{a_1 = x_0, x_1, \dots, x_n = a_2; t_1, t_2, \dots, t_n\}$, соединяющая точки a_1 и a_2. Согласно теореме 2.24 из [**17**] можно считать, что $x_k \in \mathcal{R}_i$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. В силу выбора ε и инвариантности A_1 имеем $x_k \in A_1$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$ т.е. $x_n = a_2 \in A_1$. Последнее противоречит нашему допущению. Лемма доказана .

4.2. Спектральное разложение центра Левинсона

Пусть $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ - групповая неавтономная динамическая система, слои $X_y := \{x \in X : h(x) = y\}$ котороой гомеоморфны некоторому фиксированному n-мерному многообразию (например E^n) и $p \in X_y$. Следуя [**17**, с.213], обозначим через $W^s_\delta(p) := \{x \in X_y : \rho(xt, pt) \leq \delta, t \geq 0\}$ и $W^u_\delta(p) := \{x \in X_y : \rho(x\dot{t}, p\dot{t}) \leq \delta, t \leq 0\}$ $(\delta > 0)$.

Будем говорить, что компактное инвариантное множество $\Lambda \subseteq X$ гиперболично (неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ имеет гиперболическую структуру на Λ), если существуют положительные числа N, ν, δ и γ такие, что

- H1. $W^s_\delta(p) \cap W^u_\delta(p) = \{p\}$ при всех $p \in \Lambda$, $W^s_\delta(p)$ и $W^u_\delta(p)$ - подмногообразия из X_y $(y = h(p))$, гомеоморфные замкнутому диску в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^{n-k}$ соответственно. При этом, если $\rho(p, q) \leq \gamma$ $(p, q \in X_y)$, то $W^s_\delta(p) \cap W^u_\delta(p) \neq \emptyset$;
- H2. $\pi^t W^s_\delta(p) \subseteq W^s_\delta(\pi^t p)$ при всех $t \geq 0$ и $\pi^t W^u_\delta(p) \supseteq W^u_\delta(\pi^t p)$ при всех $t \leq 0$ и при каждом $p \in \Lambda$;
- H3. многообразия $W^s_\delta(p)$ и $W^u_\delta(p)$ непрерывно зависят от точки $p \in \Lambda$ в метрике Хаусдорфа;
- H4. (a) $\rho(p_1 t, p_2 t) \leq N exp(-\nu t) \rho(p_1, p_2)$ при всех $p_1, p_2 \in W^s_\delta(p)$ и $t \geq 0$;

(b) $\rho(p_1 t, p_2 t) \leq N exp(\nu t)\rho(p_1, p_2)$ при всех $p_1, p_2 \in W^u_\delta(p)$ и $t \leq 0$.

Замечание 4.2.1. *a. Если $\Lambda \subseteq X$ является гиперболическим в общепринятом смысле* [**17, 75**], *то, при некоторых дополнительных условиях гладкости, множество Λ будет гиперболическим и в смысле вышеприведенного определения. Обратное, вообще говоря, неверно.*

b. Для автономных динамических систем с дискретным временем близкое понятие (аксиома $A^{\#}$) содержится в работе [**1**].

Обозначим через $\mathfrak{M}(\Sigma)$ замыкание множества всех рекуррентных точек множества Σ. Имеет место следующая

Теорема 4.2.2. *Пусть Y – компактное минимальное множество, Σ – компактное инвариантное множество из X и выполнено одно из следующих двух условий:*

a. *число минимальных множеств в Σ конечно;*
b. *если в Σ содержится бесконечное число минимальных множеств, то на множестве $\mathfrak{M}(\Sigma)$, кроме, быть может, конечного числа изолированных минимальных множеств, неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ имеет гиперболическую структуру.*

Тогда отношение $\sim$ разбивает $\mathfrak{R}(\Sigma)$ на конечное число различных классов эквивалентности.

Доказательство. Если в Σ содержится лишь конечное число минимальных множеств, то утверждение теоремы совпадает с леммой 4.1.1

Пусть выполнено условие b. теоремы. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существует счетное семейство различных классов эквивалентности $\{\mathfrak{R}_k : k = 1, 2, \dots\}$. Так как $\mathfrak{R}_k$ замкнуты, инвариантны и Σ компактно, то в каждом $\mathfrak{R}_k$ найдется по крайней мере по одному минимальному множеству $M_k \subseteq \mathfrak{R}_k$. Так как Y минимально, то $h(M_k) = Y$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Пусть $y \in Y$ и $p_k \in M_k \cap X_y$. В силу компактности Σ последовательность $\{p_k\}$ можно считать сходящейся. Положим $p := \lim\limits_{k \to +\infty} p_k$ и заметим, что $p \in \Lambda := \overline{\cup\{M_k : k = 1, 2, \dots\}}$.

Не умаляя общности рассуждений множество Λ можно считать гиперболическим. Пусть $\gamma > 0$ – число, фигурирующее в **H1.** для множества Λ. Последовательность $\{p_k\} \subseteq \Lambda$ является сходящейся, поэтому, начиная с некоторого k_0, многообразия $W^s_\delta(p_{k_1})$ и $W^u_\delta(p_{k_2})$ имеют непустое пересечение при всех $k_1, k_2 \geq k_0$. Пусть теперь $k_1 \neq k_2$ и $k_1, k_2 \geq k_0$. Выберем $x_1 \in W^s_\delta(p_{k_1}) \cap W^u_\delta(p_{k_2})$, $x_2 \in W^u_\delta(p_{k_1}) \cap W^s_\delta(p_{k_2})$ и рассмотрим гомоклинический контур $K = H(x_1) \cup H(x_2)$. Согласно следствию 2.19 [**17**] и тому, что на ω (α) предельном множестве любые две точки эквивалентны в смысле отношения $\sim$, получаем эквивалентность любых двух точек гомоклинического контура K, т.е. K принадлежит одному классу эквивалентности. Таким образом, начиная с некоторого k_0, точки p_{k_1} и p_{k_2} эквивалентны при всех $k_1, k_2 \geq k_0$. Последнее противоречит тому, что точки $\{p_k\}$ выбраны из различных классов эквивалентности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 4.2.3. *Если выполнены условия теоремы 4.2.2 на центре Левинсона J системы $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$, то:*

(1) *отношение $\sim$ разбивает множество $\mathfrak{R}(J)$ на конечное число различных классов эквивалентности, т.е. $\mathfrak{R}(J) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_k$;*

(2) *множества $\mathfrak{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_k\}$ нет r $(r \geq 1)$ циклов;*

(3) *$J = \cup \{W^u(\mathfrak{R}_i) : i = \overline{1,k}\}$, где $W^u(\mathfrak{R}_i) := \{x \in X : \lim\limits_{t \to -\infty} \rho(xt, \mathfrak{R}_i) = 0\}$ $(i = \overline{1,k})$.*

Доказательство. Первые два утверждения теоремы 4.2.3 непосредственно вытекают из лемм 4.1.3-4.1.5 и теоремы 4.2.2. Докажем третье утверждение. Пусть $x \in W^u(\mathfrak{R}_i)$ $(i = \overline{1,k})$, тогда в силу компактной диссипативности $(X, \mathbb{S}, \pi)$ множество $H(x)$ компактно и, следовательно, $x \in J$.

Обратно. Пусть $x \in J$. В силу компактности и инвариантности J множества α_x и ω_x непусты, компактны, неразложимы и цепно рекуррентны [**17**]. Так как в условиях теоремы 4.2.2 $\mathfrak{R}(J) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_k$ и множества $\mathfrak{R}_i$ $(i = \overline{1,k})$ не пересекаются, замкнуты и инвариантны, то существуют

$i, j \in \{1, 2 \ldots, k\}$ такие, что $\alpha_x \subseteq \mathfrak{R}_i$ и $\omega_x \subseteq \mathfrak{R}_j$. Следовательно, $x \in W^u(\mathfrak{R}_j)$. Теорема доказана.

Замечание 4.2.4. *Теоремы 4.2.2 и 4.2.3 остаются справедливыми и в том случае, если в ней условие минимальности Y заменить следующим : Y содержит лишь конечное число минимальных множеств.*

4.3. Одномерные системы с гиперболическим центром

Пусть $\Lambda \subseteq X$ – гиперболическое множество неавтономной динамической системы $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$.

Замечание 4.3.1. *a. Если $p \in \Lambda$ таково, что $k = n$ ($k = 0$), то множество $H(p)$ экспоненциально устойчиво, или просто э.у. на $\mathbb{S}_+$ ($\mathbb{S}_-$).*

b. При $n = 1$ гиперболическое множество $H(p)$ либо э.у. на $\mathbb{S}_+$ либо на $\mathbb{S}_-$.

В дальнейшем в этом параграфе предполагается, что Y – компактное минимальное множество и $n = 1$.

Лемма 4.3.2. *Если компактное минимальное множество M из X гиперболично, то $h|_M : M \to Y$ есть гомеоморфизм (или, что то же самое, $M_y := M \cap X_y$ состоит ровно из одной точки при любом $y \in Y$).*

Доказательство. Пусть $M \subseteq X$ – компактное минимальное множество. Если M гиперболично, то согласно замечанию 4.3.1 b. можно считать, что M э.у. на S_+ и, следовательно, M равномерно устойчиво в положительном направлении, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(m_1, m_2) < \gamma$ ($m_1, m_2 \in M$ и $h(m_1) = h(m_2)$) влечет неравенство $\rho(m_1 t, m_2 t) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Для завершения доказательства леммы достаточно сослаться на теорему 3 из [**33**, с.110].

Лемма 4.3.3. *Если $\mathfrak{M}(\Sigma)$ гиперболично, то в Σ содержится конечное число минимальных множеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$ и, следовательно, $\mathfrak{M}(\Sigma) = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \cdots \sqcup M_k$.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует счетное семейство $\{M_k : k = 1, 2, \dots\}$ различных минимальных множеств в Σ. Пусть $y \in Y$ и $p_k \in M_k \cap X_y$ $(k = 1, 2, \dots)$. Так, как $p_k \in \mathfrak{M}(\Sigma)$, то $\{p_k\}$ можно считать сходящейся. Пусть $p_k \to p$. Заметим, что $p \in \mathfrak{M}(\Sigma)$. Так как $\mathfrak{M}(\Sigma)$ гиперболично, то можно считать (см. замечание 4.3.1 b.), что $H(p)$ э.у. на $\mathbb{S}_+$. Поэтому существует $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\rho(p_{k_1}t, p_{k_2}t) \leq Nexp(-\nu t)\rho(p_{k_1}, p_{k_2})$ при всех $k_1, k_2 \geq k_0$ и $t \geq 0$. Из последнего неравенства следует, что $\rho(p_{k_1}t, p_{k_2}t) \to 0$ при $t \to +\infty$ при всех $k_1, k_2 \geq k_0$. Но это противоречит совместной рекуррентности p_{k_1} и p_{k_2} (таковыми они являются согласно лемме 4.3.2). Полученное противоречие доказывает лемму 4.3.3.

Лемма 4.3.4. *В условиях леммы 4.3.3 для любой точки $x \in \Sigma$ существуют (и определяются однозначно) рекуррентные точки p_1 и p_2 $(h(p_1) = h(p_2) = h(x))$ такие, что*

$$a. \lim_{t \to +\infty} \rho(xt, p_1t) = 0 \quad \text{и} \quad b. \lim_{t \to -\infty} \rho(xt, p_2t) = 0. \tag{4.3.1}$$

Доказательство. Пусть $x \in \Sigma$, ω-и α-предельные множества ω_x и α_x непусты, компактны и каждое из них содержит хотя бы по одному минимальному множеству M_1 и M_2 соответственно (M_1 и M_2 не обязательно различны). Так как Y минимально, то $h(M_1) = h(M_2) = Y$ и в силу гиперболичности $\mathfrak{M}(\Sigma)$ множества M_{1y} и M_{2y} состоят ровно из одной точки, каково бы ни было $y \in Y$.

Пусть x нерекуррентна (в противном случае лемма очевидна) и $M_{iy} = \{p_i\}$ $(i = 1, 2)$. Существуют $t_{1n} \to +\infty$ и $t_{2n} \to -\infty$ такие, что $xt_{1n} \to p_1$ и $xt_{2n} \to p_2$. Согласно лемме 4.3.2 $p_i t_{in} \to p_i$ $(i = 1, 2)$ при $n \to +\infty$. Откуда следует, что

$$\rho(xt_{in}, p_i t_{in}) \to 0 \tag{4.3.2}$$

a. Пусть M_1 э.у. на $\mathbb{S}_+$. Тогда из (4.3.2) следует (4.3.1a). Покажем, что имеет место (4.3.1б). Действительно, если M_1 э.у. на S_+, то M_2 э.у. на S_+. Если допустить противное, то согласно (4.3.2) $\rho(xt, p_2t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Из леммы 4.3.2 следует, что $p_1 = p_2 = p$. Пусть $\varepsilon = \rho(x, p) > 0$ и $\gamma(\varepsilon) > 0$ выбрано для ε из условия равномерной устойчивости $H(p)$ на $\mathbb{S}_+$. Из (4.3.2) следует, что при достаточно больших n имеем $\rho(xt_{2n}, p_2t_{2n}) <$

$\gamma(\varepsilon)$ и, следовательно, $\rho(x(t+t_{2n}), p_2(t+t_{2n})) < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. В частности, $\rho(x,p) < \varepsilon$, что противоречит выбору ε. Полученное противоречие доказывает э.у. на $\mathbb{S}_-$ множества M_2. Из (4.3.2) следует равенство (4.3.1б).

b. Покажем, что множество $M_1 \subseteq \omega_x$ не может быть э.у. на $\mathbb{S}_-$. Действительно, если допустить противное, то из (4.3.2) следует, что $\rho(xt, p_1 t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Значит, $\alpha_x = M_1 \subseteq \omega_x$. Таким образом, $M_2 = M_1 = \alpha_x \subseteq \omega_x$. Пусть $p := p_1 = p_2 \in M_1 \cap X_y = M_2 \cap X_y$ и $\varepsilon = \rho(x,p) > 0$. Дальше, рассуждая так же, как и в конце предыдущего пункта, получаем противоречие, что и доказывает э.у. на $\mathbb{S}_+$ минимального множества $M_1 \subseteq \omega_x$. Лемма доказана.

В условиях леммы 4.3.3 в Σ содержится лишь конечное число различных минимальных множеств $M_1, M_2, \dots, M_k$ и $\mathfrak{M}(\Sigma) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$. Пусть $y \in Y$ и $\{\gamma_i(y)\} = M_i \cap X_y$. Будем считать, что $M_1, M_2, \dots, M_k$ упорядочены таким образом, что $\gamma_1(y) < \gamma_2(y) < \dots < \gamma_k(y)$. Положим $\mu_y := \inf \Sigma_y$ и $\nu_y := \sup \Sigma_y$. Очевидно, $\mu_y, \nu_y \in \Sigma_y$.

Лемма 4.3.5. *В условиях леммы 4.3.3 имеют место равенства* $\mu_y = \gamma_1(y)$ *и* $\nu_y = \gamma_k(y)$ *при всех* $y \in Y$.

Доказательство. Докажем, например, первое равенство (второе доказывается аналогично). Если допустить, что для некоторого $y \in Y$ $\mu_y \neq \gamma_1(y)$, то $\mu_y < \gamma_1(y)$. Согласно лемме 4.3.4 существуют рекуррентные точки p_1 и p_2 из $\mathfrak{M}(\Sigma)$ такие, что имеют место равенства (4.3.1) a. и b. Покажем, что $p_1, p_2 \leq \gamma_1(y)$. Действительно, из (4.3.1) следует существование $t_{1n} \to +\infty$ и $t_{2n} \to -\infty$ таких, что $\mu_y t_{1n} \to p_1$ и $\mu_y t_{2n} \to p_2$. Кроме того, согласно лемме 4.3.2, $\gamma_i(y) t_{in} \to \gamma_i(y)$ $(i = 1, 2)$. Так как $\mu_y < \gamma_1(y)$, то $\mu_y t_{1n} < \gamma_1(y) t_{1n}$ и, следовательно, $p_1 \leq \gamma_1(y)$. Аналогично $p_2 \leq \gamma_1(y)$. Таким образом, $p_1 = p_2 = \gamma_1(y)$. Так как $H(\gamma_1(p)) = M_1$ гиперболично, то M_1 з.у. на $\mathbb{S}_+$ либо на $\mathbb{S}_-$. Дальше рассуждая так же, как и в лемме 4.3.4, получаем противоречие. Лемма доказана.

Теорема 4.3.6. *Пусть* $\Sigma \subseteq X$ *– непустое компактное инвариантное множество и* $\mathfrak{M}(\Sigma) \subseteq \Sigma$ *гиперболично. Тогда:*

(1) *в* Σ *содержится лишь конечное число различных минимальных множеств* $M_1, M_2, \dots, M_k$ *и* $\mathfrak{M}(\Sigma) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$*;*

(2) *каждое минимальное множество* M_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ *гомеоморфно* Y *и, в частности, если* Y *почти периодично (*τ *- периодично), то* M_i *обладает тем же свойством;*

(3) *какова бы ни была точка* $x \in \Sigma$ *существуют такие точки* p_1 *и* p_2 *из* $\mathfrak{M}(\Sigma)$*, что имеют место соотношения (4.3.1);*

(4) *если* $M_1, M_2, \dots, M_k$ *упорядочены таким образом, что* $\gamma_i(y) < \gamma_j(y)$ *при всех* $y \in Y$*, где* $\{\gamma_i(y)\} := M_i \cap X_y$*, тогда и только тогда, когда* $i < j$*, то* $\partial\Sigma = M_1 \cup M_k$*, где* $\partial\Sigma$ *– граница* Σ*.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из лемм 4.3.2-4.3.5.

Теорема 4.3.7. *Пусть неавтономная динамическая система* $\langle (X, \mathbb{S}, \pi), (Y, \mathbb{S}, \sigma), h \rangle$ *компактно диссипативна. Если* $\mathfrak{M}(J)$ *гиперболично, где* J *– центр Левинсона* $(Y, \mathbb{S}, \sigma)$*, то:*

(1) *в* J *содержится лишь конечное число различных минимальных множеств* $M_1, M_2, \dots, M_k$*, каждое из которых гомеоморфно* Y *и* $\mathfrak{M}(J) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$*;*

(2) *какова бы ни была точка* $x \in J$ *существуют точки* p_1 *и* p_2 *из* $\mathfrak{M}(J)$ *такие, что выполнены соотношения (4.3.1);*

(3) *если* $x \notin J$*, то*
   (a) $\rho(xt, \gamma_1(y)t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *и* $x < \gamma_1(y)$*, где* $y = h(x)$*;*
   (b) $\rho(xt, \gamma_k(y)t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *и* $x > \gamma_k(y)$*.*

(4) $\partial J = M_1 \cup M_k$ *и* ∂J *равномерно асимптотически устойчиво в положительном направлении (в частности,* k *нечетно).*

Доказательство. Теорема 4.3.7 по существу вытекает из теоремы 4.3.6 и свойств Центра Левинсона.

Замечание 4.3.8. *Хотя теоремы 4.3.6 и 4.3.7 доказаны для одномерных систем, на самом деле, мы всюду пользовались только следствием из одномерности (см. замечание 4.3.1 b.). Поэтому, если кроме гиперболичности $\mathfrak{M}$ требовать, чтобы при каждом $m \in \mathfrak{M}$ множества $H(m)$ были э.у. либо на $\mathbb{S}_+$ либо на $\mathbb{S}_-$, то эти утверждения справедливы и в случае $n \geq 2$. При этом, минимальные множества в теоремах 4.3.6 и 4.3.7, вообще говоря, не будут гомеоморфны Y, а будут лишь конечнократными дистальными накрытиями Y, что также гарантирует их почти периодичность (периодичность), если Y почти периодично (периодично).*

4.4. Диссипативные каскады

Пусть M – гладкое многообразие, U – его открытое подмножество, $f : U \to f(U) \subseteq M$ – диффеоморфизм класса C^r $(r \geq 1)$, $\Lambda \subset U$ - максимальное компактное инвариантное множество диффеоморфизма f. Предположим, что U является областью притяжения Λ, т.е. $W^s(\Lambda) = U$. В этом случае динамическая система, порожденная степенями f, является диссипативной и ее центр Левинсона $J = \Lambda$.

Лемма 4.4.1. *Пусть $x_0 \in U$. Если ω_{x_0} является компактным гиперболическим множеством диффеоморфизма $f : U \to M$, то каковы бы ни были $x \in \omega_{x_0}$ и $\delta > 0$ найдется $p \in Per(f)$ такая, что $\rho(x, p) < \delta$ и $\Sigma_p \subseteq B(\omega_{x_0}, \delta)$, где $Per(f)$ – множество всех периодических точек f, Σ_p – траектория точки p.*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Можно считать δ настолько малым, что $B(\omega_{x_0}, \delta) \subset \widetilde{U}(\omega_{x_0})$ где $\widetilde{U}(\omega_{x_0})$ окрестность гиперболического множества ω_{x_0}, фигурирующая в теореме Д.В.Аносова о семействах ε-траекторий [**75**, с.220]. Выберем в упомянутой теореме ε $(\varepsilon < \frac{\delta}{2})$ соответствующее числу $\frac{\delta}{2}$. Тогда для $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется $l > 0$ такое, что $f^n x_0 \in B(\omega_{x_0}, \frac{\varepsilon}{2})$ при всех $n \geq l$. Если $x \in \omega_{x_0}$, то существует $n_0 \geq l$ такое, что $f^n x_0 \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Положим $x_1 = f^{n_0} x_0$. Найдется $N > 0$ такое, что $f^N x_1 \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Рассмотрим пространство

$X_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ с дискретной топологией, гомеоморфизм сдвига $\tau : X_N \to X_N$, $\tau(k) = k + 1 \; mod(N)$, и отображение $\varphi : X_N \to M$, определенное равенством $\varphi(k) = f^k x_1$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$). Заметим, что $\varphi : X_N \to B(\omega_{x_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \widetilde{U}(\omega_{x_0})$. Далее: $P(\varphi \circ \tau, f \circ \varphi) := \sup\limits_{0 \le k \le N-1} \rho(\varphi(\tau(k)), f(\varphi(k))) \le \rho(x_1, f^N x_1)$. Так как $\rho(x_1, f^N x_1) \le \rho(x_1, x) + \rho(x, f^N x_1) < \varepsilon$, то $P(\varphi \circ \tau, f \circ \varphi) < \varepsilon$. Согласно теореме о семействах ε-траекторий найдется непрерывное отображение $\psi : X_N \to \widetilde{U}(\omega_{x_0})$ такое, что $\psi \circ \tau = f \circ \psi$ и $P(\varphi, \psi) < \frac{\delta}{2}$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $\psi(0) \in Per(f)$, $\rho(\psi(0), x) < \frac{\delta}{2}$ и $\psi(k) \in B(\omega_{x_0}, \delta)$ при всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Следствие 4.4.2. *Если Σ локально максимально и $\omega_{x_0} \subseteq \Sigma$, то, в условиях леммы 4.4.1, в Σ содержится по крайней мере одна периодическая точка f.*

Следствие 4.4.3. *Пусть Λ – локально максимальное компактное инвариантное множество. Если $\Sigma \subseteq \omega_{x_0} \subseteq \Lambda$ – компактное минимальное множество, не содержащее периодических траекторий, то в условиях леммы 4.4.1, в Λ имеется бесконечное число различных гиперболических периодических точек $p_k \to p \in \Sigma \subseteq \omega_{x_0}$, причем $\Sigma_{p_k} \subseteq B(\omega_{x_0}, \varepsilon_k)$ и $\varepsilon_k \downarrow 0$.*

Напомним, что множество $M \subseteq X$ динамической системы $(X, \mathbb{S}, \pi)$ называют квазиминимальным, если существует устойчивая по Пуассону точка $p \in M$ такая, что $M = H(p)$.

Теорема 4.4.4. *Пусть $f : U \to M$ диффеоморфизм класса C^k ($k \ge 1$) и Λ – компактное инвариантное множество f. Если $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$ гиперболично, то:*

1. *отношение $\sim$ разбивает множество $\mathfrak{R}(\Lambda)$ на конечное число классов эквивалентности т.е. $\mathfrak{R}(\Lambda) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$;*
2. *множества $\mathfrak{R}_i$ ($i = \overline{1, k}$) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$ нет r - циклов, где $r \ge 1$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 4.2.2.

Следствие 4.4.5. *Пусть M – гладкое многообразие и $f : M \to M$ – диффеоморфизм класса C^k ($k \geq 1$). Если множество цепно рекуррентных точек $\mathfrak{R}(f)$ диффеоморфизма f компактно и гиперболично, то:*

(1) *отношение $\sim$ разбивает $\mathfrak{R}(f)$ на конечное число классов эквивалентности т.е. $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_k$;*

(2) *множества $\mathfrak{R}_i$ ($i = \overline{1,k}$) замкнуты, инвариантны, квазиминимальны, локально максимальны и в наборе $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$ нет r ($r \geq 1$) циклов;*

(3) *если, кроме того, в M содержится бесконечное число минимальных множеств, то в M существует нетривиальное (отличное от периодической траектории) минимальное множество.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 4.4.4, теорем 7.5 (и его дискретного аналога) и 7.8 из [**1**] и леммы 6.4 из [**75**].

Теорема 4.4.6. *Пусть диффеоморфизм $f : U \to M$ диссипативен и J – его центр Левинсона. Если выполнено одно из следующих двух условий:*

a. *в Λ содержится лишь конечное число минимальных множеств;*

b. *в Λ содержится бесконечное число минимальных множеств и $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$ гиперболично* [**75**],

то:

(1) *отношение $\sim$ разбивает множество цепно рекуррентных точек $\mathfrak{R}(f)$ диффеоморфизма f на конечное число классов эквивалентности, т.е. $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_k$;*

(2) *множества $\mathfrak{R}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$ нет r ($r \geq 1$) циклов;*

(3) *$J = \cup\{W^u(\mathfrak{R}_i) : i \in \overline{1,k}\}$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 4.2.3. Действительно, если множество $\mathfrak{M}_0(\Lambda) \neq \emptyset$ и гиперболично, то из результатов [**75**] (теоремы 0.1, 5.4 и теорема 2 из 1-ого добавления) следует, что на множестве

$\mathfrak{M}(\Lambda)$, кроме, быть может, конечного числа изолированных минимальных множеств, динамическая система, порожденная степенями f, имеет гиперболическую структуру в смысле нашего определения.

Замечание 4.4.7. *a. Теорема 4.4.6 является аналогом известной теоремы Смейла о спектральном разложении* [**75**] *для A-диффеоморфизмов.*

b. Утверждение, аналогичное теореме 4.4.6, имеет место и для потоков.

Теорема 4.4.8. *Пусть диффеоморфизм $f : U \to M$ диссипативен и его центр Левинсона содержит бесконечное число минимальных множеств. Если множество $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$ гиперболично, то имеют место утверждения 1.-3. теоремы 4.4.4. Кроме того, в Λ содержится бесконечное число гиперболических периодических траекторий.*

Доказательство. Согласно теореме 4.4.6 достаточно показать, что в Λ содержится бесконечное число различных гиперболических периодических траекторий. Обозначим через $\widetilde{U} \subset U$ окрестность множества $\mathfrak{M}_0(\Lambda)$ такую, что любое компактное, инвариантное относительно f, множество $\Lambda' \subset \widetilde{U}$ является гиперболическим. Согласно теореме 2 [**75**, с.224] такая окрестность существует. Согласно [**54**, с.52] метрическое пространство 2^Λ компактно. Так как в Λ содержится бесконечное число минимальных множеств $\{M_i\}$ и $M_i \subseteq \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{R}_k$, то можно считать, что $M_i \subseteq \mathfrak{R}_1$ $(i = 1, 2, \dots)$. В силу компактности 2^Λ последовательность $\{M_i\}$ можно считать сходящейся в метрике Хаусдорфа. В частности, начиная с некоторого i_0, имеем $M_i \subseteq \widetilde{U}$ при $i \geq i_0$. В силу выбора $\widetilde{U}$ все минимальные множества M_i $(i \geq i_0)$ гиперболичны. Логически возможны следующие два случая:

a. все минимальные множества M_i $(i \geq i_0)$ периодичны и в этом случае теорема доказана.

b. среди минимальных множеств M_i $(i \geq i_0)$ есть минимальное множество M, которое не сводится к периодической траектории. Тогда согласно следствию 4.4.3 существует бесконечное число различных периодических точек $p_k \to p \in M$, причем $\Sigma_{p_k} \subseteq B(M, \varepsilon_k)$ и $\varepsilon_k \downarrow 0$. Так как $M_i \subseteq \mathfrak{R}_1$ $(i \geq i_0)$ и

$\mathfrak{R}_1$ замкнуто и локально максимально, то начиная с некоторого m_0 имеем $p_m \in \mathfrak{R}_1$. Теорема доказана.

Напомним [**1**]-[**2**], что инвариантное множество Λ диффеоморфизма $f : U \to M$ называется фактор-марковским, если существует ТМЦ (топологическая марковская цепь [**1**]) $T : \Omega_\Pi \to \Omega_\Pi$ и непрерывное отображение $\varphi : \Omega_\Pi \to \Lambda$ такое, что $\varphi \circ T = f \circ \varphi$. Если φ является гомеоморфизмом, то Λ называется марковским.

Следствие 4.4.9. *В условиях теоремы 4.4.8 в $\mathfrak{R}$ существует локально максимальное гиперболическое марковское множество $\Lambda \subseteq \mathfrak{R}$ и, в частности, в $\mathfrak{R}$ содержится трансверсальная гомоклиническая траектория.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 4.4.8, а также теорем 7.7 [**1**] и 2.4 [**80**].

4.5. Периодические диссипативные системы

1. Пусть
$$\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle \tag{4.5.1}$$
неавтономная динамическая система. Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что динамическая система $(Y, \mathbb{T}_2, \sigma)$ периодична, т.е. существуют $\tau \in \mathbb{T}_2$ $(\tau > 0)$ и $q \in Y$ такие, что $\sigma(q, \tau) = q$ и $Y = \{\sigma(q, t) : 0 \leq t < \tau\}$. При этом неавтономная динамическая система (4.5.1) называется τ-периодической. Обозначим через $P : X_q \to X_q$ – отображение, определенное равенством $P(x) = \pi(\tau, x)$ и (X_q, P) каскад, порожденный степенями P.

Лемма 4.5.1. *Для того чтобы неавтономная динамическая система (4.5.1) была поточечно (компактно, локально) диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы каскад (X_q, P) был поточечно (компактно, локально) диссипативен. При этом имеют место соотношения:*

$$J = \{\pi^t J_q : 0 \leq t < \tau\} \quad \text{и} \quad J_q := J \cap X_q,$$

где J – центр Левинсона динамической системы (4.5.1), а J_q - центр Левинсона каскада (X_q, P).

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Следствие 4.5.2. *Если (X, h, Y) – конечномерное векторное расслоение, то центр Левинсона J неавтономной диссипативной динамической системы (4.5.1) и J_q связны.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теорем 1.9.14, 1.9.17 и следствия 1.9.18.

Следствие 4.5.3. *В условиях следствия 4.5.2 существует $r > 0$ и для любого $a > 0$ найдется $k(a) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $P^k B[0, a] \subseteq B[0, r]$ для всех $k \geq k(a)$, где $B[0, a]$ шар в X_q радиуса a с центром в начале координат.*

Доказательство. Следствие 4.5.3 вытекает из теоремы 2.6.8 и леммы 4.5.1.

Следствие 4.5.4. *В условиях следствия 4.5.2 существует неподвижная точка отображения $P : X_q \to X_q$.*

Доказательство. Следствие 4.5.4 вытекает из теоремы Браудера [**164**] о неподвижной точке и следствия 4.5.3.

Теорема 4.5.5. *Пусть (X, h, Y) – конечномерное вектор ное расслоение. Существует непустое компактное инвариантное множество J (центр Левинсона) диссипативной динамической системы (4.5.1), обладающее следующими свойствами:*

(1) *при каждом $y \in Y$ множество $J_y = J \cap X_y$ связно;*
(2) *для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что $\rho(x, J_y) < \delta$ ($x \in X_y$) влечет $\rho(xt, J_{yt}) < \epsilon$ при всех $t \geq 0$;*
(3) *при каждом $y \in Y$ и $x \in X_y$ $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(xt, J_{yt}) = 0$;*
(4) *в центре Левинсона J системы (4.5.1) содержится по крайней мере одна τ-периодическая точка.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из леммы 2.1.1, теоремы 2.1.3 и следствия 4.5.4.

Теорема 4.5.6. *Если X_q – комплексное n-мерное пространство и отображение $P : X_q \to X_q$ голоморфно, то $J_q = \{p\}$*

и $\lim\limits_{t\to+\infty}\rho(xt,pt)=0$ *при всех* $x\in X_q$, *т.е. система (4.5.1) конвергентна.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения получается незначительной модификацией рассуждений из теоремы 3.2.2.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u}=f(t,u)\quad (t\in\mathbb{R},\ u\in E^n) \tag{4.5.2}$$

с ω-периодической правой частью $t\in\mathbb{R}$ и непрерывно дифференцируемой по пространственной переменной $u\in E^n$. Если функция $f\in C(\mathbb{R}\times E^n,E^n)$ регулярна, то, как было показано выше (см. пример 3.1.2), уравнение (4.5.2) порождает некоторую неавтономную (и, очевидно, τ-периодическую) динамическую систему. Применяя к ней теоремы 4.4.4, 4.4.6, и 4.4.8, получим соответствующие утверждения для уравнения (4.5.2).

Пусть $P:E^n\to E^n$ преобразование Пуанкаре уравнения (4.5.2) т.е. $P(u)=\varphi(\tau,u,f)$. Множеством цепно рекуррентных точек уравнения (4.5.2) назовем множество цепно рекуррентных точек каскада (E^n,P). Известно (см., например, [**17**, с.56]), что для уравнения (4.5.2) с гладкой правой частью множество цепно рекуррентных точек $\mathfrak{R}$ совпадает с множеством Π, порождающим периодические (периода $k\tau$, где $k\in\mathbb{N}$) решения (4.5.2) (по поводу определения Π см. [**80**, с.278]).

Теорема 4.5.7. *Предположим, что для уравнения (4.5.2) множество цепно рекуррентных точек* $\mathfrak{R}$ *компактно и множество* $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{R})$ *гиперболично, тогда*

(1) *отношение* $\sim$ *разбивает множество* $\mathfrak{R}$ *на конечное число классов эквивалентности, т.е.* $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\sqcup\mathfrak{R}_2\sqcup\dots\sqcup\mathfrak{R}_k$;

(2) *множества* $\mathfrak{R}_i$ $(i=\overline{1,k})$ *замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе* $\{\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_2,\dots,\mathfrak{R}_k\}$ *нет* r $(r\geq 1)$ *циклов;*

Следствие 4.5.8. *Предположим, что для уравнения (4.5.1) множество* Π, *порождающее периодические (периода* $k\omega$, *где* $k\in\mathbb{N}$*) решения компактно и гиперболично, тогда:*

(1) *отношение* $\sim$ *разбивает* Π *на конечное число классов эквивалентности, т.е.* $\Pi=\Pi_1\sqcup\Pi_2\sqcup\dots\sqcup\Pi_k$;

(2) *множества* Π_i *(*$i = \overline{1,k}$*) замкнуты, инвариантны, квазиминимальны, локально максимальны и в наборе* $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k\}$ *нет* r *(*$r \geq 1$*) циклов;*

(3) *кроме того, если в* Π *содержится бесконечное число минимальных множеств, то в* Π *существует нетривиальное минимальное множество.*

Последнее утверждение обобщает и усиливает теорему 3.3 из [**80**, с.280].

Теорема 4.5.9. *Пусть уравнение (4.5.2) диссипативно и* J *– его центр Левинсона. Если выполнено одно из следующих условий:*

a. *в* J *содержится лишь конечное число минимальных множеств;*

b. *в* J *содержится бесконечное число минимальных множеств и* $\mathfrak{M}_0(J)$ *гиперболично.*

Тогда:

(1) *отношение* $\sim$ *разбивает множество цепно рекуррентных точек* $\mathfrak{R}$ *уравнения (4.5.2) на конечное число классов эквивалентности т.е.* $\mathfrak{R}(J) = \mathfrak{R}_1 \sqcup \mathfrak{R}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{R}_k$*;*

(2) *множества* $\mathfrak{R}_i$ *(*$i = \overline{1,k}$*) замкнуты, инвариантны, неразложимы, локально максимальны и в наборе* $\{\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k\}$ *нет* r *(*$r \geq 1$*) циклов;*

(3) $J = \cup\{W^u(\mathfrak{R}_i) : i \in \overline{1,k}\}$.

Теорема 4.5.10. *Пусть уравнение (4.5.2) диссипативно,* J *– его центр Левинсона. Если в* J *содержится бесконечное число минимальных множеств и множество* $\mathfrak{M}_0(J)$ *гиперболично, то имеют место утверждения 1.-3. теоремы 4.5.9. Кроме того, в* J *содержится бесконечное число гиперболических периодических решений.*

Следствие 4.5.11. *В условиях теоремы 4.5.10 в* J *существует локально максимальное гиперболическое марковское множество* $\Lambda \subseteq J$ *и, в частности, в* J *содержится трансверсальная гомоклиническая периодическая траектория.*

Последнее утверждение вытекает из следствия 4.4.9.

Глава 5

Метод функций Ляпунова

5.1. Критерии диссипативности в терминах функций Ляпунова

Всюду в этом параграфе предполагается, что (X, h, Y) – банахово расслоение.

Теорема 5.1.1. *Пусть Y компактно и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна, т.е. для любого ограниченного множества $A \subseteq X$ существует $l = l(A) > 0$ такое, что $\pi^l A$ относительно компактно в X. Для того чтобы неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$, была ограниченно k-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}_+$ ($X_r := \{x \in X : \ |x| \geq r\}$), обладающая следующими свойствами:*

(1) *$V(x) \geq a(|x|)$ при всех $x \in X_r$, где $a \in \mathfrak{A}$ и $Im V \subseteq Im\, a$;*
(2) *если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \leq V(x)$;*
(3) *линии уровня функции V не содержат ω-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $K_1 := \{x \in X \ : |x| \leq r\}$. В силу компактности Y и локальной тривиальности банахового расслоения (X, h, Y) множество K_1 ограничено. Покажем, что K_1 является слабым b-аттрактором динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$, т.е. для любого $x \in X$ найдется $\tau = \tau(x) > 0$ такое, что $x\tau \in K_1$. Если допустить, что это не так, то найдется $x_0 \in X \setminus K$, для которого $x_0\tau \notin K$ при всех $t > 0$. Положим $\varphi(t) := V(x_0 t)$ $(t \geq 0)$, тогда $\varphi : \mathbb{T}_+ \to \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{T}_+ = \{t \in \mathbb{T}_1 \mid t \geq 0\}$) непрерывна, ограничена и монотонна, и, следовательно, существует $V_0 := \lim\limits_{t \to +\infty} V(x_0 t)$. Докажем, что в условиях теоремы точка x_0 устойчива L_+, т.е. $\{x_0t | t \in \mathbb{T}_+\}$ относительно компактно. В силу вполне непрерывности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ достаточно показать, что множество $\{x_0t \mid t \in \mathbb{T}_+\}$ ограничено. Последнее вытекает из того, что $a(|x_0t|) \le V(x_0t) \le V(x_0)$ при всех $t \in \mathbb{T}_+$, а, значит, $|x_0t| \le a^{-1}(V(x_0))$ $(t \in \mathbb{T}_+)$. Таким образом, множество $\{x_0t \mid t \in \mathbb{T}_+\}$ относительно компактно, поэтому $\omega_{x_0} \neq \emptyset$, компактно и инвариантно. Заметим, что $\omega_{x_0} \subseteq X_r$. Пусть $x \in \omega_{x_0}$, тогда в силу непрерывности функции V имеем $V(x) = V_0$. Последнее противоречит условию 3. теоремы. Полученное противоречие доказывает, что множество K_1 является слабым b-аттрактором динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и согласно теореме 1.7.3 неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ ограниченно k-диссипативна.

Ноебходимость. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ ограниченно k-диссипативна, J – ее центр Левинсона и $r > r_0$, где $r := \sup\{|x| : x \in J\}$. Определим функцию $V : X_r \to \mathbb{R}_+$ равенством

$$V(x) := \sup\{|xt| : t \ge 0\}. \tag{5.1.1}$$

Непосредственно из определения V следует, что:

(1) $V(x) \ge |x|$ при всех $x \in X_r$;
(2) если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \le V(x)$.

Покажем, что функция V непрерывна. Пусть $x_n \to x$ $(x, x_n \in X_r)$ и $R := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$, тогда в силу теоремы 2.6.1 для числа $R > 0$ найдется $l(R) > 0$ такое, что

$$|xt| \le r \ (t \ge l(R) \text{ и } |x| \le R). \tag{5.1.2}$$

Из (5.1.1) и (5.1.2) следует, что

$$V(x) = |x\tau| \tag{5.1.3}$$

при некотором $\tau(x) \in [0, l(R)]$ $(|x| \le R)$. Последовательность $\{V(x_n)\} = \{|x_n\tau_n|\}$ ограничена, где $\tau_n = \tau(x_n)$. Покажем, что она имеет единственную предельную точку. Пусть $\tilde{V}$ – одна из предельных точек последовательности $\{V(x_n)\}$. Существует подпоследовательность $\{V(x_{k_n})\}$ такая, что $V(x_{k_n}) \to \tilde{V}$ при $k \to +\infty$. Так как $\{\tau_{k_n}\}$ ограничена, то ее можно считать сходящейся. Тогда $\tilde{V} = |x\tau'|$, где $\tau' = \lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{k_n}$. Покажем, что $|x\tau'| = |x\tau| = V(x)$. Если допустить, что $|x\tau'| \neq |x\tau|$, то

$|x\tau| > |x\tau'|$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $|x\tau'| + 2\epsilon < |x\tau|$. Тогда для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$||x_{k_n}\tau| - |x\tau|| < \varepsilon \text{ и } ||x_{k_n}\tau_{k_n}| - |x\tau'|| < \varepsilon,$$

откуда

$$|x_{k_n}\tau| > |x\tau| - \varepsilon > |x\tau'| + \varepsilon > |x_{k_n}\tau_{k_n}| = V(x_{k_n}). \qquad (5.1.4)$$

Неравенство (5.1.4) противоречит выбору числа τ_{k_n} ($|x_{k_n}\tau_{k_n}| = \sup\{|x_{k_n}\tau| : \tau \geq 0\}$). Таким образом, $V(x) = |x\tau'|$ и, следовательно, $V(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} V(x_n)$. Отсюда следует непрерывность V.

Наконец, покажем, что линии уровня функции V не содержат ω-предельных точек $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Действительно, каково бы ни было $x \in X$, имеем $\omega_x \subseteq J$. По определению множества X_r оно не имеет общих точек с J и, следовательно, $\omega_x \bigcap V^{-1}(c) = \emptyset$, каковы бы ни были $c \in Im\, V$ и $x \in X_r$.

Лемма 5.1.2. *Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ – неавтономная динамическая система, Y компактно и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют $r_1 > 0$ и непрерывная функция $V_1 : X_{r_1} \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:*
   (a) *$V_1(x) \geq a_1(|x|)\}$ при всех $x \in X_{r_1}$, где $a_1 \in \mathfrak{A}$ и $Im\, V_1 \subseteq Im\, a_1$;*
   (b) *если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V_1(xt) \leq V_1(x)$;*
   (c) *линии уровня функции V_1 не содержат ω-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$;*

(2) *существуют $r_2 > 0$ и непрерывная функция $V_2 : X_{r_2} \to \mathbb{R}_+$, обладающая свойствами:*
   (a) *$V_2(x) \geq a_2(|x|)$ при всех $x \in X_{r_2}$, где $a_2 \in \mathfrak{A}$ и $Im\, V_2 \subseteq Im\,(a_2)$;*
   (b) *если $x\tau \in X_{r_2}$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V_2(xt) \leq V_2(x)$;*
   (c) *линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Доказательство. Покажем, что из условия 1. следует 2.. Действительно, если допустить, что это не так, то найдутся

$c_0 \in Im V$ и $x_0 \in V^{-1}(c_0)$ такие, что $x_0 t \in V^{-1}(c_0)$ при всех $t \geq 0$. Заметим, что $a(|x_0 t|) \leq V(x_0 t) = V(x_0) = c_0$, и, следовательно, $|x_0 t| \leq a^{-1}(c_0)$ при всех $t \geq 0$. В силу вполне непрерывности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ множество $\Sigma^+_{x_0}$ относительно компактно и, следовательно, $\omega_{x_0} \neq \emptyset$, компактно и $\omega_{x_0} \subseteq V^{-1}(c_0)$. Последнее противоречит условию 1. Полученное противоречие доказывает импликацию 1. $\Rightarrow$ 2. и в качестве V_2 можно взять V_1.

Покажем теперь, что из 2. следует 1. Рассуждая так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 5.1.1, можно показать, что динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ будет ограниченно k-диссипативной. Пусть J – центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ и $r_2 > r_0 = \sup\{|x| : x \in J\}$. Теперь в качестве $V_2 : X_{r_2} \to \mathbb{R}_+$ достаточно взять функцию, определенную равенством (5.1.1) и, так же, как и при доказательстве необходимости в теореме 5.1.1, проверяется, что построенная функция является искомой. Лемма доказана.

Следствие 5.1.3. *Пусть Y компактно и динамическая система $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна. Для того чтобы неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ была ограниченно k-диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:*

(1) *$V(x) \geq a(|x|)$ при всех $x \in X_r$, где $a \in \mathfrak{A}$ и $Im V \subseteq Im\,(a)$;*
(2) *если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \leq V(x)$;*
(3) *линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Теорема 5.1.4. *Пусть Y компактно и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ вполне непрерывна. Для того чтобы динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ была ограниченно k-диссипативной, необходи- мо и достаточно, чтобы существовали число $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:*

(1) *$V(x) \geq a(|x|)$ при всех $x \in X_r$, где $a \in \mathfrak{A}$ и $Im V \subseteq Im\,(a)$;*
(2) *если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$ $(t > 0)$, то $V(xt) < V(x)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $K_1 = \{x | x \in X, |x| \le r\}$ и $l > 0$ таково, что $\pi^l K_1$ относительно компактно. $K := \overline{\pi^l K_1}$. Покажем, что $\omega_x \bigcap K_1 \neq \emptyset$ при всех $x \in X$. Если допустить, что это не так, то найдется $x_0 \in X$ такое, что $\omega_{x_0} \bigcap K_1 = \emptyset$ и, следовательно, существует $t_0 > 0$, начиная с которого $xt \bar{\in} K_1$ (см. доказательство теоремы 5.1.1). С другой стороны, $a(|x_0 t|) \le V(x_0 t) < V(x_0 t_0) = c_0$ и, следовательно, $|x_0 t| \le a^{-1}(c_0)$ $(t \ge t_0)$ и по условию теоремы множество $\Sigma^+_{x_0}$ относительно компактно. Таким образом, $\omega_{x_0} \neq \emptyset$ и компактно. Как и в теореме 5.1.1, можно показать, что $V(x) = c$ при всех $x \in \omega_{x_0}$, где c – некоторая положительная константа. Так как множество ω_{x_0} инвариантно, то наряду с точкой x, множеству ω_{x_0} принадлежит и xt при всех $t > 0$ и, следовательно, $V(xt) < V(x) = c$. Полученное противоречие доказывает, что наше допущение о том, что $\omega_{x_0} \bigcap K = \emptyset$ неверно. Таким образом, $\omega_x \bigcap K \neq \emptyset$ при всех $x \in X$, и согласно теореме 2.6.1 неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна.

Необходимость. Пусть неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна. Определим функцию $\mathcal{V} : X \setminus J \to \mathbb{R}_+$ равенством (5.1.1), где J – центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Из доказательства теоремы 5.1.1 следует, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\mathcal{V}$ непрерывна;
(2) $\mathcal{V}(x) \ge |x|$ при всех $x \in X \setminus J$;
(3) $\mathcal{V}(xt) \le \mathcal{V}(x)$ при всех $x \in X \setminus J$ и $t \ge 0$.

При $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ определим функцию $V : X \setminus J \to \mathbb{R}_+$ формулой

$$V(x) := \int_0^{+\infty} \mathcal{V}(xt) e^{-t} dt. \tag{5.1.5}$$

Функция V непрерывна и $V(xt) \le V(x)$ при всех $x \in X \setminus J$ и $t \ge 0$. Пусть $r > r_0 := \sup\{|x| : x \in J\}$ и $t > 0$ таково, что $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$. Покажем, что $V(xt) < V(x)$. Допустим, что это не так. Тогда существуют $x_0 \in X_r$ и $t_0 > 0$ такие, что $x_0 \tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t_0]$ и

$$V(x_0 t_0) = V(x_0). \tag{5.1.6}$$

Из равенств (5.1.5) и (5.1.6) следует, что

$$\mathcal{V}(x_0(t_0+\tau)) = \mathcal{V}(x_0\tau) \tag{5.1.7}$$

при всех $\tau \geq 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенную равенством $\varphi(\tau) := \mathcal{V}(x_0\tau)$. Непосредственно из определения функции φ следует, что она непрерывна и является невозрастающей, и из равенства (5.1.7) следует, что $\varphi(t_0+\tau) = \varphi(\tau)$ при всех $\tau \geq 0$. Из вышесказанного заключаем, что функция φ постоянна, т.е.

$$\sup_{t\geq\tau} |x_0t| = \sup_{t\geq 0} |x_0t| \geq |x_0| \geq r \tag{5.1.8}$$

при всех $\tau \geq 0$. Из (5.1.8) и доказательства теоремы 5.1.1 (см. (5.1.3)) следует, что найдется $\tau_k \to +\infty$, для которой $|x_0\tau_k| \geq r$. Так как $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h\rangle$ ограниченно k-диссипативна, то последовательность $\{x_0\tau_k\}$ можно считать сходящейся. Положим $\overline{x} := \lim\limits_{k\to+\infty} x_0\tau_k$. Очевидно, $\overline{x} \in \omega_{x_0} \cap X_r$. С другой стороны, $\omega_{x_0} \subseteq J \subseteq X \setminus X_r$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение о том, что имеет место равенство (5.1.6) неверно.

Для завершения доказательства теоремы 5.1.4 достаточно показать, что $V(x) \geq |x|$. Действительно, так как $\mathcal{V}(x) \geq |x|$ при всех $x \in X_r$, то

$$V(x) = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{V}(xt)e^{-t}dt \geq \int\limits_0^{\varepsilon} |xt|e^{-t}dt \tag{5.1.9}$$

при всех $x \in X_r$ и $\varepsilon > 0$. Найдется $0 \leq \theta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ такое, что

$$V(x) \geq |x\theta(\varepsilon)|e^{-\theta(\varepsilon)}. \tag{5.1.10}$$

Переходя к пределу в (5.1.10), когда $\varepsilon \to 0$, получим требуемое неравенство.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$, функцию $V : X \setminus J \to \mathbb{R}_+$ определим равенством

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{V}(xk)e^{-k}. \tag{5.1.11}$$

Так же, как и в непрерывном случае, проверяется, что функция V, определенная равенством (5.1.11), является искомой. Теорема полностью доказана.

Теорема 5.1.5. *Пусть* $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ *– неавтономная динамическая система и* $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$. *Если существует число* $r > 0$ *и функция* $V : X_r \to \mathbb{R}_+$, *обладающая следующими свойствами:*

(1) $a(|x|) \le V(x) \le b(|x|)$ $(a, b \in \mathfrak{A},\ Im\, b \subseteq Im\, a)$ *при всех* $x \in X_r$;

(2) $\dot{V}_\pi(x) \le -c(|x|)$ *при всех* $x \in X_r$, *где* $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– непрерывная функция, положительная на* $[r, +\infty)$, $(\dot{V}_\pi(x) = \limsup\limits_{t \downarrow +0} t^{-1}[V(xt) - V(x)])$,

тогда существует $R_0 > 0$, *такое что для любого* $R > 0$ *найдется* $L(R) > 0$, *при котором* $|xt| \le R_0$ *при всех* $t \ge L(R)$ *и* $|x| \le R$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что каково бы ни было $x \in X_r$, найдется $\tau = \tau(x) > 0$ такое, что $|x\tau| < r$. Если допустить, что это не так, то существует $x_0 \in X_r$, такое что $|x_0\tau| \ge r$ при всех $\tau \ge 0$. Следовательно, $a(|x_0\tau|) \le V(x_0 t) \le V(x_0) \le b(|x_0|)$. Из последнего неравенства следует, что $|x_0\tau| \le a^{-1}(b(|x_0|))$. Таким образом, $\sup\{|x\tau| : \tau \ge 0\} = b_0 < +\infty$. Обозначим через $\nu = \inf\{c(\alpha) \mid r \le \alpha \le b_0\}$ и заметим, что $\dot{V}_\pi(x_0 t) \le -\nu t$, поэтому

$$V(x_0 t) \le V(x_0) - \nu t \tag{5.1.12}$$

при всех $t > 0$. Правая часть (5.1.12) отрицательна при достаточно больших t, что противоречит положительной определенности V на X_r. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Докажем, что $|xt| \le R_0$ при всех $|x| \le r$ и $t \ge 0$, где $R_0 = \inf\{\alpha \mid a(\alpha) \ge b(r)\}$. Действительно, если $|x| \le r$, $|x\beta_x| = |x\gamma_x| = r$ и $|xt| > r$ при всех $t \in]\beta_x, \gamma_x[$, то справедливы неравенства

$$a(|xt|) \le V(xt) \le V(x\beta_x) \le b(|x\beta_x|) = \beta(r) \le a(R_0).$$

Из последнего неравенства следует, что $|xt| \le R_0$ при всех $t \in]\beta_x, \gamma_x[$ и $|x| \le r$, а значит, $|xt| \le R_0$ при всех $t \ge 0$ и $|x| \le r$.

По доказанному выше для любого $x \in X_r$ найдется $\tau(x) > 0$ такое, что $|x\tau| < r$. Положим $\alpha_x = \sup\{t \mid x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0,t]\}$, тогда $|x\alpha_x| = r$ и $|xt| > r$ при всех $t \in]0,\alpha_x[$. Покажем, что для любого $R > 0$ $|xt| \leq a^{-1}(b(R))$ при всех $|x| \leq R$ и $t \in]0,\alpha_x[$. Действительно,

$$a(|xt|) \leq V(xt) \leq V(x) \leq b(|x|) \leq b(R) \tag{5.1.13}$$

при всех $t \in]0,\alpha_x[$. Из неравенства (5.1.13) вытекает требуемая оценка. Заметим теперь, что $L(R) := \sup\{\alpha_x \mid |x| \leq R\}$ конечно каково бы ни было $R > 0$. Если допустить, что это не так, то найдутся $\bar{R} > 0$ и $\{x_n\}$ такие, что $|x_n| \leq \bar{R}$ и $\alpha_{x_n} \to +\infty$. Положим

$$\bar{\nu} = \inf\{c(\alpha) \mid r \leq \alpha \leq a^{-1}(b(R))\}$$

и заметим, что $\dot{V}_\pi(xt) \leq -\bar{\nu}$ при всех $|x| \leq R$ и $t \in]0,\alpha_x[$ и, следовательно,

$$V(xt) \leq V(x) - \bar{\nu}t \leq b(R) - \bar{\nu}t$$

при всех $|x| \leq R$ и $t \in]0,\alpha_x[$. В частности,

$$V(x_n\alpha_{x_n}) \leq b(\bar{R}) - \bar{\nu}\alpha_{x_n} \tag{5.1.14}$$

при всех n. Правая часть (5.1.14) при достаточно больших n отрицательна, что противоречит положительной определенности V на X_r. Полученное противоречие доказывает, что $L(R)$ при каждом $R > 0$ конечно. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что $|xt| \leq R_0$ при всех $|x| \leq R$ и $t \geq L(R)$.

Следствие 5.1.6. *Пусть $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi),(Y,\mathbb{T}_2,\sigma),h\rangle$ – неавтономная динамическая система и $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$. Если существует непрерывная функция $V : X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *V ограничена на ограниченных множествах из X, т.е. $V(x) \leq b(|x|)$ для любого $x \in X$, где $b \in \mathfrak{A}$;*
(2) *$V(y) \geq \gamma_1|y|^2 - D_1$ $(\gamma_1, D_1 > 0)$;*
(3) *$\dot{V}_\pi(y) \leq -\gamma_2 V(y) + D_2$ $(\gamma_2, D_2 > 0)$,*

тогда существует $R_0 > 0$ такое, что для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$, при котором $|xt| \leq R_0$ при всех $|x| \leq R$ и $t \geq L(R)$.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.1.5. Для этого достаточно заметить, что при достаточно больших $r > 0$ условия 1. и 2. гарантируют выполнение условия 1. теоремы 5.1.5, а условие 3. – условия 2..

Следствие 5.1.7. *В условиях теоремы 5.1.5, если Y компактно и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактно, то неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теорем 5.1.5 и 2.6.5.

Замечание 5.1.8. *Утверждение, аналогичное следствию 5.1.7, имеет место и для динамических систем с дискретным временем $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}_+$.*

Замечание 5.1.9. *В отличие от теорем 5.1.1 и 5.1.4, в теореме 5.1.5 непрерывности функции V не требуется, а, вместо этого, накладывается определенное условие на скорость убывания функции V вдоль траекторий системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Кроме того, при $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$ полнота пространства Y не требуется (в приложениях встречаются примеры, когда Y заведомо неполно).*

Неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ назовем ограниченной, если для любого $R > 0$ существует $C(R) > 0$ такое, что $|xt| \le C(R)$ при всех $|x| \le R$ и $t \ge 0$.

Теорема 5.1.10. *Пусть Y компактно, $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$, $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна. Если существуют $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *существуют $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что $a(|x|) \le V(x) \le b(|x|)$ при всех $x \in X_r$ и $Im\, b \subseteq Im\, a$;*
2. *если $x\tau \in X_r$ при всех $\tau \in [0, t]$, то $V(xt) \le V(x)$;*
3. *линии уровня V не содержат ω-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$,*

то неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна и ограничена.

Доказательство. Прежде всего покажем, что найдется $R_0 > 0$ такое, что $|xt| \leq R_0$ при всех $t \geq 0$ и $|x| \leq r$. Действительно, если $|x| = r$, $|x\tau| = r$ и $|xt| > r$ при всех $t \in]0, \tau[$, то

$$a(|xt|) \leq V(xt) \leq V(x) \leq b(|x|) = b(r)$$

и, следовательно, $|xt| \leq a^{-1}(b(r)) = R_0$. Таким образом, $|xt| \leq R_0$ при всех $t \geq 0$ и $|x| \leq r$.

Докажем теперь ограниченность $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$. Если $|x| \leq R$ и $xt \notin K_1 = \{x \mid x \in X_r, |x| \leq R\}$ при всех $t \geq 0$, то $|xt| \leq C_1(R) = a^{-1}(b(R))$. Если $xt \notin K_1$ при всех $0 \leq t < \tau$ и $x\tau_1 \in K_1$, то $|xt| \leq C_1(R)$ при $0 \leq t < \tau$ и $|xt| \leq R_0$ при всех $t \geq \tau$ и, следовательно, $|xt| \leq C(R) = \max\{C_1(R), R_0\}$ при всех $t \geq 0$ и $|x| \leq R$.

Покажем, что неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна. Так как $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограничена и асимптотически компактна, то согласно лемме 1.2.4 $\Omega(K_1) \neq \emptyset$, компактно и притягивает K_1. Положим $K = \Omega(K_1)$ и покажем, что $\omega_x \bigcap K \neq \emptyset$, каково бы ни было $x \in X$. Если допустить, что это не так, то найдется $x_0 \in X$, что $\omega_{x_0} \bigcap K = \emptyset$. В условиях теоремы 5.1.4 множество $\Sigma^+_{x_0} = \{xt \mid t \geq 0\}$ относительно компактно и, следовательно, $\omega_{x_0} \neq \emptyset$ и компактно. Положим $d := \rho(\omega_{x_0}, K) > 0$, тогда

$$B[\omega_{x_0}, d/3] \bigcap B[K, d/3] = \emptyset \tag{5.1.15}$$

и найдется $l > 0$ такое, что

$$\pi^t K_1 \subseteq B(K, d/3) \tag{5.1.16}$$

при всех $t \geq l$. Покажем, что $xt \notin K_1$ при всех $t \geq t_0$, где t_0 – некоторое неотрицательное число. Если допустить, что это не так, то найдется $t_n \to +\infty$, что $x_0 t_n \in K_1$ и, согласно (5.1.16), $x_0(t_n + l) \in B(K, d/3)$. Последовательность $\{x_0(t_n + l)\}$ можно считать сходящейся. Положим $p = \lim\limits_{n \to +\infty} x_0(t_n + l)$, тогда $p \in \omega_{x_0} \bigcap B[K, d/3] \neq \emptyset$, что противоречит соотношению (5.1.15). Полученное противоречие показывает, что $xt \notin K_1$ при всех $t \geq t_0$. Далее, рассуждая также, как и в теореме 5.1.1, получим, что $V(x) = c$ при всех $x \in \omega_{x_0}$, где c – некоторая константа. Последнее противоречит условию 3. теоремы. Полученное противоречие показывает, что $\omega_x \bigcap K \neq \emptyset$

при всех $x \in X$. Согласно теореме 2.6.3 динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна. Теорема доказана.

Замечание 5.1.11. *a. Условие 1. теоремы 5.1.10 эквивалентно положительной определенности V на X_r и ее ограниченности на ограниченных множествах из X;*

b. Имеет место и утверждение, обратное к теореме 5.1.4, и доказывается оно так же, как и необходимость в теореме 5.1.1;

c. Лемма 5.1.2 остается справедливой, если в ней условие вполне непрерывности $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ заменить на ограниченность и асимптотическую компактность $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$. Поэтому теорема 5.1.10 справедлива и в том случае, если условие 3. в ней заменить следующим: линии уровня V не содержат положительных полутраекторий динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Теорема 5.1.12. *Пусть $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$, Y компактно, $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система и $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$ асимптотически компактна. Если существуют $r > 0$ и непрерывная функция $V : X_r \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *существуют $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что $a(|x|) \le V(x) \le b(|x|)$ при всех $x \in X_r$ и $Im\, b \subseteq Im\, a$;*
(2) *если $x\tau \in X_r$ при всех $t \in [0, t]$ $(t > 0)$, то $V(xt) < V(x)$,*

то неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ ограниченно k-диссипативна и ограничена.

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается так же, как и теорема 5.1.4.

Замечание 5.1.13. *a. Видимо, теоремы 5.1.4 и 5.1.5 имеют место и для динамических систем с дискретным временем, однако доказательством соответствующих утверждений мы не располагаем;*

b. В теоремах 5.1.1–5.1.12 везде условия $V(x) \ge a(|x|)$ и $Im\, a \supseteq Im\, V$ (или $a(|x|) \le V(x) \le b(|x|)$ и $Im\, b \subseteq Im\, a$) можно заменить условием $\lim\limits_{h \to +\infty} a(h) = +\infty$.

1. Пусть E^n – n-мерное евклидово пространство, $||\cdot||$ – норма на E^n, порожденная скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = f(t,u), \tag{5.1.17}$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ – регулярная функция. Наряду с уравнением (5.1.17) рассмотрим и его H–класс

$$\dot{v} = f(t,v) \quad (g \in H(f)). \tag{5.1.18}$$

Как отмечалось выше, уравнение (5.1.17) естественным образом порождает неавтономную динамическую систему (см. пример 3.1.2). Применяя к ней результаты, относящиеся к общим неавтономным динамическим системам, получаем ряд утверждений относительно уравнения (5.1.17). Из теорем 5.1.1, 5.1.4, леммы 5.1.2 и следствия 5.1.3 вытекают

Пусть $r > 0$ и $E^n_r := \{u \in E^n : ||u|| \geq r\}$.

Теорема 5.1.14. *Пусть $H(f)$ – компактно. Для того, чтобы уравнение (5.1.17) было диссипативным необходимо и достаточно, чтобы существовали $r > 0$ и непрерывная функция $V: H(f) \times E^n_r \to \mathbb{R}_+$, удовлетворящая условиям:*

(1) *$V(g,v) \geq a(||v||)$ при всех $v \in E^n_r$ и $g \in H(f)$, где $a \in \mathfrak{A}$ и $Im\, V \subseteq Im\, a$;*

(2) *если $||\varphi(\tau,v,g)|| \geq r$ при всех $\tau \in [0,t]$, то $V(g_t, \varphi(t,v,g)) \leq V(g,v)$ ($g \in H(f)$);*

(3) *линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий уравнений (5.1.18).*

Теорема 5.1.15. *Пусть $H(f)$ компактно. Для того чтобы уравнение (5.1.17) было диссипативным необходимо и достаточно, чтобы существовали $r > 0$ и непрерывная функция $V: H(f) \times E^n_r \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *$V(g,v) \geq a(||v||)$ при всех $v \in E^n_r$ и $g \in H(f)$, где $a \in \mathfrak{A}$ и $Im\, V \subseteq Im\, a$;*

(2) *если $||\varphi(\tau,v,g)|| \geq r$ при всех $\tau \in [0,t]$, то $V(g_t, \varphi(t,v,g)) < V(g,v)$ $(g \in H(f))$.*

Теорема 5.1.16. *Пусть $H(f)$ компактно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *уравнение (5.1.17) диссипативно;*

(2) *существует число $r > 0$, обладающее следующим свойством: для любых $v \in E^n$ и $g \in H(f)$ найдется $\tau = \tau(v,g) > 0$ такое, что $||\varphi(\tau, v, g)|| < r$;*
(3) *существует такое число $R_1 > 0$, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \inf ||\varphi(t, v$ $g)|| < R_1$ при всех $v \in E^n$ и $g \in H(f)$;*
(4) *существует число $R_0 > 0$ и для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$, что $||\varphi(t, v,\ g)|| \leq R_0$ при всех $t \geq l(R)$, $||v|| \leq R$ и $g \in H(f)$.*

Доказательство. Сформулированное утверждение следует из теорем 2.6.1 и 3.1.1. В случае, когда f периодична эквивалентность условий 1, 2 и 4 установлена в [**79**]. Эквивалентность условий 1 и 2 для непериодических уравнений установлена в [**27**].

Будем говорить, что функция $F \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по $u \in E^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ или просто условию Липшица, если для любого $r > 0$ существует $L(r) > 0$ такое, что $||F(t,u_1) - F(t,u_2)|| \leq L||u_1 - u_2||$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $u_1, u_2 \in B(0,r)$.

Теорема 5.1.17. *Пусть $f \in C(\mathbb{R}\times E^n, E^n)$ удовлетворяет условию Липшица, $H(f)$ компактно и существуют $R > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $V \in C(\mathbb{R} \times E^n_r, \mathbb{R}_+)$ удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *V – удовлетворяет условию Липшица;*
(2) *$a(||u||) \leq V(t,u) \leq b(||u||)$ $(a, b \in \mathfrak{A},\ Im\, a = Im\, b,\ t \in \mathbb{R}$ и $u \in E^n_r)$;*
(3) *$\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V \cap \mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}} \cap \mathfrak{M}_{grad_u V}$ (где: $\mathfrak{M}_f := \{\{t_n\} : \{f_{t_n}\}$ сходится $\}$, и аналогично для $\mathfrak{M}_V$, $\mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}}$ и $\mathfrak{M}_{grad_u V}$);*
(4) *$\dot{V}_f(t,u) := \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,u) + \langle grad_u V, f(t,u)\rangle \leq 0$ $(t \in \mathbb{R}$ и $u \in E^n_r)$;*
(5) *ни при каком $(\widetilde{V}, g) \in H(V,f) := \overline{\{(V_\tau, f_\tau) : \tau \in R\}}$ линии уровня функции $\widetilde{V}$ не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.1.18), лежащих вне шара $B(0,r)$.*

Тогда уравнение (5.1.17) диссипативно.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Пусть $g \in H(f)$. Существует $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ такая, что $f_{t_k} \to g$. Так как $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V$, то последовательность $\{V_{t_k}\}$ также сходится. Положим $\widetilde{V} := \lim\limits_{k\to+\infty} V_{t_k}$. Из условий a.–d. следует, что функция $\widetilde{V}$ удовлетворяет условию Липшица, $\dot{\widetilde{V}}_g(t,v) := \dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial t}(t,v) + \langle grad_v \widetilde{V}, g\rangle \leq 0$ и, кроме того, $a(||v||) \leq \widetilde{V}(t,v) \leq b(||v||)$ при всех $v \in E^n_r$ и $t \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $v \in E^n_r$ и $g \in H(f)$. Обозначим через $\varphi(\cdot, v, g)$ решение уравнения (5.1.18), проходящее через точку v при $t = 0$. Покажем, что это решение продолжаемо вправо на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что оно ограничено на всей области своего существования $[0, t_v]$. Пусть $R = R(r) > 0$ такого, что $a(R) > b(r)$, $\mathbb{T}_1(v) := \{t \in [0, t_v[: ||\varphi(t,v,g)|| \leq r\}$ и $\mathbb{T}_2(v) := [0, t_v[\setminus \mathbb{T}_1(v)$. Очевидно, $\mathbb{T}_2(v)$ открыто и, следовательно, $\mathbb{T}_2(v) = \bigcup\limits_{\alpha}]t_\alpha, t_\beta[\ \ (\beta = \beta(\alpha))$. Для любого $t \in \mathbb{T}_2(v)$ существует α такое, что $t \in]t_\alpha, t_\beta[$, $||\varphi(t_\alpha, v, g)|| = ||\varphi(t_\beta, v, g)|| = r$, $||\varphi(t,v,g)|| > r$ и, следовательно,

$$a(||\varphi(t,v,g)||) \leq \widetilde{V}(t, \varphi(t,v,g)) \leq \widetilde{V}(t_\alpha, \varphi(t_\alpha, v, g))$$
$$\leq b(||\varphi(t_\alpha, v, g)||) = b(r) \leq a(R) \qquad (5.1.19)$$

Из неравенства (5.1.19) следует, что $||\varphi(t,v,g)|| \leq R$ и мы имеем

$$\sup\{||\varphi(t,v,g)|| : t \in [0, t_v[\} \leq r_0 := \max(r, R(r)).$$

Так как $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ удовлетворяет условию Липшица, то она регулярна.

3. Пусть $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h\rangle$ – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.1.17). Определим на $X_r := E^n_r \times H(f)$ функцию $\mathcal{V} : X_r \to \mathbb{R}_+$ равенством $\mathcal{V}(v,g) = \widetilde{V}(0,v)$, где $\widetilde{V}$ – функция, определенная в первом пункте доказательства. Отметим, что функция $\mathcal{V}(\cdot, g)$ определяется однозначно по $g \in H(f)$ в силу включения $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V$.

4. Покажем, что введенная в предыдущем пункте функция $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем условиям следствия 5.1.3. Установим ее непрерывность на $X_r = E^n_r \times H(f)$. Пусть $g_k \to g$ и $v_k \to v$

$((v_k, g_k) \in E^n_r \times H(f))$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{V}(v_k, g_k) - \mathcal{V}(v, g)| \le |\mathcal{V}(v_k, g_k) - \mathcal{V}(v, g_k)| \\
&+|\mathcal{V}(v, g_k) - \mathcal{V}(v, g)| \le Lg_k(R)||v_k - v|| \\
&+|\mathcal{V}(v, g_k) - \mathcal{V}(v, g)|,
\end{aligned} \tag{5.1.20}
$$

где $L_{g_k}(R)$ есть константа Липшица для $V(\cdot, g_k)$ на $B(0, R)$ и $R := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} ||v_k||$. Так как $L_{g_k}(R) \le L_f(R)$ при всех $g \in H(f)$ (см., например, [95]) и $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V$, то $\mathcal{V}(v, g_k) \to \mathcal{V}(v, g)$ и, переходя к пределу в (5.1.20) при $k \to +\infty$, устанавливаем непрерывность V в точке $(v, g) \in X_r$.

Остальные условия следствия 5.1.3 в условиях доказываемой теоремы очевидным образом выполняются. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на следствие 5.1.3.

Отметим, что в случае периодичности f утверждение теоремы 5.1.17 усиливает теорему 2.5 из [**79**].

2. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\dot{u} = A(t)u, \tag{5.1.21}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$ и $[E^n]$ – множество всех линейных операторов $A:\ E^n \to E^n$. Через $U(t, A)$ обозначим оператор Коши уравнения (5.1.21). Наряду с уравнением (5.1.21) рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{u} = A(t)u + F(t, u) \quad (F \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)). \tag{5.1.22}$$

Имеет место следующая

Теорема 5.1.18. *Для диссипативности уравнения (5.1.22) достаточно выполнение следующих условий:*

(1) *функция F удовлетворяет условию Липшица;*
(2) $H(A, F) := \overline{\{(A_\tau, F_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}}$ *компактно в* $C(\mathbb{R}, [E^n]) \times C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$*;*
(3) *существуют положительные числа N и ν, что*

$$||U(t, A)U^{-1}(\tau, A)|| \le Ne^{-\nu(t-\tau)} \quad (t \ge \tau); \tag{5.1.23}$$

(4) $||F(t, u)|| \le A + \varepsilon||u||$ $(\forall u \in E^n,\ t \in \mathbb{R})$, *где* $A > 0$ *и* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0 < \nu N^{-2}$.

Доказательство. Пусть $(B, G) \in H(A, F)$. Определим $W_B \in [E^n]$ равенством

$$W_B := \int_0^{+\infty} U^*(\tau, B) U(\tau, B) d\tau. \tag{5.1.24}$$

Из (5.1.23) и (5.1.24) следует, что $||W_B|| \leq N^2 (2\nu)^{-1}$. Обозначим через $a := \sup\{||A(t)|| : t \in \mathbb{R}\}$ и заметим, что

$$\begin{gathered} ||u|| = ||U(-\tau, B_\tau) U(\tau, B) u|| \leq \\ ||U(-\tau, B_\tau)|| ||U(\tau, Bu)|| \leq e^{a\tau} ||U(\tau, B) u||. \end{gathered} \tag{5.1.25}$$

Отсюда

$$\langle W_B u, u \rangle = \int\limits_0^{+\infty} ||U(\tau, B) u||^2 d\tau$$

$$\geq \int\limits_0^{+\infty} e^{-2a\tau} ||u||^2 d\tau = \frac{1}{2a} ||u||^2. \tag{5.1.26}$$

Итак, установлено следующее неравенство

$$\frac{1}{2a} ||u||^2 \leq \langle W_B u, u \rangle \leq \frac{N^2}{2\nu} ||u||^2 \quad (u \in E^n,\ B \in H(A)). \tag{5.1.27}$$

Пусть $Y := H(A, F)$, $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на Y, $X := E^n \times Y$ и $\pi^t(v; B, g) = (\varphi(t, v, B, g); B_t, g_t)$ $(v \in E^n,\ (B, G) \in H(A, F))$, где $\varphi(\cdot, v, B, G)$ решение уравнения

$$\dot{v} = B(t) v + G(t, v), \tag{5.1.28}$$

проходящее через точку v при $t = 0$. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, где $h := pr_2 : X \to Y$. Определим на X функцию $V : X \to \mathbb{R}_+$ по следующему правилу

$$V(v; B, G) := \big\langle W_B v, v \big\rangle \tag{5.1.29}$$

при всех $v \in E^n$ и $(B, G) \in H(A, F)$. Отметим, что эта функция обладает следующими свойствами:

a. $\frac{1}{2a} ||v||^2 \leq V(v; B, G) \leq \frac{N^2}{2a} ||v||^2$ $(v \in E^n,\ (B, g) \in H(A, F))$.
b. V непрерывна.

Действительно, если $v_k \to v$ и $(B_k, G_k) \to (B, G)$, то

$$\begin{aligned} &|V(v_k; B_k, G_k) - V(v; B, G)| = |\langle W_{B_k} v_k, v_k\rangle - \langle W_B v, v\rangle| \\ &= |\langle W_{B_k}(v_k - v), v_k\rangle + \langle W_{B_k} v, v_k - v\rangle \\ &+\langle (W_{B_k} - W_B)v, v\rangle| \le \frac{N^2}{2\nu}||v_k||||v_k - v|| \\ &+\frac{N^2}{2\nu}||v||||v - v_k|| + ||W_{B_k} - W_B||||v||^2. \end{aligned} \tag{5.1.30}$$

Из неравенства (5.1.30) видно, что для непрерывности V достаточно показать, что $||W_{B_k} - W_B|| \to 0$, если $B_k \to B$. Установим последнее соотношение. Из (5.1.24) следует, что W_B является самосопряженным оператором. Поэтому

$$\begin{aligned} &||W_{B_k} - W_B|| = \sup_{||v||=1} |\langle (W_{B_k} - W_B)v, v\rangle| \le \\ &\le \int_0^{+\infty} \sup_{||v||\le 1} ||[U(\tau, B_k) - U(\tau, B)]v||^2 d\tau = \\ &= \int_0^{l} \sup_{||v||\le 1} ||[U(\tau, B_k) - U(\tau, B)]v||^2 d\tau + \\ &+ \int_l^{+\infty} \sup_{||v||\le 1} ||[U(\tau, B_k) - U(\tau, B)]v||^2 d\tau \le \\ &\le \sup_{0\le\tau\le l} ||U(\tau, B_k) - U(\tau, B)||^2 l + \\ &+2\int_l^{+\infty} (||U(\tau, B_k)||^2 + ||U(\tau, B)||^2) d\tau. \end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Из (5.1.23) следует неравенство $||U(\tau, B)|| \le Ne^{-\nu\tau}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$ и $B \in H(A)$ (см.[**100**, с.70]). Поэтому из (5.1.31) получаем

$$\begin{aligned} &||W_{B_k} - W_B|| \le \sup_{0\le\tau\le l} ||U(\tau, B_k) \\ &-U(\tau, B)||^2 l + \tfrac{2N^2}{v} e^{-2vl}. \end{aligned} \tag{5.1.32}$$

Переходя к переделу, когда $k \to +\infty$ и учитывая, что первое слагаемое в правой части (5.1.32) стремиться к нулю при любом фиксированном $l > 0$, устанавливаем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \sup ||W_{B_k} - W_B|| \le \frac{2N^2}{v} e^{-2vl}. \tag{5.1.33}$$

Причем (5.1.33) имеет место при всех $l > 0$. Устремляя l к $+\infty$ и учитывая, что левая часть (5.1.33) от l не зависит, получим требуемый результат. Тем самым непрерывность V установлена.

c. Пусть теперь $||\varphi(\tau; v, B, G)|| \geq r$ $(r > N^2A(v - \varepsilon_0 N^2)^{-1})$ при всех $\tau \in [0, t]$. Тогда $V(\varphi(t; v, B, G), B_t, G_t) < V(v; B, G)$. Для установления этого неравенства подсчитаем производную функции

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\tau) &:= V(\varphi(\tau; v, B, G), B_\tau, G_\tau)\\ &= \big\langle W_B \varphi(\tau; v, B, G), \varphi(\tau; v, B, G)\big\rangle\end{aligned}$$

по $\tau \in \mathbb{R}$. Стандартными выкладками, учитывая тождество

$$\frac{d}{d\tau} W_{B_\tau} + B^*(\tau) W_{B_\tau} + W_{B_\tau} B(\tau) = -E \tag{5.1.34}$$

(E – единичный оператор в E^n), имеем

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau; v, B, G), B_\tau, G_\tau) = -||\varphi(\tau; v, B, G)||^2 + \\ 2Re\big\langle G(\tau, \varphi(\tau; v, B, G)), W_{B_\tau}\varphi(\tau, v, B, G)\big\rangle.\end{gathered} \tag{5.1.35}$$

Из (5.1.35) получается следующее неравенство

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau; v, B, G), B_\tau, G_\tau) \leq -||\varphi(\tau; v, B, G)||^2 + \\ &\frac{N^2}{v^2} ||\varphi(\tau; v, B, G)|| (A + \varepsilon_0 ||\varphi(\tau; v; B, G)||) \leq \\ &||\varphi(\tau; v, B, G)||^2 (-1 + \varepsilon_0 \frac{N^2}{v} + \frac{N^2 A}{v} \frac{1}{r}).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $V(\varphi(t; v, B, G), B_t, G_t) < V(v, B, G)$. Так же, как и в теореме 5.1.17, доказывается нелокальная продолжаемость вправо всех решений уравнения (5.1.28), а их единственность следует из условия Липшица для F. Для завершения доказательства теоремы остается сослаться на теорему 5.1.17 (см. также теорему 5.1.4).

Замечание 5.1.19. *a. Теорема 5.1.18 по существу совпадает с теоремой 3.8.9, которая получена с помощью ряда априорных оценок. Однако теорема 3.8.9 имеет место также для уравнений, заданных в произвольном банаховом пространстве.*

b. Теорема 5.1.20 остается справедливой и в том случае, если условие 4. заменить следующим условием: $||F(t,u)|| \le A + B||u||^{\alpha} \quad (\forall u \in E^n,\ t \in R)$, *где* A *и* B *некоторые положительные числа и* $0 \le \alpha \le 1$. *Доказательство этого утверждения получается по той же схеме, что и теоремы 5.1.18, при этом в доказательстве нужно выбрать* r *так, чтобы выполнять условие:* $r > r_0$, *где* r_0 *– решение уравнения* $Ar^{-1} + Br^{\alpha-1} = \nu^2 N^{-2}$.

c. Отметим, что утверждение пункта b., вообще говоря, не имеет места, если $\alpha > 1$. *Сказанное подтверждается примером* $\dot{x} = -x + x^3$.

Теорема 5.1.20. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ *удовлетворяет условию Липшица,* $H(f)$ *компактно и существует* $A \in C(\mathbb{R}, [E^n])$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}} \qquad (\dot{A}(t) := \dfrac{dA(t)}{dt})$;
(2) $A(t) = A^*(t)$ *и* $\alpha||u||^2 \le \langle A(t)u, u\rangle \le \beta||u||^2 \quad u \in E^n,\ t \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha, \beta > 0$;
(3) $\langle \dot{A}(t)u, u\rangle \le 0 \quad (u \in E^n,\ t \in \mathbb{R})$;
(4) *существует* $r > 0$ *такое, что* $Re\langle A(t)u, f(t,u)\rangle \le -\gamma(||u||)$ *при всех* $u \in E^n_r$ *и* $t \in R_+$, *где* $\gamma(s) > 0$ *при* $s \ge r$.

Тогда уравнение (5.1.17) диссипативно.

Доказательство. Согласно теореме 5.1.17 функция f регулярна. Пусть $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.1.17) (см. пример 3.1.2) и $g \in H(f)$. Существует $\{t_n\} \in \mathfrak{M}_f$ такая, что $g = \lim\limits_{k \to +\infty} f_{t_k}$ и по условию теоремы $\{A_{t_k}\}$ сходится. Обозначим ее передел через B_g. Определим теперь на $X_r := E^n_r \times Y$ функцию V по следующему правилу $V(v,g) = \langle B_g(0)v, v\rangle$ для любого $v \in E^n_r$ и $g \in H(f)$. Отметим, что B_g определяется однозначно по функции $g \in H(f)$, ибо $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_A$. Непрерывность V доказывается так же, как и в теоремах 5.1.15 и 5.1.16.

Пусть теперь $||\varphi(\tau, v, g)|| \ge r$ при всех $\tau \in [0,t]$ $(t > 0)$. Вычислим производную $V(\varphi(\tau, v, g), g_\tau)$ по $\tau \in \mathbb{R}$. Для этого заметим, что из включения $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$ следует равенство

$$\begin{aligned} &\frac{dV}{dt}(\varphi(\tau,v,g),g_\tau) = \frac{d}{d\tau}\big\langle B(\tau)\varphi(\tau,v,g),\varphi(\tau,v,g)\big\rangle = \\ &\big\langle \dot{B}(\tau)\varphi(\tau,v,g),\varphi(\tau,v,g)\big\rangle + 2Re\big\langle B(\tau)\varphi(\tau,v,g), \\ &g(\tau,\varphi(\tau,v,g))\big\rangle. \end{aligned} \tag{5.1.36}$$

Из условий 1.–4. теоремы получаем

$$\big\langle \dot{B}(t)v,v\big\rangle \le 0 \quad \text{и} \quad Re\big\langle B(t)v,g(t,v)\big\rangle \le -\gamma(||v||) \tag{5.1.37}$$

при всех $v \in E^n_r$, $B \in H(A)$, $t \in \mathbb{R}$ и $g \in H(f)$. Из (5.1.36) и (5.1.37) следует, что $\dfrac{d}{d\tau}V(\varphi(\tau,v,g),g_\tau) \le -2\gamma(||\varphi(\tau,v,g)||)$, поэтому $V(\varphi(\tau,v,g),g_\tau) < V(v,g)$ при всех $v \in E^n_r$ и $g \in H(f)$. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на следствие 5.1.6 и теорему 5.1.4.

Следствие 5.1.21. *Если уравнение (5.1.17) τ–периодично и выполняются условия теоремы 5.1.17, то уравнение (5.1.17) имеет хотя бы одно τ– периодическое решение.*

Частный случай следствия 5.1.21 анонсирован в работе [**220**].

Следствие 5.1.22. *Пусть $a_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Если $H(a_i)$ компактно ($i = \overline{0, 2n+1}$) и $a_{2n+1}(t) \le -\alpha$ $(\alpha > 0)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, то уравнение*

$$\dot{v}(t) = a_0(t) + a_1(t)v + \cdots + a_{2n+1}v^{2n+1} \tag{5.1.38}$$

диссипативно.

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из теоремы 5.1.17. Для этого достаточно в качестве $A(t)$ взять единичный оператор и заметить, что

$$\begin{aligned} &\big\langle A(t)v,f(t,v)\big\rangle = v(a_0(t) + a_1(t)v + \cdots + a_{2n+1}(t)v^{2n+1}) = \\ &v^{2n+2}\Big(a_{2n+1}(t) + \frac{a_{2n}(t)}{v} + \cdots + \frac{a_0(t)}{v^{2n+1}}\Big) \le -\frac{\alpha}{2}v^{2n+2} \end{aligned}$$

при всех $|v| \ge r$ и $t \in \mathbb{R}$ и при достаточно большом $r > 0$.

Следствие 5.1.23. *Если функции a_i $(i \in \overline{0, 2n+1})$ τ–периодичны и $a_{2n+1}(t)| > 0$ при всех $t \in [0,\tau[$, то уравнение (5.1.38) имеет хотя бы одно τ–периодическое решение.*

Отметим, что в случае, когда $a_{2n+1}(t) < 0$ $(t \in [0,\tau[)$ по следствию 5.1.23 уравнение (5.1.38) диссипативно и, следовательно, по теореме 2.3 из [**79**] оно имеет хотя бы одно $\tau-$периодическое решение. Случай $a_{2n+1}(t) > 0$ $(t \in [0,\tau[)$ сводится к предыдущему заменой t на $-t$.

В случае, когда $a_{2n+1} \equiv 1$ следствие 5.1.23 совпадает с результатом, установленным в [**79**, с.126].

Следствие 5.1.24. *Пусть* $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ *непрерывно дифференцируема. Если* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} \le -m < 0$ $(i \in \overline{1,n})$, $H(f)$ *компактно и функции* $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *ограничены, то уравнение (5.1.17) диссипативно.*

Доказательство. Из равенства

$$\begin{aligned} f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n) &= \int_0^{x_i} \tfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(t,x_1,x_2,\dots,x_n)dx_i + \\ &+ f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n), \end{aligned}$$

в условиях следствия 5.1.24, следует что при всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $x_i f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \le -m x_i^2 + M|x_i|$, поэтому

$$\begin{aligned} &\big\langle x, f(t,x)\big\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i f_i(t,x) \\ &\le -m||x||^2 + Mn||x|| \le -\tfrac{m}{2}||x||^2 \end{aligned} \tag{5.1.39}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $||x|| \ge \dfrac{2Mn}{m}$. Согласно теореме 5.1.14 уравнение (5.1.17) диссипативно.

Отметим, что в случае периодичности f следствие 5.1.24 хорошо известно [**79**]. Когда f непериодично утверждение, близкое к следствию 5.1.24 установлено в [**243**] при некоторых дополнительных ограничениях на f.

Теорема 5.1.25. *Пусть для каждого уравнения (5.1.18) при* $g \in \Sigma_f := \{f_\tau \ : \ \tau \in R\}$ *выполнено условие единственности. Для диссипативности уравнения (5.1.17) достаточно существования функции* $V : \mathbb{R} \times E^n_r \to \mathbb{R}_+$ $(r > 0)$ *удовлетворяющей условиям:*

(1) *V удовлетворяет условию Липшица;*

(2) $a(||u||) \le V(t,u) \le b(||u||) \quad (a,b \in \mathfrak{A},\ Im\, a = Im\, b)$ *при* $u \in E^n_r$;

(3) $\dot{V}_f(t,u) := \limsup_{\tau \downarrow 0} \tau^{-1}\Big[V(t+\tau, u+\tau f(t,u)) - V(t,u)\Big] \le -c(||u||)$ *при* $u \in E^n_n$, *где* $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *непрерывно и* $c(s) > 0$ *при* $s > r$.

Доказательство. Так же, как и в теореме 5.1.17, можно показать, что решение $\varphi(\cdot, u, f_\tau)$ уравнения (5.1.18) $(g = f_\tau)$, проходящее через u при $t = 0$ продолжаемо вправо на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Положим $Y := \Sigma_f$ и через $(Y, \mathbb{R}_+, \sigma)$ обозначим динамическую систему определенную по следующему правилу: $\pi^t(u, f_\tau) := (\varphi(t,u,f_\tau), f_{\tau+t})$ при всех $\tau \in \mathbb{R},\ u \in E^n$ и $t \in R_+$. Определим на $X_r := E^n_r \times Y$ функцию $\mathcal{V}$ равенством $\mathcal{V}(u, f_\tau) := V(\tau, u)$. Тогда $\mathcal{V}(\pi^t(u,f_\tau)) = \mathcal{V}(\varphi(t,u,f_\tau), f_{t+\tau}) = V(t+\tau, \varphi(t,u,f_\tau)) = V(s, \varphi(s-\tau, u, f_\tau)) = V(s, X(s; u, \tau)) \quad (s = t+\tau)$ и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathcal{V}}_\pi(u, f_\tau) = \limsup_{t \downarrow 0} t^{-1}[\mathcal{V}(\pi^t(u,f_\tau)) - \mathcal{V}(u, f_\tau)] \\
&= \lim_{s-\tau \downarrow 0} \sup (s-\tau)^{-1}[V(s, x(s;u,\tau)) - V(\tau, x[\tau;u,\tau))] \\
&= \dot{V}_f(\tau, x(\tau;u,\tau)) = \dot{V}_f(\tau,u) \le -c(||u||) \quad (||u|| \ge r).
\end{aligned}
$$

Согласно теореме 5.1.5 неавтономная динамическая система $\big\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}_+, \sigma), h \big\rangle$ $(h = pr_2 : X \to Y)$ диссипативна и, следовательно, существует $R > 0$ и $l(u,\tau) > 0$ такие, что $||\varphi(t,u,f_\tau)|| < R$ при всех $u \in E^n,\ \tau \in \mathbb{R}$ и $t \ge l(u,\tau)$. Так же как и в [**32**] можно показать, что число $l(u,\tau) > 0$ можно выбрать не зависящим от $\tau \in \mathbb{R}$. Рассуждая также как, и при доказательстве леммы 3.1.3, получаем, что уравнения (5.1.17) диссипативно.

Отметим, что теорема 5.1.25 уточняет известную теорему Йошизавы [**32**],[**266**]–[**267**].

5.3. Теорема Барбашина–Красовского для неавтономных динамических систем

Идеи и методы, которые нами применились при изучении диссипативных систем в первых двух параграфах гл. 5 позволяют сформулировать и доказать ряд утверждений об устойчивости неавтономных динамических систем и, в частности, обобщить известную теорему Барбашина–Красовского [**14**] об асимптотической устойчивости.

Пусть (X, h, Y) – конечномерное векторное расслоение, $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система, $\theta_y \in X_y := h^{-1}(y)$ – нулевой элемент ($|\theta_y| = 0$) и $\Theta := \{\theta_y : y \in Y\}$ – нулевое сечение векторного расслоения (X, h, Y). Ниже всюду будем предполагать, что нулевое сечение Θ инвариантно, т.е. $\Theta \subseteq X$ является инвариантным множеством динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.

Напомним, что нулевое сечение Θ равномерно устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $y \in Y$, $x \in X_y$ и $|x| < \delta$ влечет $|xt| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

Если Θ равномерно устойчиво и $\lim\limits_{t \to +\infty} |xt| = 0$ при всех $x \in X$, то нулевое сечение называют равномерно асимптотически устойчивым в целом.

Теорема 5.3.1. *Пусть Y компактно. Для того чтобы нулевое сечение Θ было равномерно асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям:*

1. $V(x) \geq a(|x|)$ при всех $x \in X$, $V(\theta_y) = 0$ при всех $y \in Y$ и $Im\, a = Im\, V$, где $a \in \mathfrak{A}$;

2. $V(xt) \leq V(x)$ при всех $x \in X$ и $t \geq 0$;

3. линии уровня V не содержат ненулевых ω-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что нулевое сечение Θ равномерно устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $|x_n| < \delta$, $\delta_n \downarrow 0$ и $t_n \geq 0$ такие, что

$$|x_n t_n| \geq \varepsilon_0. \tag{5.3.1}$$

С другой стороны, $0 \leq a(|x_n t_n|) \leq V(x_n t_n) \leq V(x_n) \to 0$ при $n \to +\infty$ и, следовательно, $|x_n t_n| \to 0$. Последнее противоречит соотношению (5.3.1).

Теперь покажем, что $\lim\limits_{t \to +\infty} |xt| = 0$ при всех $x \in X$. Действительно, если допустить противное, то найдется $x_0 \in X$ ($|x_0| \neq 0$) такое, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \sup |x_0 t| > 0$, т.е. существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $t_n \to +\infty$, для которых

$$|x_0 t_n| \geq \varepsilon_0. \tag{5.3.2}$$

Заметим, что $\Sigma^+_{x_0}$ относительно компактно. Действительно, $a(|x_0 t|) \leq V(x_0 t) \leq V(x_0)$ и, следовательно, $|x_0 t| \leq a^{-1}(V(x_0))$ при всех $t \geq 0$. Таким образом последовательность $\{x_0 t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $\tilde{x} := \lim\limits_{n \to +\infty} x_0 t_n$, тогда $\tilde{x} \in \omega_{x_0}$. Рассуждая так же, как и в теореме 5.1.1, можно показать, что существует $c \geq 0$ для которого $V(x) = c$ при всех $x \in \omega_{x_0}$. Так как $\tilde{x} \in \omega_{x_0}$ и $\tilde{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} x_0 t_n$, то из (5.3.2) следует, что $|\tilde{x}| > 0$, поэтому $c = V(\tilde{x}) \geq a(|\tilde{x}|) > 0$. Таким образом, линии уровня функции V содержат ненулевые ω–предельные точки, что противоречит условию теоремы. Тем самым равномерная асимптотическая устойчивость в целом нулевого сечения доказана.

Необходимость. Пусть нулевое сечение Θ равномерно асимптотически устойчиво в целом. Функцию $V : X \to \mathbb{R}_+$ определим равенством (5.1.1). Непосредственно из определения V следует, что она удовлетворяет условиям 1. и 2. теоремы. Покажем, что она непрерывна. Для этого заметим, что в условиях теоремы неавтономная система $\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \rangle$ диссипативна. Покажем, что $J \subseteq \Theta$, где J – центр Левинсона $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$. Действительно, если $x \in J$, то согласно теореме 1.1.2 полутраектория Σ^+_x продолжаема влево, т.е. существует непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \to J$ такое, что $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t + s)$ при всех $t \in \mathbb{T}_1$, $s \in \mathbb{S}$ и $\varphi(0) = x$. Так как J компактно, то множество α–предельных точек α_{φ_x} движения φ непусто, компактно и инвариантно. Очевидно $\alpha_{\varphi_x} \cap \Theta \neq \emptyset$ и, следовательно, существует $t_n \to -\infty$ такая, что $|\varphi(t_n)| \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$\delta(\varepsilon) > 0$ выбрано из условия равномерной устойчивости Θ. Тогда при достаточно больших n имеем $|\varphi(t_n)| < \delta$ и, следовательно, $|\pi^t\varphi(t_n)| = |\varphi(t + t_n)| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. В частности, $|x| = |\varphi(t_n - t_n)| < \varepsilon$ и в силу произвольности ε имеем $|x| = 0$ т.е. $J \subseteq \Theta$.

Покажем теперь, что при любом $r > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\leq r} |xt| = 0. \tag{5.3.3}$$

Допустим, что это не так, тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0,\ r_0 > 0,\ |x_n| < r_0$ и $t_n \to +\infty$ такие, что

$$|x_n t_n| \geq \varepsilon_0. \tag{5.3.4}$$

В силу диссипативности системы $\big\langle (X, \mathbb{T}_1, \pi), (Y, \mathbb{T}_2, \sigma), h \big\rangle$ последовательность $\{x_n t_n\}$ можно считать сходящейся. Положим $x_0 := \lim\limits_{n\to+\infty} x_n t_n$ и заметим, что $x_0 \in J$, поэтому $|x_0| = 0$. Последнее противоречит (5.3.4). Итак, соотношение (5.3.3) имеет место. Непрерывность V устанавливается дословным повторением рассуждений теоремы 5.1.1, но при этом вместо (5.1.2) следует воспользоваться условием (5.3.3).

Что касается третьего условия, то оно проверяется также, как и в теореме 5.1.1. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 5.3.1 остается справедливой, если в ней X заменить на некоторую трубчатую окрестность $U_r := \{x \in X\ :\ |x| \leq r\}$ $(r > 0)$ нулевого сечения Θ.

Нулевое сечение Θ называют равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и существует $r > 0$ такое, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |xt| = 0$ при всех $x \in U_r$.

Незначительно изменив доказательство теоремы 5.3.1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.3.2. *Пусть Y компактно. Для того чтобы нулевое сечение Θ было равномерно асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали $r > 0$ и непрерывная функция $V : U_r \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *$V(x) \geq a(|x|)$ при всех $x \in U_r$, $V(\theta_y) = 0$ при всех $y \in Y$;*

(2) *$V(xt) \le V(x)$, если $x\tau \in U_r$ при всех $\tau \in [0,t]$;*
(3) *линии уровня V не содержат ненулевых ω-предельных точек динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Замечание 5.3.3. *Также, как и в лемме 5.1.2, можно показать, что в теореме 5.3.2 условие 3. можно заменить следующим: линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий динамической системы $(X, \mathbb{T}_1, \pi)$.*

Наконец, отметим, что имеет место

Теорема 5.3.4. *Для того чтобы нулевое сечение Θ было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали $r > 0$ и функции $V : U_r \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*
(1) *$V(x) \ge a(|x|)$ при всех $x \in U_r$ и $\lim\limits_{|x|\to 0} V(x) = 0$;*
(2) *$V(xt) \le V(x)$, если $x\tau \in U_r$ при всех $\tau \in [0,t]$.*

Доказательство. Достаточность. Покажем, что нулевое сечение равномерно устойчиво. Допустим, что это не так. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ $(\varepsilon_0 < r)$, $\delta_n \downarrow 0$, $|x_n| < \delta_n$ и $t_n \ge 0$ такие, что $x_n\tau \in U_r$ при всех $\tau \in [0, t_n]$ и

$$|x_n t_n| \ge \varepsilon_0. \tag{5.3.5}$$

Заметим, что

$$a(\varepsilon_0) \le a(|x_n t_n|) \le V(x_n t_n) \le V(x_n). \tag{5.3.6}$$

Переходя к пределу в (5.3.6) при $n \to +\infty$, получим $a(\varepsilon_0) \le 0$ и, следовательно, $\varepsilon_0 = 0$. Последнее противоречит выбору ε_0. Таким образом, равномерная устойчивость Θ доказана.

Необходимость. Пусть Θ равномерно устойчиво. Для $\varepsilon_0 = 1$ подберем $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0) > 0$ $(\delta_0 \le 1)$ из условия равномерной устойчивости Θ. Положим $r := \delta_0$ и определим $V : U_r \to \mathbb{R}_+$ равенством (5.1.1). Нетрудно убедиться, что функция V является искомой, т.е. удовлетворяет условиям 1. и 2. теоремы 5.3.4. Теорема доказана.

Замечание 5.3.5. *В условиях теоремы 5.3.4 функция V, вообще говоря, не является непрерывной в отличие от теорем 5.3.1 и 5.3.2.*

Из приведенных в этом параграфе теорем можно получить соответствующие утверждения для уравнения (5.1.17). Предварительно приведем следующие определения.

Пусть $f(t,0) \equiv 0$ и функция $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ регулярна. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (5.1.17) равномерно устойчиво, если для любых $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $g \in H(f)$, $||v|| < \delta$ влечет $||\varphi(t,v,g)|| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$.

Если нулевое решение уравнения (5.1.17) равномерно устойчиво и существует $\gamma > 0$ такое, что $\lim\limits_{t\to+\infty} ||\varphi(t,v,g)|| = 0$ при всех $g \in H(f)$ и $v \in B(0,\gamma)$, то нулевое решение уравнения (5.1.17) назовем равномерно асимптотически устойчивым.

Наконец, нулевое решение (5.1.17) назовем равномерно асимптотически устойчивым в целом, если оно равномерно устойчиво и $||\varphi(t,v,g)|| \to 0$ при $t \to +\infty$ каковы бы ни были $g \in H(f)$ и $v \in E^n$.

Отметим, что из результатов работ [**157**],[**251**] следует эквивалентность общепринятого определения равномерной асимптотической устойчивости (равномерной асимптотической устойчивости в целом) и приведенного выше.

Из теорем 5.3.1, 5.3.2 и замечания 5.3.3 следуют

Теорема 5.3.6. *Пусть $H(f)$ компактно и $f(t,0) \equiv 0$. Для того чтобы нулевое решение уравнения (5.1.17) было равномерно асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : H(f) \times E^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *$V(g,v) \geq a(||v||)$ при всех $v \in E^n$, $V(g,0) = 0$, $g \in H(f)$ и $Im\, a = Im\, V$, где $a \in \mathfrak{A}$;*
(2) *$V(g_\tau, \varphi(\tau,v,g)) \leq V(g,v)$ при всех $g \in H(f)$, $v \in E^n$ и $\tau \geq 0$;*
(3) *какова бы ни была функция $g \in H(f)$ линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.1.18), кроме тривиальной.*

Теорема 5.3.7. *Пусть $H(f)$ компактно и $f(t,0) \equiv 0$. Для того чтобы нулевое решение уравнения (5.1.17) было равномерно асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовали и непрерывная функция $V : H(f) \times B(0,r_0) \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *$V(g,v) \geq a(||v||)$ и $V(g,0) = 0$ при всех $g \in H(f)$ и $x \in B(0,r_0)$, где $a \in \mathfrak{A}$;*
(2) *$V(g_t, \varphi(t,v,g)) \leq V(g,v)$, если $\varphi(t,v,g) \in B(0,r_0)$ при всех $\tau \in [0,t]$;*
(3) *каковы бы ни была функция $g \in H(f)$ линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.1.18), кроме тривиальной.*

Из теорем 5.3.6 и 5.3.7 можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости, удобные для приложений.

Теорема 5.3.8. *Пусть $H(f)$ компактно, $f(t,0) \equiv 0$ и существует непрерывно дифференцируемая функция $V \in C(\mathbb{R} \times E^n, \mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условиям:*

(1) *$a(||u||) \leq V(t,u) \leq b(||u||) \quad (a, b \in \mathfrak{A},\ Im\, a = Im\, b)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $u \in E^n$;*
(2) *$\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V \cap \mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}} \cap \mathfrak{M}_{grad_u V}$;*
(3) *$\dot{V}_f(t,u) := \dfrac{\partial}{\partial t} V(t,u) + \big\langle grad_u V, f \big\rangle \leq 0 \quad (t \in \mathbb{R},\ u \in E^n)$;*
(4) *какова бы ни была функция $g \in H(f)$ линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.1.18), кроме тривиальной.*

Тогда нулевое решение уравнения (5.1.1) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Теорема 5.3.9. *Пусть $r > 0$, $H(f)$ компактно, $f(t,0) \equiv 0$ и существует непрерывно дифференцируемая функция $V \in C(\mathbb{R} \times B(0,r), \mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *$a(||u||) \leq V(t,u) \leq b(||u||) \quad (a, b \in \mathfrak{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in B(0,r)$;*
(2) *$\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}_V \cap \mathfrak{M}_{\frac{\partial V}{\partial t}} \cap \mathfrak{M}_{grad_u V}$;*

(3) $\dot{V}_f(t,u) := \dfrac{\partial}{\partial t}V(t,u) + \big\langle grad_u V(t,u), f(t,u)\big\rangle \le 0 \quad (t \in \mathbb{R},\ u \in E^n)$;

(4) *какова бы ни была функция $g \in H(f)$ линии уровня функции V не содержат положительных полутраекторий уравнения (5.1.18), кроме тривиальной.*

Тогда нулевое решение уравнения (5.1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Доказательство теорем 5.3.8 и 5.3.9 строится по той же схеме, как и в теореме 5.1.17.

Утверждения, близкие к теореме 5.3.9, получены в работах [**3**],[**41**].

5.4. Уравнения с конвергенцией

1. Приведем критерии конвергентности нелинейного уравнения (5.1.17), получающиеся из теорем 2.4.3, 2.4.12 и 2.4.13, следствия 2.4.4 и теорем 2.5.7 и 2.5.8, применяя последние к неавтономной динамической системе, порожденной уравнением (5.1.17).

Теорема 5.4.1. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по u на компактах из E^n* [**152**]. *Для того чтобы уравнение (5.1.17) было конвергентным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(1) *уравнение (5.1.17) имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение;*

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\varphi(t,v_1,g) - \varphi(t,v_2,g)\| = 0$ *при всех $g \in H(f)$ и $v_1, v_2 \in E^n$;*

(3) *для любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ такое, что $\|v_1 - v_2\| < \delta$ ($\|v_1\|, \|v_2\| < \delta$) влечет $\|\varphi(t,v_1,g) - \varphi(t,v_2,g)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge 0$ и $g \in H(f)$.*

Отметим, что, в случае почти периодичности функции f, теорема 5.4.1 обобщает и уточняет критерий почти периодической конвергенции В.И. Зубова [**38**].

Теорема 5.4.2. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по u на компактах из E^n. Для того чтобы* *уравнение (5.1.17) было конвергентным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *уравнение (5.1.17) имеет хотя бы одно ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение;*
2) *Каковы бы ни были $g \in H(f)$ и $v \in E^n$ решение $\varphi(\cdot, v, g)$ уравнения (5.1.18) асимптотически устойчиво.*

В случае периодичности функции f теорема 5.4.2 совпадает с теоремой Н.Н. Красовского - В.А. Плисса [**79**].

Теорема 5.4.3. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по и на компактах из E^n и уравнение (5.1.17) диссипативно. Для того чтобы уравнение (5.1.17) было конвергентным, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : H(f) \times E^n \times E^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *V положительно определена, то есть $V(g, v_1, v_2) = 0$ ($g \in H(f)$ и $v_1, v_2 \in E^n$) тогда и только тогда, когда $v_1 = v_2$;*
2) *$V(g_t, \varphi(t, v_1, g), \varphi(t, v_2, g)) \leq V(g, v_1, v_2)$ при всех $t \geq 0$, $v_1, v_2 \in E^n$ и $g \in H(f)$;*
3) *$V(g_t, \varphi(t, v_1, g), \varphi(t, v_2, g)) = V(g, v_1, v_2)$ при всех $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, v_2 \in E^n$.*

В случае периодичности функции f теорема 5.4.3 совпадает с теоремами 7.2 и 7.3 из [**79**].

Теорема 5.4.4. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)$ рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по и на компактах из E^n и уравнение (5.1.17) диссипативно. Для того чтобы уравнение (5.1.17) было конвергентным, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $V : H(f) \times E^n \times E^n \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *V положительно определена;*
(2) *$V(g_t, \varphi(t, v_1, g), \varphi(t, v_2, g)) < V(g, v_1, v_2)$ при всех $t > 0$, $g \in H(f)$ и $v_1, v_2 \in E^n$, $v_1 \neq v_2$;*

2. Пусть E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $[E]$ – банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из E в E, снабженное операторной нормой.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{5.4.1}$$

где $A \in C(\mathbb{R}, [E])$ и $f \in C(\mathbb{R}, E)$. Наряду с уравнением (5.4.1) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$\dot{u} = A(t)u \tag{5.4.2}$$

и обозначим через $U(t, A)$ оператор Коши для уравнения (5.4.2).

В этом параграфе мы будем предполагать, что множества $H(A)$ и $H(f)$ компактны, соответственно в $C(\mathbb{R}, [E])$ и $C(\mathbb{R}, E)$, хотя некоторые из приводимых ниже утверждений имеют место и без этого условия.

Лемма 5.4.5. *Для того чтобы уравнение (5.4.1) было конвергентным, необходимо и достаточно существование положительных чисел $\mathcal{N}$ и ν таких, что*

$$\|U(t, A)U^{-1}(\tau, A)\| \le \mathcal{N} \exp^{-\nu(t-\tau)} \tag{5.4.3}$$

при всех $t \ge \tau$ $(t, \tau \in \mathbb{R})$.

Доказательство. Сформулированное утверждение следует из определения конвергентности и того, что равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (5.4.2) эквивалентна условию (5.4.3).

Лемма 5.4.6. *Отображение $U : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, [E]) \to [E]$ $(U : (t, A) \to U(t, A))$ непрерывно по A равномерно по $t \in \mathbb{R}$ на компактах из $\mathbb{R}$, то есть для любого $\ell > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{|t|\le\ell} \|U(t, A_n) - U(t, A)\| = 0$, если $A_n \to A$ в $C(\mathbb{R}, [E])$.*

Доказательство. Пусть $A_n \subset C(\mathbb{R}, [E])$, $A_n \to A$ равномерно на компактах из $\mathbb{R}$ и $\ell > 0$. Тогда существует положительное число $M(\ell)$ такое, что

$$\max_{|t|\le\ell} \|A_n(t)\| \le M(\ell). \tag{5.4.4}$$

Так как $U(t, A_n)$ является решением системы

$$\begin{cases} \dot{U}(t, A_n) = A_n(t)U(t, A_n) \\ U(0, A_n) = Id_E, \end{cases}$$

где Id_E – единичный оператор в E, то имеем

$$\|U(t,A_n)\| \le \exp(\int_{t_0}^{t} \|A_n(s)\|ds) \quad (t > t_0,\ t,t_0 \in [-\ell,\ell]).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\max_{|t|\le \ell} \|U(t,A_n)\| \le \exp(2\ell M(\ell)) \quad (n = 1,2,\dots).$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $V_n(t) := U(t,A) - U(t,A_n)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dot{V}_n(t) = A(t)V_n(t) + [A(t) - A_n(t)]U(t,A_n) \\ V_n(0) = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$V_n(t) = U(t,A)\int_0^t U^{-1}(\tau,A)[A_n(\tau) - A(\tau)]U(\tau,A_n)d\tau. \quad (5.4.5)$$

Пусть $K(\ell) := \max\limits_{|t|\le\ell}\{\|U(t,A)\|, \|U^{-1}(t,A)\|\}$. Из (5.4.4) и (5.4.5) следует неравенство

$$\max_{|t|\le\ell} \|V_n(t)\| \le K^2(l)2\ell\exp(2\ell M(\ell)) \max_{|t|\le\ell} \|A_n(t) - A(t)\|. \quad (5.4.6)$$

Переходя к пределу в (5.4.6) при $n \to +\infty$, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{|t|\le l} \|U(t,A) - U(t,A_n)\| = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.4.7. *Пусть $\mathcal{N} > 0$ и $\nu > 0$ таковы, что выполнено неравенство* (5.4.3). *Тогда при всех $B \in H(A)$, $t \ge \tau$ и $\tau \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$\|U(t,B)U^{-1}(\tau,B)\| \le \mathcal{N}\exp(-\nu(t-\tau)), \quad (5.4.7)$$

где $U(t,B)$ – оператор Коши уравнения

$$\dot{y} = B(t)y \quad (B \in H(A)). \quad (5.4.8)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{N} > 0$ и $\nu > 0$ таковы, что выполнено неравенство (5.4.3), и $B \in H(A)$. Тогда существует $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$ такая, что $A_{\tau_n} \to B$ в $C(\mathbb{R},[E])$. Заметим, что

$U(t+\tau, A) = U(t, A_\tau)U(\tau, A)$ при всех $t, \tau \in \mathbb{R}$ и $A \in C(\mathbb{R}, [E])$, поэтому

$$\begin{aligned}
&U(t, A_{\tau_n})U^{-1}(\tau, A_{\tau_n}) = \\
&U(t, A_{\tau_n})U(\tau_n, A)U^{-1}(\tau_n, A)U^{-1}(\tau, A_{\tau_n}) = \\
&U(t+\tau_n, A)U^{-1}(t+\tau_n, A).
\end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\|U(t, A_{\tau_n})U^{-1}(\tau, A_{\tau_n}) \le \mathcal{N}\exp(-\nu(t-\tau)) \quad (t \ge \tau,\, n = 1, 2, \dots).$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to +\infty$ и учитывая лемму 5.4.6, получим неравенство (5.4.7). Лемма доказана.

Лемма 5.4.8. *Пусть выполнено условие* (5.4.3). *Тогда при каждом* $B \in H(A)$ *и* $p \ge 1$ *равенством*

$$\|v\|_{B,p} = \{\int_0^{+\infty} \|U(t,B)v\|^p dt\}^{\frac{1}{p}} \tag{5.4.9}$$

на E *определяется норма, топологически эквивалентная старой норме, причем*

$$\begin{aligned}
&\|U(\tau, B)v_1 - U(\tau, B)v_2\|_{B_\tau, p} \\
\le\ &\mathcal{N}(\frac{a}{\nu})^{\frac{1}{p}} \exp(-\nu\tau)\|v_1 - v_2\|_{B,p}
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

при всех $\tau \ge 0$.

Доказательство. Из неравенства Минковского следует, что равенством (5.4.9) определяется некоторая норма на E. Покажем, что существуют положительные числа m_p и M_p, не зависящие от $B \in H(A)$, такие, что $m_p\|v\| \le \|v\|_{B,p} \le M_p\|v\|$. Первое неравенство следует из (5.4.3) и неравенства

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{B,p}^p = \int_0^{+\infty} \|U(t,B)v\|^p dt \le \int_0^{+\infty} \|U(t,B)\|^p dt \|v\|^p \le \\
&\mathcal{N}^p \int_0^{+\infty} \exp(-\nu p t) dt \|v\|^p = \frac{\mathcal{N}^p}{\nu p}\|v\|^p.
\end{aligned}$$

С другой стороны, так как $U(-\tau, B_\tau)U(\tau, B)v = v$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $v \in E$, то

$$\|v\| = \|U(-\tau, B_\tau)U(\tau, B)v\| \leq \|U(-\tau, B_\tau)\|\|U(\tau, B)v\| \leq \exp(a\tau)\|U(\tau, B)v\| \quad (a := \sup\{\|A(t)\| : \, t \in \mathbb{R}\} < +\infty)$$

и, следовательно,

$$\|v\|^p_{B,p} = \int_0^{+\infty} \|U(t, B)v\|^p dt \geq \int_0^{+\infty} (\exp(-at)\|v\|)^p dt = \int_0^{+\infty} \exp(-apt)dt\|v\|^p = \frac{1}{ap}\|v\|^p$$

$(m_p = (ap)^{-\frac{1}{p}})$. Таким образом,

$$(ap)^{-\frac{1}{p}}\|v\| \leq \|v\|_{B,p} \leq \mathcal{N}(\nu p)^{-\frac{1}{p}}\|v\|. \tag{5.4.11}$$

Установим теперь неравенство (5.4.10). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}
&\|U(\tau, B)v_1 - U(\tau, B)v_2\|^p_{B_\tau, p} = \\
&\int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)[U(\tau, B)v_1 - U(\tau, B)v_2]\|^p dt = \\
&\int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)U(\tau, B)(v_1 - v_2)\|^p dt = \\
&\int_0^{+\infty} \|U(t + \tau, B)(v_1 - v_2)\|^p dt = \int_\tau^{+\infty} \|U(s, B)(v_1 - v_2)\|^p ds \\
&\leq \int_\tau^{+\infty} \mathcal{N}^p \exp(-\nu ps)\|v_1 - v_2\|^p ds = \frac{\mathcal{N}^p}{\nu p}\exp(-\nu p\tau)\|v_1 - v_2\|^p \\
&\leq \frac{\mathcal{N}^p ap}{\nu p}\exp(-\nu p\tau)\|v_1 - v_2\|^p_{B,p}.
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует (5.4.10). Лемма доказана.

Оказывается, если уравнение (5.4.1) конвергентно, то это свойство сохраняется при малых нелинейных возмущениях. Имеет место теорема.

Теорема 5.4.9. *Пусть A, f и F таковы, что $H(A)$, $H(f)$ и $H(F)$ компактны в $C(\mathbb{R}, [E])$, $C(\mathbb{R}, E)$ и $C(\mathbb{R} \times E, E)$ соответственно и функция F удовлетворяет условию Липшица по $u \in E$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ с достаточно малой константой*

Липшица ($Lip(F) < \nu^2(\mathcal{N}a)^{-1}$). *Тогда, если уравнение* (5.4.1) *конвергентно, то возмущенное уравнение*

$$\dot{u} = A(t)u + F(t,u) \tag{5.4.12}$$

также конвергентно.

Доказательство. Обозначим через

$$H(A,f,F) := \overline{\{(A_\tau, f_\tau, F_\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}}.$$

Пусть $v \in B$, $(B,g,G) \in H(A,f,F)$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Через $\varphi(\cdot, v, B, g, G)$ обозначим решение уравнения

$$\dot{v} = B(t)v + g(t) + G(t,v), \tag{5.4.13}$$

проходящее через точку v при $t = 0$.

В условиях теоремы уравнение (5.4.13) имеет единственное решение, определенное на $\mathbb{R}$ и проходящее через точку v при $\tau = 0$, каковы бы ни были $(B,g,G) \in H(A,f,F)$ и $v \in E$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в условиях теоремы 5.4.9 применима теорема 1.2 [**29**] (глобальная теорема существования и единственности) к уравнению (5.4.13).

Положим $Y := H(A,f,F)$ и через $(Y,\mathbb{R},\sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y. Пусть $X := E \times Y$. Определим на X динамическую систему по следующему правилу: $\pi^\tau(v; B, g, G) := (\varphi(\tau, v, B, g, G); B_\tau, g_\tau, G_\tau)$. В условиях теоремы 5.4.9 Y компактно и тройка $\langle (X,\mathbb{R},\pi), (Y,\mathbb{R},\sigma), h\rangle$, где $h := pr_2 : X \to Y$, есть неавтономная динамическая система. Покажем, что к построенной динамической системе применима теорема 2.5.5 и следствие 2.5.6. Действительно, множество Y компактно по условию теоремы. Пространство непрерывных сечений $\Gamma(H(A,f,F), B \times H(A,f,F))$, очевидно, изоморфно пространству всех непрерывных отображений $x : H(A,f,F) \to E$ (см. параграф 3.3) и, следовательно, оно непусто. Определим на $X \times X$ скалярную неотрицательную функцию V по следующему правилу:

$$V((v_1; B, g, G), (v_2; B, g, G)) := \|v_1 - v_2\|_{B,1} =$$
$$\int_0^{+\infty} \|U(t,B)(v_1 - v_2)\| dt$$

при любых $(B,g,G) \in H(A,f,F)$ и $v_1, v_2 \in E$. Из леммы 5.4.8 следует, что построенная функция удовлетворяет условиям а.-в. теоремы 2.5.5. Пусть $\varphi(\cdot, v_i, B, g, G)$ – решение уравнения (5.4.13), проходящее через точку v_i $(i = 1,2)$ при $\tau = 0$. Тогда имеет место тождество

$$\dot{\varphi}(\tau, v_i, B, g, G) \equiv B(\tau)\varphi(\tau, v_i, B, g, G) + \\ g(\tau) + G(\tau, \varphi(\tau, v_i, B, g, G)).$$

Откуда следует, что

$$\varphi(\tau, v_i, B, g, G) = U(\tau, B)(v_i + \\ \int_0^\tau U^{-1}(s,B)[g(s) + G(s, \varphi(s, v_i, B, g, G))]ds). \quad (5.4.14)$$

Из (5.4.14) и лемм 5.4.7 и 5.4.8 следует

$$\|\varphi(\tau, v_1, B, g, G) - \varphi(\tau, v_2, B, g, G)\|_{B_\tau} =$$
$$\int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)(\varphi(\tau, v_1, B, g, G) - \varphi(\tau, v_2, B, g, G))\| dt =$$
$$\int_0^{+\infty} \|U(t, B_\tau)U(\tau, B)(v_1 - v_2 +$$
$$\int_0^{\tau} U^{-1}(s, B)[G(s, \varphi(s, v_1, B, g, G)) -$$
$$G(s, \varphi(s, v_2, B, g, G))]ds\| dt \leq$$
$$\int_0^{+\infty} \|U(t + \tau, B)(v_1 - v_2)\| dt +$$
$$\int_0^{+\infty} \| \int_0^{\tau} U(t + \tau, B)U^{-1}(s, B)[G(s, \varphi(s, v_1, B, g, G)) -$$
$$G(s, \varphi(s, v_2, B, g, G))]ds\| dt \leq \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau)\|v_1 - v_2\| +$$
$$+ \quad \int_0^{+\infty} \int_0^{\tau} \mathcal{N} \exp(-\nu(t + \tau - s)) Lip(G) \|\varphi(s, v_1, B, g, G) -$$
$$\varphi(s, v_2, B, g, G)\| ds\, dt = \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau)\|v_1 - v_2\| +$$
$$\frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau) Lip(G) \int_0^{\tau} \exp(\nu s \|\varphi(s, v_1, B, g, G) -$$
$$\varphi(s, v_2, B, g, G)\| ds \leq \frac{\mathcal{N}}{\nu} \exp(-\nu\tau) a \|v_1 - v_2\|_{B,1} +$$
$$\frac{\mathcal{N}a}{\nu} \exp(-\nu\tau) Lip(G) \int_0^{\tau} \exp(\nu s) \|\varphi(s, v_1, B, g, G) -$$
$$\varphi(s, v_2, B, g, G)\|_{B,1} ds.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\exp(\nu\tau)$ и, положив $\varphi(\tau) := \exp(\nu s)\|\varphi(s, v_1, B, g, G) - \varphi(s, v_2, B, g, G)\|_{B,1}$, получим

$$\varphi(\tau) \leq \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \|v_1 - v_2\|_{B,1} + \frac{\mathcal{N}a}{\nu} Lip(G) \int_0^{\tau} \varphi(\tau) ds. \qquad (5.4.15)$$

Применяя к (5.4.15) неравенство Гронуолла-Белмана, получим

$$\varphi(\tau) \leq \frac{\mathcal{N}a}{\nu} \|v_1 - v_2\|_{B,1} \exp(\frac{\mathcal{N}a}{\nu} Lip(G)\tau). \qquad (5.4.16)$$

Следовательно,

$$\|\varphi(\tau, v_1, B, g, G) - \varphi(\tau, v_2, B, g, G)\|_{B,1} \leq \\ \frac{\mathcal{N}a}{\nu}\|v_1 - v_2\| \exp(-(\nu - \frac{\mathcal{N}a}{\nu} Lip(G))\tau). \qquad (5.4.17)$$

Из неравенства (5.4.17) имеем

$$V((\varphi(\tau, v_1, B, g, G); B_\tau, g_\tau, G_\tau)), \\ (\varphi(\tau, v_2, B, g, G); B_\tau, g_\tau, G_\tau)) \leq \\ M \exp(-\lambda\tau) V((v_1; B, g, G), (v_2; B, g, G))$$

(здесь: $M = \frac{\mathcal{N}a}{\nu}$, $\lambda = -\frac{\mathcal{N}a}{\nu} Lip(G) + \nu > 0$) при всех $v_1, v_2 \in E$, $\tau \geq 0$ и $(B, g, G) \in H(A, f, F)$. Таким образом, все условия теоремы 2.5.5 и следствия 2.5.6 выполнены. Применяя их к построенной неавтономной динамической системе, завершаем доказательство теоремы.

Следствие 5.4.10. *В условиях теоремы 5.4.9, если A, f и F совместно τ-периодичны* (*почти периодичны, рекуррентны*)*, то уравнение* (5.4.12) *конвергентно и каждое уравнение* (5.4.13) *имеет единственное τ-периодическое* (*почти периодическое, рекуррентное*) *равномерно асимптотически устойчивое в целом решение.*

Отметим, что утверждения, аналогичные леммам 5.4.7 и 5.4.8 в случае, когда оператор-функция $A(t)$ стационарна, доказаны в [**29**]. Следствие 5.4.10 в случае периодичности A, f и F ($E = \mathbb{R}^n$) установлено в [**79**, с.99].

3. Пусть H – вещественное или комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = f(t, u), \qquad (5.4.18)$$

где $f \in C(\mathbb{R} \times H, H)$. Наряду с уравнением (5.4.18) рассмотрим его H-класс

$$\dot{v} = g(t, v) \quad (g \in H(f)). \qquad (5.4.19)$$

Имеет место

Теорема 5.4.11. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times H, H)$ и множество $H(f)$ компактно в $C(\mathbb{R} \times H, H)$. Если существует самосопряженная оператор-функция $A \in C(\mathbb{R}, [H])$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) $\mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$;

(2) $Re\langle A(t)(u-v), f(t,u) - f(t,v)\rangle \le -\alpha\|u-v\|$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $u, v \in H$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ – *скалярное произведение в* H, $\|\cdot\|^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$ *и* $\alpha > 0$);

(3) $\|\dot{A}(t)\| \le \beta$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$ ($\beta \ge 0$);

(4) $\langle A(t)u, u\rangle \ge \gamma\|u\|^2$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $\in H$ *и* $-2\alpha + \beta := -\lambda < 0$.

Тогда уравнение (5.4.18) *конвергентно, то есть*

a. *каковы бы ни были* $g \in H(f)$ *и* $v \in H$ *существует единственное решение* $\varphi(\cdot, v, g)$ *уравнения* (5.4.19), *проходящее через точку* v *при* $t = 0$ *и определенное на* $\mathbb{R}$;

b. *при любом* $g \in H(f)$ *уравнение* (5.4.19) *имеет единственное компактное решение* $\psi_g(t) = \varphi(t, v_g, g)$, *определенное на* $\mathbb{R}$;

c. *существуют положительные числа* $\mathcal{N}$ *и* ν *(не зависящие от* $g \in H(f)$ *и* $v \in H$*) такие, что*

$$\|\varphi(t,v,g) - \varphi(t,v_g,g)\| \le \mathcal{N}\exp(-\nu t)\|v - v_g\| \tag{5.4.20}$$

при всех $g \in H(f)$, $v \in H$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Сформулированное утверждение докажем в несколько этапов.

1. Так как $\mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_{\dot{A}}$, то из **[152]** – **[154]** следует существование непрерывного отображения $q : H(f) \to H(A) \times H(\dot{A})$, удовлетворяющего условию

$$q(f) = (A, \dot{A}). \tag{5.4.21}$$

2. Покажем, что в условиях теоремы любая функция $g \in H(f)$ удовлетворяет условиям, аналогичным 1.–4. Действительно, пусть $g \in H(f)$ и $q(g) = (B_g, \dot{B}_g) \in H(A) \times H(\dot{A})$. Тогда существует $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$ такая, что $g = \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\tau_n}$ и $(B_g, \dot{B}_g) = (\lim\limits_{n\to+\infty} A_{\tau_n}, \lim\limits_{n\to+\infty} \dot{A}_{\tau_n})$. Из условия 2. теоремы следует, что

$$\begin{aligned} &Re\langle A(t+\tau_n)(u-v), f(t+\tau_n,u) \\ - \ &f(t+\tau_n,v)\rangle \le -\alpha\|u-v\|^2 \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$, u и $v \in H$ (n=1,2,...). Переходя к пределу в (5.4.22) при $n \to +\infty$, получим

$$Re\langle B_g(t)(u-v), g(t,u)-g(t,v)\rangle \leq -\alpha\|u-v\|^2. \qquad (5.4.23)$$

Аналогичным образом показывается, что оператор-функция $B_g \in H(A)$ ($g \in H(f)$) удовлетворяет условиям 3. и 4. с теми же константами β и γ, что и оператор-функция $A \in C(\mathbb{R},[H])$.

3. Незначительная модификация рассуждений работы [**76**] (см. также [**35**]) позволяет доказать, что при выполнении условий теоремы, каково бы ни было $u \in H$, уравнение (5.4.18) имеет единственное решение $\varphi(\cdot,u,f)$, определенное на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0,u,f)=u$. Учитывая, что, наряду с функцией f, условиям теоремы удовлетворяет и любая функция $g \in H(f)$, заключаем, что для любого $v \in H$ и $g \in H(f)$ уравнение (5.4.19) имеет единственное решение $\varphi(\cdot,v,g)$, определенное на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0,v,g)=v$.

4. Положим $Y := H(f)$ и через $(Y,\mathbb{R},\sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y. Пусть $X = H \times H(f)$. Определим на X динамическую систему по следующему правилу: $\pi((v,g),\tau) := (\varphi(\tau,v,g),g_\tau)$. Заметим, что в условиях теоремы множество Y компактно. Тройка $\langle (X,\mathbb{R},\pi), (Y,\mathbb{R},\sigma), h\rangle$, где $h := pr_2 : X \to Y$, есть неавтономная динамическая система. Покажем, что к построенной динамической системе применима теорема 2.5.5 и следствие 2.5.6. Действительно, множество Y компактно по условию теоремы. Пространство непрерывных сечений $\Gamma(Y,X)$ непусто. Определим на $X \times X$ скалярную неотрицательную функцию V по следующему правилу:

$$V((v_1,g),(v_2,g)) := \langle B_g(0)(v_1-v_2), v_1-v_2\rangle \qquad (5.4.24)$$

для любых $g \in H(f)$ и $v_1,v_2 \in H$ $(B_g = q(g))$.

Очевидно, функция V удовлетворяет условиям 2. и 3. теоремы 2.5.5. Действительно, по условию 4.

$$\gamma\|v_1-v_2\|^2 \leq \langle A(t)(v_1-v_2), v_1-v_2\rangle \leq \delta\|v_1-v_2\|^2 \qquad (5.4.25)$$

при всех $v_1,v_2 \in H$ и $t \in \mathbb{R}$, где $\delta = \sup\{\|A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ($\delta < +\infty$, так как $\mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A$ и $H(f)$ компактно). Для $g \in H(f)$ существует $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$ такая, что $A_{\tau_n} \to B_g$. Из (5.4.25) и последнего соотношения следует, что

$$\gamma\|v_1-v_2\|^2 \leq \langle B_g(t)(v_1-v_2), v_1-v_2\rangle \leq \delta\|v_1-v_2\|^2 \qquad (5.4.26)$$

при всех $g \in H(f)$, $t \in \mathbb{R}$ и $v_1, v_2 \in H$. В частности, имеем

$$\gamma\|v_1 - v_2\|^2 \leq V((v_1, g), (v_2, g)) \leq \delta\|v_1 - v_2\|^2 \qquad (5.4.27)$$

при всех $g \in H(f)$ и $v_1, v_2 \in H$.

Наконец, покажем, что выполнено и условие 4. леммы 2.5.4. В самом деле,

$$V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) =$$
$$\langle B_{g_\tau}(0)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), \varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\rangle =$$
$$\langle B_g(\tau)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), \varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\rangle.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\dot{V}((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) =$$
$$< \dot{B}_g(\tau)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), \varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\rangle +$$
$$2Re\langle B_g(\tau)(\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)), g(\tau, \varphi(\tau, v_1, g)) -$$
$$g(\tau, \varphi(\tau, v_2, g))\rangle.$$

Из последнего равенства и (5.4.22), а также условия 3. теоремы 5.4.11 следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\dot{V}((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \leq \\
&\beta\|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2 - \\
&-2\alpha\|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2 = \\
&-\lambda\|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2.
\end{aligned} \qquad (5.4.28)$$

С другой стороны, из неравенства (5.4.27) получаем

$$\begin{aligned}
& V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \\
\leq \quad & \delta\|\varphi(\tau, v_1, g) - \varphi(\tau, v_2, g)\|^2.
\end{aligned} \qquad (5.4.29)$$

Из неравенства (5.4.28) и (5.4.29) имеем

$$\begin{aligned}
&\dot{V}((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \leq \\
&-\lambda\delta V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)).
\end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство, получим следующее соотношение

$$\begin{aligned}
&V((\varphi(\tau, v_1, g), g_\tau), (\varphi(\tau, v_2, g), g_\tau)) \leq \\
&\exp(-\lambda\delta\tau)V((v_1, g), (v_2, g))
\end{aligned}$$

при всех $g \in H(f)$, $v_1, v_2 \in H$ и $\tau \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, все условия теоремы 2.5.5 выполнены и, применяя еҷ и следствие 2.5.6 к построенной неавтономной динамической системе, завершаем доказательство теоремы 5.4.11.

Следствие 5.4.12. *В условиях теоремы 5.4.11, если правая часть f уравнения* (5.4.18) *является τ-периодической* (*почти периодической, рекуррентной*), *то уравнение* (5.4.18) *конвергентно и каждое уравнение* (5.4.19) *имеет единственное τ-периодическое* (*почти периодическое,рекуррентное*) *решение, подчиняющееся оценке* (5.4.20).

В случае, когда f является τ-периодической, то следствие 5.4.12 усиливает основной результат работы [**220**] (в [**220**] в тех же условиях доказано только существование единственного τ-периодического решения на основе принципа Лере-Шаудера в случае $H = E^n$).

Если правая часть f почти периодична и оператор-функция $A(t)$ не зависит от времени ($\dot{A}(t) \equiv 0$), то утверждение следствия 5.4.12 совпадает с основным результатом работы [**76**]. Отметим попутно, что результаты работы [**76**] получены на основе ряда тонких оценок. Наш метод носит чисто топологический характер.

Наконец, отметим, что в работе [**241**] изучаются так называемые α-сжимающие неавтономные динамические системы (то есть такие системы, которые удовлетворяют условию:

$$\rho(x_1 t, x_2 t) \leq \alpha \rho(x_1, x_2)$$

для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1, x_2 \in X$ и $h(x_1) = h(x_2)$, где $0 \leq \alpha \leq 1$) в связи с задачей об устойчивости и асимптотической устойчивости по Пуассону решений дифференциальных уравнений с монотонной правой частью.

В случае конечномерного гильбертова пространства ($H = E^n$), рекуррентности функции f и стационарности $A(t)$ ($\dot{A}(t) \equiv 0$) теорема 5.4.11 допускает следующее усиление.

Теорема 5.4.13. *Пусть $f \in C(\mathbb{R} \times H, H)$ удовлетворяет условию Липшица и рекуррентна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по и на компактах из H. Если существует самосопряженный оператор $A \in [H]$ и положительно определенная функция*

$c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что*

$$Re\langle A(u-v), f(t,u) - f(t,v)\rangle \le -c(\|u-v\|) \qquad (5.4.30)$$

и $c(r)r^{-1} \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$ *(например,* $c(r) = r^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$*), то уравнение* (5.4.18) *конвергентно.*

Доказательство. Также, как в теореме 5.4.11, устанавливается, что, каковы бы ни были $v \in H$ и $g \in H(f)$, уравнение (5.4.19) имеет единственное решение $\varphi(\cdot, v, g)$, определенное на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0, v, g) = v$. Определим функцию $\mathcal{V} : H(f) \times H \to \mathbb{R}_+$ следующим образом

$$\mathcal{V}(g, v) := \langle Av, v\rangle. \qquad (5.4.31)$$

Из равенства (5.4.31) следует, что

$$\dot{\mathcal{V}}(g_\tau, \varphi(\tau, v, g)) = 2Re\langle A\varphi(\tau, v, g), \varphi(\tau, v, g)\rangle. \qquad (5.4.32)$$

Так как $c(r)r^{-1} \to +\infty$ при $r \to +\infty$, то существует $r_0 > 0$ такое, что

$$c(r)r^{-1} > \|f_0\|\|A\| \qquad (5.4.33)$$

при всех $r > r_0$, где $\|f_0\| := \sup\{\|f(t,0)\| : t \in \mathbb{R}\}$. Пусть $t > 0$, $v \in H$ и $g \in H(f)$ таковы, что $|\varphi(\tau, v, g)\| \ge r_0$ при всех $\tau \in [0, t]$. Из (5.4.30), (5.4.32) и (5.4.33) следует, что $\mathcal{V}(g_\tau, \varphi(\tau, v, g)) < \mathcal{V}(g, v)$, и согласно теореме 5.1.15 уравнение (5.4.18) диссипативно.

Обозначим через $V : H(f) \times H \times H \to \mathbb{R}_+$ функцию, определяемую равенством

$$V(g, u, v)) = \langle A(u-v), (u-v)\rangle. \qquad (5.4.34)$$

Непосредственным вычислением получаем

$$\dot{V}(g_\tau, \varphi(\tau, u, g), \varphi(\tau, v, g)) = 2Re\langle A(\varphi(\tau, u, g) - \varphi(\tau, v, g)),$$
$$g(\tau, \varphi(\tau, u, g)) - g(\tau, \varphi(\tau, v, g))\rangle. \qquad (5.4.35)$$

Из (5.4.30) и (5.4.35) следует, что $V(g_t, \varphi(t, u, g), \varphi(t, v, g)) < V(g, u, v)$ при всех $t > 0$, $g \in H(f)$ и $u, v \in H$ $(u \ne v)$. Согласно теореме 2.5.8 уравнение (5.4.18) конвергентно.

5.5. Диссипативность и конвергентность некоторых уравнений 2-го и 3-го порядков

1. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида
$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + Q(x,y,t) \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \tag{5.5.1}$$
где F и g – непрерывные функции, определенные на $\mathbb{R}$, а $Q(x,y,t)$ непрерывна по совокупности переменных, ограничена и равномерно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по (x,y) на компактах из $\mathbb{R}^2$. Как известно, к системе (5.5.1) сводится уравнение
$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{5.5.2}$$
если ввести новую переменную $y = \dot{x} + F(x) - g(t)$, где $F(x) = \int_0^x h(\tau)d\tau$, $q(t) = \int_0^t p(s)ds$. Наряду с системой (5.5.1) рассмотрим ец H-класс
$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + G(x,y,t) \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \tag{5.5.3}$$
$(G \in H(Q) = \overline{\{Q_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}})$.

Теорема 5.5.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) $xg(x) > 0$ *при* $|x| \geq 1$*;*

(2) $\int_0^{+\infty} g(x)dx = -\int_{-\infty}^0 g(x)dx = +\infty$*;*

(3) *существует такая константа* $N > 0$*, что* $|Q(x,y,t)| \leq N$ *при* $|x| \leq 1$.

(4) $[F(x) - Q(x,y,t)]sgn\, x \geq 0$ *при* $|x| \geq 1$*, причем для любого* $G \in H(Q)$ *существует* $\theta_G > 0$ *такое, что* $F(x) - G(x,y,\theta_G) \neq 0$ *при* $|x| \geq 1$ *и* $y \in \mathbb{R}$.

(5) *при* $|x| \geq 1$ *справедливо неравенство* $|F(x) - Q(x,y,t)| \geq \alpha(y) \geq 0$*, где* $\alpha(y)$ *– измеримая по Лебегу на каждом промежутке функция и* $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(y)dy > 0$.

Тогда система (5.5.1) диссипативна.

Доказательство. Также, как и в работе **[24]** показывается, что существует такое $\eta > 0$, что в прямоугольник $\{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq \eta\}$ попадает любое решение (5.5.3) при некотором τ (τ зависит от системы (5.5.3) и соответствующего решения).

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 5.1.16.

Рассмотрим более общее уравнение

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = \mathcal{R}(x, \dot{x}, t).$$

Положим $y = \dot{x} + F(x)$, где $F(x) = \int_0^x h(\tau)d\tau$. Тогда получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + \mathcal{R}(x, y, t) \end{array} \right. \tag{5.5.4}$$

Наряду с системой (5.5.4) рассмотрим ец H-класс

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + G(x, y, t), \end{array} \right. \tag{5.5.5}$$

где $G \in H(\mathcal{R})$.

Теорема 5.5.2. *Пусть функции h, g и $\mathcal{R}$ непрерывны и $\mathcal{R}$ ограничена и равномерно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по (x, y) на компактах из $\mathbb{R}^2$. Предположим, кроме того, что существуют такие постоянные $L > N > 0$ и $K > 0$, что*

(1) $|\mathcal{R}(x, y, t)| \le N$ *при всех* x, y, $t \in \mathbb{R}$.
(2) $g(x) sgn\, x \ge L$ *при* $|x| \ge 1$.
(3) $f(x) \ge K$ *при* $|x| \ge 1$

Тогда система (5.5.4) диссипативна.

Доказательство. Также, как и в работе [**79**] введем в рассмотрение функцию $\mathcal{V}(x, y) = y^2 - yF(x) + \frac{1}{2}F(x) + 2\int_0^x g(\tau)d\tau$. Производная этой функции, взятая в силу системы (5.5.5), равна

$$\dot{\mathcal{V}}(x, y, t) = -[y - F(x)]^2 f(x) - g(x)F(x) + [2y - F(x)]G(x, y, t).$$

Согласно [**79**] существует $a > 0$ такое, что при $x^2 + y^2 \ge a^2$ $\dot{\mathcal{V}}_G(x, y, t) < 0$ и $\mathcal{V}(x, y) \to +\infty$ при $x^2 + y^2 \to +\infty$. Согласно теореме 5.1.15 система (5.5.4) диссипативна.

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, t),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$. Положим $y = ax + \dot{x}$, $z = bx + a\dot{x} + \ddot{x}$. Тогда это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax \\ \dot{y} = z - bx \\ \dot{z} = -f(x) + p(x, y, z, t) \end{cases} \tag{5.5.6}$$

Наряду с системой (5.5.6) рассмотрим еч H-класс

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax \\ \dot{y} = z - bx \\ \dot{z} = -f(x) + g(x, y, z, t), \end{cases} \tag{5.5.7}$$

где $g \in H(p)$.

Теорема 5.5.3. *Пусть функции f и $p(x, y, z, t)$ непрерывны и выполнены следующие условия:*

1. $a, b > 0$*;*
2. $0 < \frac{f(x)}{x} < ab$ *при* $|x| \geq 1$*;*
3. $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$*;*
4. $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x) - abx| = +\infty$*;*
5. *p ограничена и равномерно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по (x, y, t) на компактах из $\mathbb{R}^3$;*
6. *существует $A > 0$ такое, что $|p(x, y, z, t)| \leq A$ при всех x, y, z и $t \in \mathbb{R}$.*

Тогда система (5.5.6) *диссипативна.*

Доказательство. Для доказательства сформулированно го утверждения, следуя [**79**], рассмотрим функцию

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \frac{1}{2}(a^2 x - ay + z)^2 +$$
$$\frac{1}{2}(z - bx)^2 + \frac{b}{2}y^2 + a\int_a^x [f(\tau) - ab\tau] d\tau.$$

В условиях теоремы 5.5.3 $\mathcal{V}(x, y, z) \to +\infty$ при $x^2 + y^2 + z^2 \to +\infty$ и производная этой функции, взятая в силу системы (5.5.7), равна

$$\dot{\mathcal{V}}_g(x, y, z, t) = -a(a^2 x - ay + z)^2 +$$
$$[abx - f(x)][2(a^2 x - ay + z) - bx]$$
$$[(a^2 - b)x - ay + 2z]g(x, y, z, t).$$

Также, как и в [**79**], можно показать, что существует $a > 0$ такое, что вне шара радиуса a функция $\mathcal{V}$ вдоль траекторий (5.5.7) убывает, и согласно теореме 5.1.15 система (5.5.6) диссипативна.

2. Приведем два признака конвергентности уравнения (5.5.2), которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - h(x)y + p(t), \end{cases} \tag{5.5.8}$$

или, соответственно, системе

$$\begin{cases} \dot{x} = -F(x) + v \\ \dot{v} = -x + p(t), \end{cases} \tag{5.5.9}$$

где $v = \dot{x} + F(x)$ и $F(x) := \int_0^x h(t)dt$. Как обычно, наряду с системой (5.5.9), рассматриваем еч H-класс

$$\begin{cases} \dot{x} = -F(x) + v \\ \dot{v} = -x + g(t) \quad (g \in H(p)). \end{cases} \tag{5.5.10}$$

Теорема 5.5.4. *Если* $h(x) > 0$ (*кроме, быть может, дискретного множества точек),* $p(t)$ *рекуррентна и* $F(+\infty) = +\infty$ (*или* $F(-\infty) = -\infty$), *то уравнение* (5.5.2) *обладает единственным ограниченным на* $\mathbb{R}$ *равномерно согласованным и асимптотически устойчивым в целом решением, то есть* (5.5.2) *конвергентно.*

Доказательство. Рассуждая также, как и в [**81**], покажем, что в условиях теоремы существует замкнутый контур, который пересекает все решения каждой системы (5.5.10). Согласно теореме 5.1.14 система (5.5.9) диссипативна.

Покажем, что, на самом деле, система (5.5.9) конвергентна. Пусть $\{x_i(t), v_i(t)\}$ $(i = 1, 2)$ – два различных решения системы (5.5.10). Построим функцию

$$\varphi(t) = |x_1(t) - x_2(t)|^2 + |v_1(t) - v_2(t)|^2$$

и вычислим еч производную. Получим:

$$\dot{\varphi}(t) = -(x_1(t) - x_2(t))[F(x_1(t)) - F(x_2(t))]. \tag{5.5.11}$$

Заметим, что, если $\dot{\varphi}(t) \equiv 0$, то $x_1(t) \equiv x_2(t)$ и, следовательно, $v_1(t) \equiv v_2(t)$. Для завершения доказательства теоремы 5.5.4 достаточно сослаться на теорему 5.4.4.

Теорема 5.5.5. *Если* $\psi_1(x) = h(x) - 2D$ $(0 < D < 1)$ *и* $\psi_2(x) = g(x) - x$ *удовлетворяют условиям:*

(1) $|\psi_1(x)| \leq c_1$ *при всех* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) $|\psi_1(\overline{x}) - \psi_2(x)| \leq c_2|\overline{x}) - x|$ *при всех* $\bar{x}, x \in \mathbb{R}$*, где* $c_1 + c_2 = c < mD = \sqrt{1-D}D$*,*

то система (5.5.9) *обладает единственным ограниченным на* $\mathbb{R}$ *равномерно согласованным решением, которое асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Пусть

$$\{\varphi(t, x_i, y_i, g)\} = \{(\varphi_1(t, x_i, y_i, g), \varphi_2(t, x_i, y_i, g))$$

$(i = 1, 2,\ g \in H(f))$ – два решения системы (5.5.10) и

$$\begin{cases} u(t) := \varphi_1(t, x_1, y_1, g) - \varphi_1(t, x_2, y_2, g) \\ v(t) := \varphi_2(t, x_1, y_1, g) - \varphi_2(t, x_2, y_2, g). \end{cases}$$

Функции u и v удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = & v \\ \dot{v} = & -u - 2Dv - [\psi_2(\varphi_1(t, x_1, y_1, g)) - \psi_2(\varphi_1(t, x_2, y_2, g))] - \\ & [\psi_1(\varphi_1(t, x_1, y_1, g))\varphi_2(t, x_1, y_1, g) - \\ & \psi_1(\varphi_1(t, x_2, y_2, g))\varphi_2(t, x_2, y_2, g)]. \end{cases}$$

Также, как и в [**81**], показывается, что

$$\begin{cases} |u(t)| < (1 + \frac{c_1}{m})\alpha[\exp(-(D - \frac{c}{m})t) + \exp(-Dt)] \\ |v(t)| < (1 + c_1)(1 + \frac{c_1}{m})\alpha[\exp(-(D - \frac{c}{m})t) \\ \qquad + \exp(-Dt)], \end{cases} \tag{5.5.12}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{|u(0)|^2 + 2D|u(0)||v(0)| + |v(0)|^2} \leq \\ \frac{1}{m}\sqrt{1 + D}\sqrt{|u(0)|^2 + |v(0)|^2}.$$

Из (5.5.12) следует, что

$$\sqrt{|u(t)|^2 + |v(t)|^2} \leq \\ \mathcal{N}\exp(-(D - \frac{c}{m})t)\sqrt{|u(0)|^2 + |v(0)|^2},$$

где $\mathcal{N} > 0$ – некоторая константа, зависящая только от c_1, c_2 и D. Теперь для заверения доказательства теоремы 5.5.5 достаточно сослаться на теорему 2.5.5 и следствие 2.5.6.

Замечание 5.5.6. *Все утверждения, приведенные в этом параграфе, в периодическом случае, совпадают с хорошо известными фактами* (*см.*[**24**], [**79**], [**81**]).

5.6. Построение функции Ляпунова для однородных систем

Пусть (X, h, Y) – локально тривиальное банахово расслоение, $|\cdot| : X \to \mathbb{R}_+$ – норма на (X, h, Y), согласованная с метрикой ρ на X.

Напомним, что динамическая система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ называется [**136**] однородной порядка $m \in \mathbb{R}_+$, если для любого $x \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda > 0$ имеет место равенство $\pi(t, \lambda x) = \lambda \pi(\lambda^{m-1} t, x)$.

Неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{T}, \pi), ((Y, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ называется однородной, если автономная динамическая система $(X, \mathbb{T}, \pi)$ является однородной порядка $m = 1$.

Теорема 5.6.1. *Для динамической системы* $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *существуют положительные числа a и b такие что*

$$|\pi(t, x)| \leq (a|x|^{1-m} + bt)^{\frac{1}{1-m}} \tag{5.6.1}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in X$;

(2) *для любого $k > m - 1$ существует непрерывная функция $V : X \to \mathbb{R}_+$, обладающая со следующими свойствами:*

2.1. *$V(\lambda x) = \lambda^{k-m+1} V(x)$ для любых $\lambda \geq 0$ и $x \in X$;*

2.2. *$\alpha |x|^{k-m+1} \leq V(x) \leq \beta |x|^{k-m+1}$ для любого $x \in X$, где α и β некоторые положительные числа;*

2.3. *$V'_\pi(x) = -|x|^k$ для любого $x \in X$, где $V'_\pi(x) = \frac{d}{dt} V(\pi(t, x)) \mid_{t=0}$.*

Доказательство. Мы покажем что, из 1. следует 2. Пусть a и b – некоторые положительные числа, такие что имеет место равенство (5.6.1), тогда для каждого $k > m - 1$ мы определим функцию $V : X \to \mathbb{R}_+$ равенством

$$V(x) = \int_0^{+\infty} |\pi(t,x)|^k dt \tag{5.6.2}$$

Прежде всего мы отметим, что равенством (5.6.2) корректно определена функция $V : X \to \mathbb{R}_+$, так как интеграл, фигурирующий в правой части равенства (5.6.2) является сходящимся, более того он сходится равномерно по x на каждом ограниченном множестве из X. Действительно, так как

$$|\pi(t,x)|^k \leq (a|x|^{1-m} + bt)^{\frac{k}{1-m}}, \tag{5.6.3}$$

$$\int_0^{+\infty} |(a|x|^{1-m} + bt)^{\frac{k}{1-m}} dt = \frac{1}{b} \int_{a|x|^{1-m}}^{+\infty} \tau^{\frac{k}{1-m}} d\tau \tag{5.6.4}$$

и $\frac{k}{1-m} < -1$, то интеграл (5.6.4) является сходящимся, причем равномерно по x на каждом ограниченном подмножестве из X.

Мы покажем, что функция V, определенная при помощи равенства (5.6.2) является искомой. Непрерывность функции V следует из непрерывности отображения $\pi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ и равномерной сходимости интеграла (5.6.4) по x на каждом ограниченном подмножестве из X . Заметим теперь, что

$$V(\lambda x) = \int_0^{+\infty} |\pi(t,\lambda x)|^k dt = \int_0^{+\infty} \lambda^k |\pi(\lambda^{m-1}t, x)|^k dt$$

$$= \lambda^{k-m+1} \int_0^{+\infty} |\pi(\tau,x)|^k d\tau = \lambda^{k-m+1} V(x)$$

для любых $\lambda > 0$ и $x \in X$. Легко показать, что функция V является положительно определенной. Действительно, так как

$$V(x) = \int_0^{+\infty} |\pi(t,x)|^k dt \geq \int_0^{\varepsilon} |\pi(t,x)|^k dt = |\pi(\xi,x)|^k \tag{5.6.5}$$

для любого $\varepsilon > 0$, где $\xi = \xi(\varepsilon) \in [0,\varepsilon]$. Тогда, переходя к пределу в (5.6.5) когда $\varepsilon \to 0$, получим

$$V(x) \geq |x|^k \tag{5.6.6}$$

для всех $x \in X$. Согласно (5.6.3) и (5.6.4) мы имеем

$$V(x) \leq \beta |x|^{k-m+1} \tag{5.6.7}$$

для любого $x \in X$, где

$$\beta = \frac{(m-1)a^{\frac{k-m+1}{1-m}}}{b(k-m+1)}.$$

Из (5.6.4)–(5.6.7) следует, что функция V удовлетворяет условию 2.2 теоремы.

Наконец отметим, что

$$\frac{d}{dt}V(\pi(t,x)) = -|\pi(t,x)|^k \tag{5.6.8}$$

и, следовательно, $V'_\pi(x) = -|x|^k$ для любых $x \in X$.

Докажем теперь, что из условия 2. следует 1.. Действительно, если обознчить через $\psi(t) = V(\pi(t,x))$, тогда согласно условию 2.3. мы имеем

$$\psi'(t) = -|\pi(t,x)|^k \tag{5.6.9}$$

для любого $t \geq 0$.

Из условия 2.2. имеем $|\pi(t,x)|^{k-m+1} \geq \frac{1}{\beta}\psi(t)$ и, следовательно,

$$\psi'(t) \leq -\frac{1}{\beta^{\frac{k}{k-m+1}}}\psi(t)^{\frac{k}{k-m+1}}$$

для любого $t \geq 0$. Если $x \neq 0$, то $\psi(t) = V(\pi(t,x)) > 0$ для всех $t \geq 0$, поэтому

$$V(\pi(t,x)) \leq (V^{-\frac{m-1}{k-m+1}}(x) + \frac{m-1}{k-m+1}\beta^{-\frac{k}{k-m+1}}t)^{\frac{1}{1-m}} \tag{5.6.10}$$

для любых $x \in X$ и $t \geq 0$.

Из условия 2.2 и неравенства (5.6.10) следует, что $|\pi(t,x)| \leq (a|x|^{1-m} + bt)^{\frac{1}{1-m}}$ для всех $x \in X$ и $t \geq 0$, где

$$a = (\alpha\beta)^{\frac{m-1}{k-m+1}} \quad \text{и} \quad b = \alpha^{\frac{m-1}{k-m+1}}\beta^{\frac{k}{k-m+1}}\frac{m-1}{k-m+1}.$$

Теорема полностью доказана.

Следствие 5.6.2. *Для любой однородной (порядка $m > 1$) динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *тривиальное движение динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ равномерно асимптотически устойчиво;*

(2) *существуют положительные числа* a *и* b *такие, что* $|\pi(t,x)| \le (a|x|^{1-m}+bt)^{\frac{1}{1-m}}$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $x \in X$*;*

(3) *для любого числа* $k > m-1$ *существует непрерывная функция* $V : X \to \mathbb{R}_+$*, обладающая свойствами 2.1.–2.3. из теоремы 5.6.1.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 5.6.1 и теоремы 1.2 из [**136**].

Теорема 5.6.3. *Пусть неавтономная система* $\langle (X,\mathbb{T}_1,\pi), (Y,\mathbb{T}_2,\sigma), h\rangle$ *является однородной. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют положительные числа* N *и* ν *такие что* $|\pi(t,x)| \le Ne^{-\nu t}|x|$ *для любых* $x \in X$ *и* $t \ge 0$*;*

(2) *для каждого* $k > 0$ *существует непрерывная функция* $V : X \to \mathbb{R}_+$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

2.1. $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$ *для любых* $x \in X$ *и* $\lambda > 0$*;*

2.2. *существуют положительные числа* $\alpha \ge 1$ *и* β *такие, что*

$$\alpha|x|^k \le V(x) \le \beta|x|^k \tag{5.6.11}$$

для любого $x \in X$*;*

2.3. $V'_\pi(x) = -|x|^k$ *при всех* $x \in X$.

Доказательство. Покажем, что из условия 1. следует 2.. Прежде всего покажем, что функция V, определенная при помощи равенства (5.6.2), является искомой, в случае когда $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$. Отметим что равенством (5.6.2) корректно определена функция $V : X \to \mathbb{R}_+$, так как

$$|\pi(t,x)|^k \le N^k e^{-\nu k t}|x|^k \tag{5.6.12}$$

для любых $t \ge 0, x \in X$ и, следовательно, интеграл в правой части равенства (5.6.2) является равномерно сходящимся по x на ограниченных подмножествах из X. В частности, функция V непрерывна.

Из (5.6.2),(5.6.6) и (5.6.12) следует, что

$$\alpha|x|^k \le V(x) \le \beta|x|^k \tag{5.6.13}$$

для любого $x \in X$, где $\beta = N^k(\nu k)^{-1}$ и $\alpha = 1$. Из равенства (5.6.4) имеем $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$ для любых $x \in X$ и $\lambda > 0$ и из (5.6.8) следует равенство $V'_\pi(x) = -|x|^k$.

Покажем теперь, что имеет место и обратная импликация. Предположим, что выполнены условия 2.1.–2.3. теоремы. Обозначим: $\psi(t) = V(\pi(t,x))$, тогда имеет место равенство (5.6.9) для любого $t \geq 0$. Из условия 2.2. следует что $|\pi(t,x)|^k \geq \frac{1}{\beta}\psi(t)$ и, следовательно,

$$\psi'(t) \leq -\frac{1}{\beta}\psi(t) \tag{5.6.14}$$

для любого $t \geq 0$. Из (5.6.14) имеем

$$V(\pi(t,x)) \leq V(x)e^{-\frac{1}{\beta}t} \tag{5.6.15}$$

для любых $t \geq 0$ и $x \in X$. Согласно (5.6.13) и (5.6.15) имеем

$$|\pi(t,x)| \leq Ne^{-\nu t}|x|$$

при всех $t \geq$ и $x \in X$, где $N = (\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{1}{k}}$ и $\nu = \frac{1}{\beta k}$.

Если $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}_+$, то мы определим функцию $V : X \to \mathbb{R}_+$ при помощи равенства

$$V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\pi(n,x)|^k. \tag{5.6.16}$$

Ряд в правой части равенства (5.6.16) является равномерно сходящимся по x на каждом ограниченном подмножестве из X, так как в условиях теоремы имеем

$$|\pi(n,x)|^k \leq N^k e^{-\nu k n}|x|^k \tag{5.6.17}$$

для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in X$ и, следовательно, ряд (5.6.16) мажорируется геометрическим рядом со знаменателем $q = e^{-\nu k} < 1$. Таким образом функция V определенная равенством (5.6.16) непрерывна.

Из однородности порядка $m = 1$ динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$ и равенства (5.6.16) следует что $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$ для любых $\lambda > 0$ и $x \in X$. Согласно (5.6.16) и (5.6.17) имеем

$$\alpha|x|^k \leq V(x) \leq \beta|x|^k \tag{5.6.18}$$

для любого $x \in X$, где $\alpha = 1$ и $\beta = N^k(1-e^{-\nu k})^{-1}$. Наконец, из равенства (5.6.16) следует что $V'_\pi(x) = V(\pi(1,x)) - V(x) = -|x|^k$ для всех $x \in X$.

Теперь покажем что из условий 2.1-2.3 теоремы (в случае, когда $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}_+$) следует 1.. Действительно, обозначим через $\psi(n) = V(\pi(n,x))$, тогда из условий 2.2.–2.3. имеем

$$\Delta\psi(n) = \psi(n+1) - \psi(n) = -|\pi(n,x)|^k \leq -\frac{1}{\beta}\psi(n). \qquad (5.6.19)$$

Не ограничивая общности рассуждений мы можем считать что $\beta > 1$, тогда из (5.6.19) получаем

$$V(\pi(n,x)) \leq \gamma^n V(x) \qquad (5.6.20)$$

для любых $x \in X$ и $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\gamma = 1 - \beta^{-1}$. Из (5.6.18) и (5.6.20) следует неравенство (5.6.11), если положить $N = (\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{1}{k}}$ и $\nu = -\frac{1}{k}\ln(1-\beta^{-1})$. Аналогично доказывается импликация 2.$\Rightarrow$ 1. и в случае $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

Напомним, что нулевое сечение расслоения (X, h, Y) называется равномерно асимптотически устойчивым, если

(1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое что $|\pi(t,x)| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$ и $|x| < \delta$;

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} |\pi(t,x)| = 0$ для каждого $x \in X$, причем это равенство имеет место равномерно по x на ограниченных подмножествах из X.

Следствие 5.6.4. *Пусть неавтономная динамическая система $\langle (X,\mathbb{T},\pi), ((Y,\mathbb{T},\sigma), h\rangle$ является однородной порядка. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *нулевое сечение расслоения (X, h, Y) равномерно асимптотически устойчиво;*

(2) *существуют положительные числа N и ν такие что $|\pi(t,x)| \leq Ne^{-\nu t}|x|$ для любых $t \geq 0$ и $x \in X$;*

(3) *для любого $k > 0$ существует непрерывная функция $V : X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющая условиям 2.1.–2.3. теоремы 5.6.3.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 5.6.3 и теоремы 1.1 из [**136**].

Замечание 5.6.5. *В случае, когда пространство E конечномерно, теорема 5.6.1 и следствие 5.6.2 (для автономных систем при $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$) обобщают и уточняют некоторые результаты В.И.Зубова (см., например,* [**39**]*, теоремы 36 и 37).*

5.7. Дифференцируемые однородные системы

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Обозначим через $C(E, F)$ $(C^1(E, F))$ пространство всех непрерывных (непрерывно дифференцируемых) функций определенных на E со значениями в банаховом пространстве F.

Функция $f : E \times \Omega \to F$ называется однородной порядка k по переменной $u \in E$, если имеет место равенство $f(\lambda x, \omega) = \lambda^k f(x, \omega)$ для всех $\lambda > 0, x \in E$ и $\omega \in \Omega$.

Лемма 5.7.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *Пусть Ω компактно, $f \in C(E \times \Omega), f(0, \omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$ и f однородна по переменной u порядка m. Тогда существует $M > 0$ такое, что $|f(u, \omega)| \leq M|u|^m$ при всех $(u, \omega) \in E \times \Omega$;*

(2) *Если функция $f \in C^1(E \times \Omega)$ однородна порядка $m \geq 1$, то и функция $D_u f(\cdot, \omega) : E \to L(E, F) \quad (\omega \in \Omega)$ также является однородной порядка $m - 1$, где $L(E, F)$ пространство всех линейных непрерывных операторов $A : E \to F$;*

(3) *Функция $f \in C^1(E)$ является однородной порядка m тогда и только тогда, когда f удовлетворяет уравнению $Df(x)x = mf(x)$ для любого $x \in E$, где $Df(x)$ – производная Фреше функции $f \in C^1(E, F)$ в точке x.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что существует $\delta_0 > 0$ такое что $|f(u, \omega)| \leq 1$ для всех $|u| \leq \delta$ и $\omega \in \Omega$. Если допустить, что это не так, то существуют $\delta_n \to 0, |u_n| < \delta_n$ и $\omega_n \in \Omega$ такие что $|f(u_n, \omega_n)| > 1$. Так как Ω компактно, то мы можем считать последовательность $\{\omega_n\}$ сходящейся. Пусть $\omega_n \to \omega_0$, тогда в силу непрерывности f имеем $|f(0, \omega_0)| \geq 1$. С другой стороны, $f(0, \omega_0) = 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Таким образом существует $\delta > 0$ такое, что $|f(u,\omega)| \le 1$ для любых $|u| \le \delta$ и $\omega \in \Omega$ и, следовательно,

$$|f(u,\omega)| \le |f(\frac{|u|}{\delta}\frac{u\delta}{|u|},\omega)| = \frac{|u|^m}{\delta^m}|f(\frac{\delta u}{|u|},\omega)| \le \frac{1}{\delta^m}|u|^m.$$

Пусть $f \in C^1(E)$ и f является однородной порядка m, тогда

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + r(x,h) \tag{5.7.1}$$

и $|r(x,h)| \to 0$ при $|h| \to 0$. Заменяя x на λx в равенстве (5.7.1), мы получаем

$$f(\lambda x + h) - f(\lambda x) = Df(\lambda x) + r(\lambda x, h)$$

и, следовательно,

$$f(x+u) - f(x) = \lambda^{-m+1}Df(\lambda x)h + \lambda^{-m}r(\lambda x, \lambda u) \tag{5.7.2}$$

для любого $\lambda > 0$, где $u = \lambda^{-1}h$. Из равенства (5.7.2) следует, что $\lambda^{-m+1}Df(\lambda x) = Df(x)$, т.е. $Df(\lambda x) = \lambda^{m-1}Df(x)$ для любых $\lambda > 0$.

Наконец докажем третье утверждение леммы. Пусть $f \in C^1(E)$ является однородной функцией порядка m. Дифференцируя тождество $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ по λ и пологая $\lambda = 1$, мы получаем тождество $Df(x)x = mx$. Пусть теперь имеет место тождество $Df(x)x = mx$. Обозначим: $\varphi(\lambda) = \lambda^{-m}f(\lambda x)$ ($\lambda > 0$). Так как $Df(\lambda x)\lambda x = mf(\lambda x)$, то

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= -m\lambda^{-m+1}f(\lambda x) + \lambda^{-m}Df(\lambda x)x \\ &= -m\lambda^{-m-1}f(\lambda x) + \lambda^{-m-1}mf(\lambda x) = 0\end{aligned}$$

при всех $\lambda > 0$ и, следовательно, $\varphi(\lambda) = const$ для любого $\lambda > 0$. Так как $\varphi(1) = f(x)$, то $\varphi(\lambda) = f(x)$ для любого $\lambda > 0$, т.е. $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ для любых $\lambda > 0$ и $x \in E$. Лемма доказана.

Функция $f \in C(E,E)$ называется регулярной, если для дифференциального уравнения

$$x' = f(x) \tag{5.7.3}$$

выполнены условия существования, единственности на $\mathbb{R}_+$ и непрерывной зависимости от начальных данных, т.е. уравнением (5.7.3) порождается полугрупповая динамическая система $(E, \mathbb{R}_+, \pi)$, где $\pi(t,x)$ решение уравнения (5.7.3) с начальным условием $\pi(0,x) = x$.

Теорема 5.7.2. *Пусть $f \in C'(E)$ регулярна и однородна порядка $m > 1$, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *нулевое решение уравнения (5.7.3) равномерно асимптотически устойчиво;*

(2) *для любого достаточно большого k существует непрерывно диффернцируемая функция $V : E \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*

2.1. $V(\lambda x) = \lambda^{k-m+1} V(x)$ *для любых* $\lambda \geq 0$ *и* $x \in E$*;*

2.2. *существуют положительные числа α и β такие, что $\alpha|x|^{k-m+1} \leq V(x) \leq \beta|x|^{k-m+1}$ для любого $x \in E$;*

2.3. $V'_\pi(x) = DV(x)f(x) = -|x|^k$ *для любого $x \in E$, где $DV(x)$ – производная Фреше функции V в точке x.*

Доказательство. Предположим, что нулевое решение уравнения (5.7.3) равномерно асимптотически устойчиво. Обозначим через $(E, \mathbb{R}_+, \pi)$ полугрупповую динамическую систему, порожденную уравнением (5.7.3). Так как $f \in C^1(E, E)$ однородна (порядка $m > 1$), то согласно теореме 3.4 [**39**] имеет место равенство $\pi(t, \lambda x) = \lambda\pi(\lambda^{m-1}t, x)$ для любых $x \in E, \lambda > 0$ и $t \in \mathbb{R}_+$, т.е. динамическая система $(E, \mathbb{R}_+, \pi)$ однородна порядка $m > 1$. Согласно теореме 5.6.1 и следствию 5.6.2 равенством (5.6.2) корректно определена непрерывная функция $V : E \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям 2.1.–2.3. теоремы 5.7.2. Покажем теперь, что в условиях теоремы 5.7.2 функция V будет непрерывно дифференцируемой и имеет место равенство $V'_\pi(x) = DV(x)x$. Для этой цели формально продифференцируем равенство (5.6.2) по x, тогда получим

$$DV(x)u = \int_0^{+\infty} k|\pi(t,x)|^{k-2} \times Re\langle D_x\pi(t,x)u, \pi(t,x)\rangle dt. \quad (5.7.4)$$

Теперь мы покажем, что интеграл в правой части равенства (5.7.4) является равномерно сходящимся по x и u на каждом шаре из E и, следовательно, равенством (5.7.4) действительно определяется производная функции V. Отметим что операторфункция $U(t, x) = D_x\pi(t, x)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$X' = A(t, x)X, \quad (5.7.5)$$

где $A(t,x) = D_x f(\pi(t,x))$, и начальному условию $U(0,x) = I$ ($I-$ тождественный оператор в E). Согласно лемме 5.7.1 функция $A(t,x) = D_x f(\pi(t,x))$ является однородной по $\pi(t,x)$ порядка $m-1$ и существует число $M > 0$ такое что

$$\|A(t,x)\| \leq M|\pi(t,x)|^{m-1} \tag{5.7.6}$$

для любых $x \in E$ и $t \geq 0$. Так как нулевое решение уравнения (5.6.3) равномерно асимптотически устойчиво, то согласно следствию 5.6.2 существуют положительные числа a и b такие что

$$|\pi(t,x)| \leq (a|x|^{1-m} + bt)^{\frac{1}{1-m}} \tag{5.7.7}$$

для любых $x \in E$ и $t \geq 0$ и, следовательно, из (5.7.6)-(5.7.7) имеем

$$\|A(t,x)\| \leq M(a|x|^{1-m} + bt)^{-1}. \tag{5.7.8}$$

Так как

$$\|U(t,x)\| \leq e^{\int_0^t \|A(\tau,x)\|,d\tau}, \tag{5.7.9}$$

то из (5.7.8) и (5.7.9) получаем

$$\|U(t,x)\| \leq (a|x|^{1-m} + bt)^{\frac{M}{b}} (a^{-1}|x|^{m-1})^{\frac{M}{b}} \tag{5.7.10}$$

для всех $t \geq 0$ и $x \in E$. Согласно неравенству (5.7.10) имеем

$$\begin{aligned} |\pi(t,x)|^{k-2}&|Re\langle D_x\pi(t,x)u, \pi(t,x)\rangle| \\ &\leq |\pi(t,x)|^{k-1}\|D_x\pi(t,x)\||u| \\ \leq (a|x|^{1-m} &+ bt)^{-\frac{k-1}{m-1}+\frac{M}{b}} a^{-\frac{M}{b}} |x|^{(m-1)\frac{m}{b}}|u| \end{aligned} \tag{5.7.11}$$

для любых $t \geq 0$ и $x, u \in E$. Из оценки (5.7.11) следует, что для достаточно больших k интеграл в правой части равенства (5.7.4) является равномерно сходящимся по x и u на каждом шаре из E и, следовательно, функция V, определенная равенством (5.6.2), в условиях теоремы 5.7.2 является непрерывно дифференцируемой.

Заметим, что

$$\begin{aligned} V'_\pi(x) &= \frac{d}{dt}V(\pi(t,x))\Big|_{t=0} \\ &= DV(\pi(t,x))f(\pi(t,x))\Big|_{t=0} = DV(x)f(x) \end{aligned}$$

для любого $x \in E$. С другой стороны, согласно теоремы 5.6.1 $V'_\pi(x) = -|x|^k$. Для завершения доказательства теоремы достаточно отметить, что по теореме 5.6.1 имеет место и обратное утверждение, т.е. из условий 2.1.–2.3. теоремы 5.7.2 следует 1.. Теорема полностью доказана.

Пусть теперь $f \in C^1(E \times F, E)$ и $\Phi \in C^1(F, F)$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' = f(u,\omega) \\ \omega' = \Phi(\omega) \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega), \tag{5.7.12}$$

где Ω – некоторое компактное дифференцируемое подмногообразие в F, f и Φ – регулярные функции, т.е. для системы (5.7.12) и уравнения

$$\omega' = \Phi(\omega) \tag{5.7.13}$$

выполнены условия существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных на $\mathbb{R}_+$ для (5.7.12) и на $\mathbb{R}$ для (5.7.13). Обозначим через $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ групповую динамическую систему, порожденную уравнением (5.7.13), тогда система (5.7.12) может быть записана в виде неавтономного уравнения

$$u' = f(u, \omega t) \quad (\omega \in \Omega), \tag{5.7.14}$$

где $\omega t = \sigma(t, \omega)$. Пусть $\varphi(t, u, \omega)$ – решение уравнения (5.7.14), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, u, \omega) = u$. Нетрудно проверить, что тройка $\langle E, \varphi, (\Omega, \mathbb{R}, \sigma)\rangle$ является коциклом над $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ со слоем E и если функция f является однородной порядка $m = 1$ по $u \in E$, то имеет место равенство $\varphi(t, \lambda u, \omega) = \lambda\varphi(t, u, \omega)$, при любых $t \geq 0, \lambda > 0, u \in E$ и $\omega \in \Omega$.

Теорема 5.7.3. *Пусть $f \in C^1(E \times F)$ и $\Phi \in C^1(F)$ регулярны, Ω компактно и функция f однородна порядка $m = 1$ по переменной $u \in E$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *тривиальное решение уравнения (5.7.14) равномерно экспоненциально устойчиво, т.е. существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$|\varphi(t, u, \omega)| \leq N e^{-\nu t}|u| \tag{5.7.15}$$

для всех $u \in E, t \geq 0$ и $\omega \in \Omega$;

(2) *для любого числа $k > 1$ существует непрерывно дифференцируемая функция $V : E \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:*
   2.1. $V(\lambda u, \omega) = \lambda^k V(u, \omega)$ *для любых $u \in \Omega$ и $\lambda > 0$;*
   2.2. *существуют положительные числа α и β такие, что* $\alpha |u|^k \leq V(u, \omega) \leq \beta |u|^k$ *для любых $u \in E$ и $\omega \in \Omega$;*
   2.3.

$$V'_\pi(u, \omega) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, u, \omega), \omega t)\Big|_{t=0}$$

$$= D_u V(u, \omega) f(u, \omega) + D_\omega V(u, \omega) \Phi(\omega) = -|u|^k$$

для всех $u \in E$ и $\omega \in \Omega$, где $D_u V$ ($D_\omega V$) – частная производная Фреше функции V по переменной $u \in E$ ($\omega \in \Omega$).

Доказательство. Рассмотрим неавтономную динамическую систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (\Omega, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ порожденную системой дифференциальных уравнений (5.6.12), где $X = E \times \Omega, h = pr_2$ и $\pi = (\varphi, \sigma)$. Тройка (X, h, Ω) является тривиальным векторным расслоением со слоем E, причем норма элемента $x = (u, \omega) \in E \times \Omega$ определена равенством $|x| = |u|$, где $|u|$ – норма элемента u в пространстве E. В условиях теоремы 5.7.3 нулевое сечение построенной выше неавтономной динамической системы удовлетворяет условиям теоремы 5.6.3. Для завершения доказательства теоремы 5.7.3 достаточно показать, что функция $V : E \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ из теоремы 5.6.3 в условиях теоремы 5.7.3 будет непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условию

$$V'_\pi(u, \omega) = D_u V(u, \omega) f(u) + D_\omega V(u, \omega) \Phi(\omega)$$

при всех $(u, \omega) \in E \times \Omega$.

Покажем теперь, что функция $V : E \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, определенная равенством (5.7.2), т.е.

$$V(u, \omega) = \int_0^{+\infty} |\varphi(t, u, \omega)|^k dt \qquad (5.7.16)$$

для всех $(u, \omega) \in E \times \Omega$ (так как $|\pi(t, x)| = |(\varphi(t, u, \omega), \omega t)| = |\varphi(t, u, \omega)|$) непрерывно дифференцируема. Для этого мы формально продифференцируем равенство (5.7.16) по переменной

$u \in E$, тогда получим

$$D_u V(u,\omega)v = \int_0^{+\infty} k|\varphi(t,u,\omega)|^{k-2}$$
$$\times Re\langle D_u\varphi(t,u,\omega)v, \varphi(t,u,\omega)\rangle dt. \qquad (5.7.17)$$

Покажем, что интеграл в правой части равенства (5.7.17) является равномерно сходящимся по $\omega \in \Omega$ и u, v на каждом ограниченном подмножестве из E и таким образом равенством (5.7.17) действительно определена дифференцируемая по Фреше функция V по переменной $u \in E$. Прежде всего мы заметим, что оператор-функция $U(t,u,\omega) = D_u\varphi(t,u,\omega)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$X' = B(t,u,\omega)X, \qquad (5.7.18)$$

где $B(t,u,\omega) = D_u f(\varphi(t,u,\omega),\omega t)$, и начальному условию $U(0, u,\omega) = I \quad (I-$ тождественный оператор в E). Согласно лемме 5.7.1 функция $B(t,u,\omega) = D_u f(\varphi(t,u,\omega),\omega t)$ однородна по $\varphi(t, u,\omega)$ порядка $m = 1$ и существует число $M > 0$ такое, что

$$\|B(t,u,\omega)\| \le M \qquad (5.7.19)$$

для любых $(u,\omega) \in E \times \Omega$ и $t \ge 0$. Из неравенства (5.7.19) следует что

$$\|U(t,u,\omega)\| \le e^{\int_0^t \|B(\tau,u,\omega)\| d\tau} \le e^{Mt}$$

при всех $t \ge 0$ и $(u,\omega) \in E \times \Omega$ и, следовательно,

$$|\varphi(t,u,\omega)|^{k-2}|Re\langle D_u\varphi(t,u,\omega)v, \varphi(t,u,\omega)\rangle|$$
$$\le |\varphi(t,u,\omega)|^{k-1}\|D_u\varphi(t,u,\omega)\||v| \qquad (5.7.20)$$
$$\le M|v|N^{k-1}e^{-\nu(k-1)t}|u|$$

для всех $t \ge 0, u, v \in E$ и $\omega \in \Omega$. Из неравенства (5.7.20) следует, что при $k > 1$ интеграл в правой части (5.7.16) является сходящимся, причем равномерно по $\omega \in \Omega$ и u, v на каждом ограниченном подмножестве из E. Таким образом функция $V(u,\omega)$, определенная по формуле (5.6.16) является непрерывно дифференцируемой по $u \in E$ и равенством (5.7.17) определена ее производная Фреше по переменной $u \in E$.

Формально дифференцируя равенство (5.7.16) по переменной $\omega \in F$, получим

$$D_\omega V(u,\omega)w = \int_0^{+\infty} k|\varphi(t,u,\omega)|^{k-2}$$
$$Re\langle D_\omega\varphi(t,u,\omega)w, \varphi(t,u,\omega)\rangle dt \qquad (5.7.21)$$

при всех $(u,\omega) \in E\times\Omega$. Покажем теперь, что интеграл в правой части (5.7.21) является равномерно сходящимся по $\omega \in \Omega$ и $(u,w) \in E\times F$ на каждом ограниченном подмножестве из $E\times F$. Прежде всего заметим, что из (5.7.14) мы имеем

$$\varphi(t,u,\omega) = u + \int_0^t f(\varphi(\tau,u,\omega),\omega\tau)d\tau$$

для любых $t \geq 0$ и $(u,\omega) \in E \times F$ и, следовательно,

$$D_\omega\varphi(t,u,\omega) = \int_0^t D_u f(\varphi(\tau,u,\omega),\omega\tau)D_\omega\varphi(\tau,u,\omega)$$
$$+D_\omega f(\varphi(\tau,u,\omega),\omega\tau)D\Phi(\omega\tau)d\tau. \qquad (5.7.22)$$

Обозначим через $\mathcal{V}(t,u,\omega)$ оператор-функцию $D_\omega\varphi(t,u,\omega)$, тогда из равенства (5.7.22) следует, что $\mathcal{V}(t,u,\omega)$ удовлетворяет операторному уравнению

$$Y' = B(t,u,\omega)Y + \mathcal{F}(t,u,\omega), \qquad (5.7.23)$$

где $\mathcal{F}(t,u,\omega) = D_\omega f(\varphi(t,u,\omega),\omega t)D\Phi(\omega t)$, и начальному условию

$$Y(0) = \mathcal{O} \qquad (5.7.24)$$

($\mathcal{O}$ – нулевой оператор, действующий из F в F). Из неравенства (5.7.23) и условия (5.7.24) следует, что

$$\mathcal{V}(t,u,\omega) = \int_0^t U(t,\tau,u,\omega)\mathcal{F}(\tau,u,\omega)d\tau \qquad (5.7.25)$$

при всех $t \geq 0$ и $(u,\omega) \in E \times \Omega$, где $U(t,\tau,u,\omega)$ является решением операторного уравнения (5.7.18), удовлетворяющее начальному условию $U(\tau,\tau,u,\omega) = U(\tau,u,\omega)$ и, кроме того, подчиняющееся оценке

$$\|U(t,\tau,u,\omega)\| \leq e^{\int_\tau^t \|B(\tau,u,\omega)\|d\tau} \leq e^{M(t-\tau)} \qquad (5.7.26)$$

для любых $t \geq \tau$ $(t,\tau \in \mathbb{R}_+)$ и $(u,\omega) \in E \times \Omega$.

Так как функция $f(u,\omega)$ является однородной по u порядка $m=1$, то $D_\omega f(u,\omega)$ также будет однородной и согласно лемме 5.7.1 существует число $M>0$ такое, что

$$\|D_\omega f(u,\omega)\| \le M_1|u|$$

для любых $u\in E$ и $\omega\in\Omega$. Таким образом

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(t,u,\omega)\| &= \|D_\omega f(\varphi(t,u,\omega),\omega t)D\Phi(\omega t)| \\ &\le L|\varphi(t,u,\omega)| \end{aligned} \tag{5.7.27}$$

для любых $t\ge 0$ и $(u,\omega)\in E\times\Omega$, где $L=M_1\max\{\|D\Phi(\omega)\| : \omega\in\Omega\}$. Из (5.7.15), (5.7.25) и (5.7.27) мы имеем

$$\begin{aligned}&|\varphi(t,u,\omega)|^{k-2}|Re\langle D_\omega\varphi(t,u,\omega)w\rangle| \\ &\le |\varphi(t,u,\omega)|^{k-1}\|D_\omega\varphi(t,u,\omega)\||w| \\ &\le |\varphi(t,u,\omega)|^{k-1}|w|\int_0^t \|U(t,\tau,u,\omega)\|\cdot\|\mathcal{F}(\tau,u,\omega)\|d\tau \\ &\le |\varphi(t,u,\omega)|^{k-1}|w|\int_0^t e^{M(t-\tau)}L|\varphi(\tau,u,\omega)|d\tau \\ &\le N^{k-1}e^{-\nu(k-1)t}|u|^{k-1}|w|\int_0^t e^{M(t-\tau)}LNe^{-\nu\tau}|u|d\tau \\ &= N^kLe^{-\nu(k-1)t}\frac{(e^{Mt}-e^{-\nu t})}{M+\nu}|u|^k|w|\end{aligned}$$

для любых $t\ge 0, u\in E$ и $\omega\in\Omega$. Из последнего неравенства следует, что для достаточно больших k интеграл (5.7.21) является сходящимся равномерно по $\omega\in\Omega$ и $(u,w)\in E\times F$ на каждом ограниченном подмножестве из $E\times F$. Более того, функция $V(u,\omega)$, определенная по формуле (5.7.16), является непрерывно дифференцируемой по переменной $\omega\in\Omega$ и формулой (5.7.21) определяется ее производная Фреше по переменной $\omega\in\Omega$. Таким образом функция $V : E\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ является непрерывно дифференцируемой по переменной $u\in E$ и по переменной $\omega\in\Omega$ и, следовательно, она непрерывно дифференцируема по Фреше. Заметим теперь, что

$$\frac{d}{dt}V((\varphi(t,u,\omega),\omega t) = D_uV(\varphi(t,u,\omega),\omega t)D_u\varphi(t,u,\omega)$$

$$+D_\omega V(\varphi(t,u,\omega),\omega t)\frac{d}{dt}\omega t = D_uV(\varphi(t,u,\omega),\omega t)f(\varphi(t,u,\omega),\omega t)$$

$$+D_\omega V(\varphi(t,u,\omega),\omega t)\Phi(\omega t)$$

для любых $t \geq 0$ и $(u,\omega) \in E \times \Omega$ и, следовательно,

$$V'_\pi(u,\omega) = \frac{d}{dt}V(\varphi(t,u,\omega),\omega t)\Big|_{t=0}$$
$$= D_u V(u,\omega) f(u,\omega) + D_\omega V(u,\omega)\Phi(u).$$

Таким образом, из 1. следует 2..

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить что согласно теореме 5.6.3 из условий 2.1.–2.3. теоремы следует 1.. Теорема полностью доказана.

Замечание 5.7.4. *Для конечномерных систем теорема 5.7.2 обобщает и уточняет теорему 38 из* [**39**].

5.8. Глобальные аттракторы квазиоднородных систем

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(x), \tag{5.8.1}$$

где $f \in C(E)$ регулярна и однородна порядка $m \geq 1$. Наряду с уравнением (5.8.1) рассмотрим и возмущенное уравнение

$$x' = f(x) + F(t,x) \tag{5.8.2}$$

с регулярным возмущением. Напомним (см, например, [**39**], [**52**],[**55**]), что уравнение (5.8.2) называется квазиоднородным, если

$$\lim_{|x|\to+\infty} \sup \frac{|F(t,x)|}{|x|^m} = c, \tag{5.8.3}$$

где c – некоторая неотрицательная достаточно малая константа. Причем равенство (5.8.3) имеет место равномерно по $t \in \mathbb{R}$.

Наряду с уравнением (5.8.2) рассмотрим и семейство уравнений

$$x' = f(x) + G(t,x), \tag{5.8.4}$$

где $G \in H(f) = \overline{\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$ и чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R} \times E, E)$, $C(\mathbb{R} \times E, E)$ снабжено топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R} \times E$. Обозначим через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическую систему сдвигов на $Y = H(F)$ и пусть $\varphi(t,u,f+G)$ решение уравнения (5.8.4), удовлетворяющее условию $\varphi(0,u,f+G) = u$ и $\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y,\mathbb{R},\sigma),h\rangle$ (где $h = pr_2$ и

$\pi = (\varphi, \sigma))$ – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.8.4).

Теорема 5.8.1. *Пусть $f \in C^1(E, E)$ регулярна, однородна порядка $m \geq 1$ и нулевое решение уравнения (5.8.1) равномерно асимптотически устойчиво. Если $f + F \in C(\mathbb{R} \times E, E)$ регулярна, уравнение (5.8.2) квазиоднородно и неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, порожденная уравнением (5.8.2), асимптотически компактна, то имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество $I_G = \{u \in E | \sup\{|\varphi(t, u, f + G)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ непусто, компактно и связно для любого $G \in H(F)$;*

(2) *$\varphi(t, I_G, f + G) = I_{\sigma(t, f+G)}$ для любых $t \in \mathbb{R}_+$ и $G \in H(F)$;*

(3) *множество $I = \bigcup\{I_G | G \in H(F)\}$ компактно и связно;*

(4) *равенства*

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\varphi(t, M, f + G_{-t}), I_G) = 0$$

и

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\varphi(t, M, f + G), I) = 0$$

имеют место для любого $G \in H(F)$ и ограниченного подмножества $M \subseteq E$.

Доказательство. Пусть $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическя система, порожденная уравнением (5.8.2). Так как $f \in C^1(E)$ и нулевое решение уравнения (5.8.1) равномерно асимптотически устойчиво, то согласно теореме (5.7.2) равенством (5.6.2) определяется непрерывно дифференцируемая функция $V : E \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям 2.1.–2.3. теоремы 5.7.2. Определим теперь функцию $\mathcal{V} : X \to \mathbb{R}_+$ следующим образом: $\mathcal{V}(x) = V(u)$ для всех $x = (u, G) \in E \times H(F)$. Заметим, что

$$\mathcal{V}'_\pi(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, u, f + G))\Big|_{t=0}$$

$$DV(\varphi(t, u, f + G)) \frac{d}{dt} \varphi(t, u, f + G)\Big|_{t=0} \qquad (5.8.5)$$

$$= DV(u)(f(u) + G(0,u)) = DV(u)f(u) + DV(u)G(0,u)$$
$$= -|u|^k + DV(u)G(0,u).$$

Согласно условию 2.1. теоремы 5.7.2 функция V является однородной порядка $k - m + 1$, поэтому из леммы 5.7.1 вытекает что ее производная Фреше $DV(u)$ будет однородной порядка $k - m$ и, следовательно, существует число $L > 0$ такое что

$$\|DV(u)\| \leq L|u|^{k-m} \tag{5.8.6}$$

при любом $u \in E$. Из равенства (5.8.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r = r(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|G(t,u)| \leq (c + \varepsilon)|u|^m \tag{5.8.7}$$

для любых $|u| \geq r, t \in \mathbb{R}$ и $G \in H(F)$. Из неравенств (5.8.6)-(5.8.7) получаем

$$|DV(u)G(0,u)| \leq L(c + \varepsilon)|u|^k \tag{5.8.8}$$

и, следовательно, из (5.8.5),(5.8.8) имеем

$$\mathcal{V}'_\pi(x) \leq |u|^k(-1 + L(c + \varepsilon)) = -\gamma|x|^k$$

для любого $x \in X_r$, где $\gamma = 1 - L(c+\varepsilon) > 0$, так как c и ε достаточно малые положительные числа. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теоремы 2.7.3,2.7.5 и 5.1.5.

Теорема 5.8.2. *Пусть $f \in C^1(E,E), \Phi \in C^1(F,F)$ и $f + F \in C^1(E \times F, E)$ регулярна, $\Omega \subseteq F$ – компактное инвариантное множество динамической системы (5.7.13), функция f однородна порядка $m > 1$ и нулевое решение уравнения (5.7.13) равномерно асимптотически устойчиво. Если*

$$|F(u,\omega)| \leq c|u|^m$$

для любых $|u| \geq r$ и $\omega \in \Omega$, где r и c – некоторые положительные числа, и, кроме того, c достаточно мало, и динамическая система

$$\begin{cases} u' = f(u) + F(u,\omega) \\ \omega' = \Phi(\omega) \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega)$$

асимптотически компактна, то имеют место следующие утверждения:

(1) *множество* $I_\omega = \{u \in E | \sup\{|\varphi(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ *непусто, компактно и связно для каждого* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi(t,u,\omega)$ – *решение уравнения*

$$u' = f(u) + F(u, \omega t)\ ,$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi(t, I_\omega, \omega) = I_{\sigma(t,\omega)}$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$;

(3) *множество* $I = \bigcup\{I_\omega | \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t, M, \omega_{-t}), I_\omega) = 0 \tag{5.8.9}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t, M, \omega), I) = 0 \tag{5.8.10}$$

для каждого $\omega \in \Omega$ *и ограниченного подмножества* $M \subseteq E$.

Доказательство. Доказательство сформулированного утверждения строится по той же схеме что и теоремы 5.8.1, поэтому детали мы опускаем.

Теорема 5.8.3. *Пусть* $f \in C^1(E \times F, E), \Phi \in C^1(F)$ *и* $f + F \in C^1(E \times F, E)$ *регулярна,* $\Omega \subseteq F$ – *компактное инвариантное множество динамической системы (5.7.13), функция* f *однородна порядка* $m = 1$ *по переменной* $u \in E$ *и нулевое решение уравнения (5.7.14) равномерно асимптотически устойчиво.*

Если

$$|F(u,\omega)| \le c|u| \tag{5.8.11}$$

для любых $|u| \ge r$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* r *и* c *некоторые положительные числа, и, кроме того,* c *достаточно мало, и динамическая система*

$$\begin{cases} u' = f(u,\omega) + F(u,\omega) \\ \omega' = \Phi(\omega) \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega) \tag{5.8.12}$$

асимптотически компактна. Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *множество* $I_\omega = \{u \in E | \sup\{|\varphi(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ *непусто, компактно и связно для каждого* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi(t,u,\omega)$ – *решение уравнения*

$$u' = f(u,\omega t) + F(u,\omega t), \tag{5.8.13}$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi(t, I_\omega, \omega) = I_{\sigma(t,\omega)}$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$;

(3) *множество* $I = \cup\{I_\omega | \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *уравнения (5.8.9) и (5.8.10) имеют место для каждого ограниченного подмножества* $M \subseteq E$ *и* $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\langle (X,\mathbb{R}_+,\pi),(Y,\mathbb{R},\sigma),h\rangle$ – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.8.13) (или системой дифференциальных уравнений (5.8.12)). Так как $f \in C^1(E \times F, E)$ и нулевое решение уравнения (5.7.14) равномерно асимптотически устойчиво, то согласно теореме 5.7.3 равенством

$$V(u,\omega) = \int_0^{+\infty} |\varphi(t,u,\omega)|^k dt$$

определена непрерывно дифференцируемая функция $V : X = E \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям 2.1.–2.3. теоремы 5.6.3. Заметим, что

$$\begin{aligned} V'_\pi(u,\omega) &= \tfrac{d}{dt} V((\varphi(t,u,\omega),\omega t)\Big|_{t=0} \\ &= \{D_u V(\varphi(t,u,\omega),\omega t)\tfrac{d}{dt}\varphi(t,u,\omega) \\ &\quad + D_\omega V(\varphi(t,u,\omega),\omega t)\tfrac{d}{dt}\omega t\}\Big|_{t=0} \\ &= D_u V(u,\omega)[f(u,\omega) + F(u,\omega)] + D_\omega V(u,\omega)\Phi(\omega) \\ &= -|u|^k + D_u V(u,\omega) F(u,\omega). \end{aligned} \tag{5.8.14}$$

Так как функция $V(u,\omega)$ является однородной порядка $k > 1$ по $u \in E$, то согласно лемме 5.7.1 существует число $L > 0$ такое, что

$$\|D_u V(u,\omega)\| \le L|u|^{k-1} \tag{5.8.15}$$

для любых $u \in E$ и $\omega \in \Omega$. Из (5.8.11) и (5.8.15) следует, что

$$|D_u V(u,\omega) F(u,\omega)| \le cL|u|^k \tag{5.8.16}$$

для любых $|u| \geq r$ и $\omega \in \Omega$ и, принимая во внимание (5.8.14) и (5.8.16), мы получим

$$V'_\pi(u,\omega) \leq -|u|^k + cL|u|^k = -\gamma|u|^k$$

для всех $\omega \in \Omega$ и $|u| \geq r$, где $\gamma = 1 - cL > 0$, так как число c достаточно мало. Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теоремы 2.7.3, 2.7.5 и 5.1.5. Теорема доказана.

Замечание 5.8.4. *1. Если пространство E является конечномерным, диссипативность уравнения (5.8.2) установлена в* [**39**] *(теорема 39 и следствие 1).*

2. Если E – конечномерное гильбертово пространство, то неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.8.2) будет асимптотически компактной, если функция $F \in C(\mathbb{R} \times E, E)$ ограничена и равномерно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ равномерно по x на каждом компакте из E.

3. Если Ω компактно и E конечномерно, то неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (5.8.13), асимптотически компактна.

4. Условия асимптотической компактности квазилинейных уравнений в банаховом пространстве даны в работе [**137**].

Глава 6

Диссипативность некоторых классов дифференциальных, разностных, импульсных, функционально-дифференциальных и эволюционных уравнений

6.1. Разностные уравнения

Все результаты для дифференциальных уравнений, приведенные в предыдущих главах, имеют место и для разностных уравнений, так как наши основные результаты были сформулированы и доказаны для общих неавтономных динамических систем как с непрерывным, так и дискретным временем. Ниже мы приведем те из них, которые нам понадобятся при изучении периодических диссипативных систем с импульсами.

Рассмотрим разностное уравнение

$$u(k+1)=\Phi(k,u(k)) \quad (\Phi\in C(\mathbb{Z}\times E^n,E^n)). \tag{6.1.1}$$

Обозначим через $\varphi(\cdot,u,\Phi)$ решение уравнения (6.1.1), проходящее через точку u при $k=0$. Предположим, что Φ является p–периодическим по $k\in\mathbb{Z}$, где $p\in\mathbb{Z}$. Положим $H(\Phi):=\{\Phi_m=\sigma(\Phi,m):0\le m\le p-1\}$, а через $(Y,\mathbb{Z},\sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $Y:=H(\Phi)$, индуцированную системой $(C(\mathbb{Z}\times E^n,E^n),\mathbb{Z},\sigma)$. Далее положим $X:=E^n\times Y$ и определим отображение $\pi: X\times\mathbb{Z}_+\to X$ равенством $\pi((u,\tilde{\Phi}),k)=(\varphi(k,u,\tilde{\Phi}),\tilde{\Phi}_k)$. Из общих свойств решений разностных уравнений вида (6.1.1) следует, что $(X,\mathbb{Z}_+,\pi)$ – полугрупповая динамическая система, а $\big\langle(X,\mathbb{Z}_+,\pi),(Y,\mathbb{Z},\sigma),h\big\rangle$ $(h=pr_2:X\to Y)$ есть неавтономная

ω–периодическая динамическая система. Применяя к построенной таким образом динамической системе результаты параграфа 4.6, получим ряд утверждений относительно уравнения (6.1.1). Прежде чем сформулировать некоторые утверждения такого рода, определим понятие диссипативности для уравнения (6.1.1).

Как и в случае дифференциальных уравнений, разностное уравнение (6.1.1) назовем диссипативным, если существует положительное число r такое, что

$$\lim_{k \to +\infty} ||\varphi(k, v, \tilde{\Phi}|| < r \tag{6.1.2}$$

при всех $v \in E^n$ и $\tilde{\Phi} \in H(\Phi)$.

Определим отображение $\mathbb{P} : E^n \to E^n$ по правилу $\mathbb{P}(v) = \varphi(p, v, \Phi)$ и через (E^n, P) обозначим каскад, порожденный степенями $\mathbb{P}$.

Теорема 6.1.1. *Для того чтобы разностное уравнение (6.1.1) было диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы каскад $(E^n, \mathbb{P})$ был диссипативным.*

Теорема 6.1.2. *Если уравнение (6.1.1) диссипативно, то:*

(1) *существует $h > 0$ такое, что для любого $a > 0$ найдется $k(a) \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathbb{P}^k B(0, a) \subseteq B(0, h)$ при всех $k \geq k(a)$;*

(2) *отображение $\mathbb{P}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $u_0 \in E^n$, через которую проходит p–периодическое решение (6.1.1).*

Теорема 6.1.3. *Если уравнение (6.1.1) диссипативно, то:*

(1) *существуют непустое компактное множество $J \in E^n$, которое обладает следующими свойствами:*
   (a) *$\mathbb{P}(J) = J$;*
   (b) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(u, J) < \delta$ влечет $\rho(\mathbb{P}^k u, J) < \varepsilon$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$;*

(2) *множество $M := \cup\{M_k := \varphi(k, J, \Phi) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ непусто, компактно и обладает следующими свойствами:*
   c. *M инвариантно относительно (6.1.1) в том смысле, что $v \in M_m$ влечет $\varphi(k, v, \Phi_m) \in M$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$;*

d. $M_{k+p} = M_k$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$*;*
e. *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\rho(\varphi(m,u,\Phi), M_m) < \delta$ *влечет* $\rho(\varphi(k,u,\Phi), M_k) < \varepsilon$ *при всех* $k \geq m$.

Теорема 6.1.4. *Если уравнение (6.1.1) диссипативно и функция* $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *голоморфна по второй переменной, то центр Левинсона этого уравнения состоит из одной* p*–периодической траектории, т.е. (6.1.1) конвергентно.*

Сформулированные теоремы 6.1.1 – 6.1.4 получаются непосредственно из результатов параграфа 4.6. Что касается теоремы 6.1.4, то здесь следует добавить, что при голоморфной правой части уравнения (6.1.1) решение $\varphi(\cdot, z, \Phi) \quad (z \in \mathbb{C}^n)$ также является голоморфной функцией.

Рассмотрим слабо нелинейное уравнение

$$u(k+1) = A(k)u(k) + F(k, u(k)), \tag{6.1.3}$$

где $A(k)$ есть переменная $n \times n$–матрица, а $F \in C(\mathbb{Z} \times E^n, E^n)$ удовлетворяет некоторому условию "малости".

Обозначим через $U(k, A)$ матрицу Коши для линейного уравнения

$$u(k+1) = A(k)u(k). \tag{6.1.4}$$

Теорема 6.1.5. *Пусть* $A(k)$ *и* $F(k,u)$ p*-периодичны по* $k \in \mathbb{Z}_+$*. Если выполнены условия:*

(1) *существуют положительные числа* M *и* $q < 1$ *такие, что*

$$||U(k,A)U^{-1}(m,A)|| \leq Mq^{k-m} \qquad (k \geq m); \tag{6.1.5}$$

(2) $||F(k,u|| \leq C + D||u|| \quad (C \geq 0,\ 0 \leq D < (1-q)M^{-1})$ *при всех* $u \in E^n$,

то уравнение (6.1.3) диссипативно.

Доказательство. Пусть $\varphi(\cdot, u, \Phi) \quad (\Phi(k,u) := A(k)u + F(k,u))$ – решение уравнения (6.1.3), проходящее через $u \in E^n$ при $k = 0$. По формуле вариации постоянных (см., например, [**93**]) имеем

$$\varphi(k,u,\Phi) = U(k,A)\Big(u + \sum_{m=0}^{k-1} U^{-1}(m+1,A)F(m,\varphi(m,u,\Phi))\Big),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} ||\varphi(k,u,\Phi)|| &\le Mq^k\Big(||u|| \\ &+\sum_{m=0}^{k-1} q^{-m+1}(C+D||\varphi(m,u,\Phi)||)\Big). \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Положим $u(k) := q^{-k}||\varphi(k,u,\Phi)||$ и с учетом (6.1.6) получим

$$u(k) \le M||u|| + CMq\sum_{m=0}^{k-1} q^{-m} + DM\sum_{m=0}^{k-1} u(m). \tag{6.1.7}$$

Обозначим правую часть равенства (6.1.7) через $v(k)$. Заметим, что

$$v(k+1)-v(k) = q^{-k}\frac{CM}{q} + \frac{DM}{q}u(k) \le \frac{DM}{q}v(k) + \frac{CM}{q}q^{-k},$$

а, значит,

$$v(k+1) \le \Big(1+\frac{DM}{q}\Big)v(k) + \frac{CM}{q}q^{-k}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$v(k) \le \Big(1+\frac{DM}{q}\Big)^{k-1}v(1) + \frac{CM}{q}\frac{1-q^{k-1}}{1-q}, \tag{6.1.8}$$

поэтому

$$\begin{aligned} ||\varphi(k,u,\Phi)|| &\le (q+DM)^{k-1}qM||u|| \\ &+\frac{CM}{q-1}(q^{k-1}-1), \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

так как $v(1) = M||u||$. Из (6.1.9) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} ||\varphi(k,u,\Phi)|| \le \frac{CM}{1-q}. \tag{6.1.10}$$

Теорема доказана.

Следствие 6.1.6. *В условиях теоремы 6.1.5 уравнение (6.1.3) имеет хотя бы одно p-периодическое решение.*

Сформулированное утверждение вытекает из теорем 6.1.2 и 6.1.5.

6.2. Уравнения с импульсами

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = f(t,u) \qquad (f \in C(\mathbb{R} \times E^n, E^n)). \tag{6.2.1}$$

Будем предполагать, что $f(t+\tau, u) = f(t,u)$ $(t \in \mathbb{R},\, u \in E^n)$ и f регулярна, т.е. при любом $g \in H(f) := \{f_\tau : \tau \in [0,\tau[\}$ для уравнения

$$\dot{v} = g(t,v) \tag{6.2.2}$$

выполнено условие существования, единственности и нелокальной продолжаемости на $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $\varphi(\cdot, v, g)$ решение (6.2.2), проходящее через v при $t = 0$. Заметим, что

$$\varphi(t+\tau, v, g) = \varphi(t, \varphi(\tau, v, g), g_\tau) \tag{6.2.3}$$

при всех t, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $v \in E^n$ и $g \in H(f)$.

Пусть $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ $(t_0 = 0)$ и $\{s_k\} \subset E^n$ такие, что при некотором $p > 0$ $(p \in \mathbb{Z})$ $t_{k+p} - t_k = \tau$ и $s_{k+p} = s_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Как известно **[93]**, эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы распределение $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k}$ было τ-периодическим.

Рассмотрим нелинейное импульсное ω–периодическое уравнение

$$\dot{u} = f(t,u) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k} = \mathfrak{F}. \tag{6.2.4}$$

Известно (см.**[93]**), что, при сделанных выше предположениях, уравнение (6.2.4) при любом $u \in E^n$ имеет единственное обобщенное решение типа обычных функций, проходящее через точку u при $t = 0$, которое мы обозначим через $\varphi(\cdot, u, \mathfrak{F})$. Таким образом $\lim\limits_{t \downarrow 0} \varphi(t, u, \mathfrak{F}) = u$. Кроме того, на каждом интервале $]t_k, t_{k+1}[$ уравнение (6.2.4) совпадает с (6.2.1). Поэтому имеет место равенство

$$\varphi(t, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t - t_k, c_k, f_{t_k}), \tag{6.2.5}$$

где последовательность $\{c_k\} \subset E^n$ удовлетворяет разностному уравнению

$$c_{k+1} = \varphi(t_{k+1} - t_k, c_k, f_{t_k}) + s_k. \tag{6.2.6}$$

Импульсное уравнение (6.2.4) назовем диссипативным, если существует $r > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} ||\varphi(t, v, \widetilde{\mathfrak{F}})|| < r \tag{6.2.7}$$

при всех $v \in E^n$ и $\widetilde{\mathfrak{F}} \in H(\mathfrak{F}) := \{\mathfrak{F}_s : s \in [0, \tau[\}$, где $\mathfrak{F}_s$ есть s-сдвиг обобщенной функции $\mathfrak{F}$.

Замечание 6.2.1. *Для периодических уравнений условие диссипативности (6.2.7) можно упростить, поскольку (6.2.7) эквивалентно следующему соотношению*

$$\lim_{t \to +\infty} ||\varphi(t, u, \mathfrak{F})|| < r. \tag{6.2.8}$$

Действительно, из (6.2.7) следует (6.2.8). Обратно. Из того, что $\varphi(t + s, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t, \varphi(s, u, \mathfrak{F}), \mathfrak{F}_s)$ (если в точке $s \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(t, u, \mathfrak{F})$ разрывна, то по определению $\varphi(s, u, \mathfrak{F}) := \varphi(s + 0, u, \mathfrak{F}))$ при всех $t,\ \tau \in \mathbb{R}_+$. Поэтому

$$\varphi(t, v, \widetilde{\mathfrak{F}}) = \varphi(t - \tau + s, \varphi(\tau - s, v, \mathfrak{F}_k), \mathfrak{F}) \tag{6.2.9}$$

при всех $t \geq \tau - s$, где $s \in [0, \tau[$ и $\widetilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_k$.

Лемма 6.2.2. *Для того чтобы уравнение с импульсами (6.2.4) было диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы разностное уравнение (6.2.6) было диссипативным.*

Доказательство. Пусть (6.2.4) диссипативно. Тогда существует такое $r > 0$, что выполнено (6.2.8). Если $u \in E^n$, то

$$\varphi(k, u, \Phi) = \varphi(t_k, u, \mathfrak{F}) \tag{6.2.10}$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \to +\infty} ||\varphi(k, u, \Phi)|| < r. \tag{6.2.11}$$

Обратно. Пусть разностное уравнение (6.2.6) диссипативно. Тогда существует такое $r > 0$, что выполнено (6.2.11). Следовательно, для любого $u \in E^n$ существует такое $k_0(u) \in \mathbb{Z}_+$, что $||\varphi(k, u, \Phi)|| < r$ для всех $k \geq k_0(u)$. Пусть $t \geq t_{k_0}$ и $t \in [t_k, t_{k+1}[\ k \geq k_0)$. Согласно (6.2.5) $\varphi(t, u, \mathfrak{F}) = \varphi(t - t_k, c_k, f_{t_k})$, где $c_k = \varphi(t_k, u, \mathfrak{F})$. Положим

$$\begin{aligned} R_0 := \max\{&||\varphi(s, u, g)|| \,:\, s \in [0, \tau], \\ &||u|| \leq r,\ g \in H(f)\} \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

и заметим, что $||\varphi(t,u,\mathfrak{F})|| = ||\varphi(t-t_k,c_k,f_{t_k})|| \le R_0$ при всех $t \ge t_{k_0}$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} ||\varphi(t,u,\mathfrak{F})|| \le R_0, \tag{6.2.13}$$

причем R_0 в (6.2.13) не зависит от $u \in E^n$. Лемма доказана.

Определим отображение $P : E^n \to E^n$ равенством

$$P(u) := \varphi(\tau,u,\mathfrak{F}) = \varphi(t_p,u,\mathfrak{F}) = \varphi(p,u,\Phi). \tag{6.2.14}$$

Из (6.2.14) и общих свойств разностных уравнений следует непрерывность отображения P.

Теорема 6.2.3. *Для того чтобы уравнение с импульсами (6.2.4) было диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы каскад (E^n, P), где определено равенством (6.2.14), был диссипативным.*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает непосредственно из леммы 6.2.2 и теоремы 6.1.1.

Следствие 6.2.4. *Если уравнение (6.2.4) диссипативно, то существует непустое компактное связное множество $J \subset E^n$, обладающее следующими свойствами:*

(1) *$P(J)$, где -отображение E^n в себя, определенное формулой (6.2.14);*
(2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho(u,J) < \delta$ влечет $\rho(P^k(u),J) < \varepsilon$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$;*
(3) *для любого $u \in E^n$ имеет место равенство $\lim\limits_{k\to+\infty} \rho(P^k(u),J) = 0$.*

Доказательство. Следствие 6.2.4 вытекает из теорем 6.2.3 и 4.5.5.

Следствие 6.2.5. *Если уравнение (6.2.4) диссипативно, то:*

(1) *существует $r > 0$ и для любого $a > 0$ существует $k(a) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $P^kB[0,a] \subseteq B[0,r]$ при всех $k \ge k(a)$;*
(2) *существует $r > 0$ такое, что $P(u_0) = u_0$ и, следовательно, $\varphi(t,u_0,\mathfrak{F})$ есть τ-периодическое решение (6.2.4).*

Рассмотрим слабо нелинейное импульсное уравнение

$$\dot{u} = A(t)u + F(t,u) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k}. \qquad (6.2.15)$$

Имеет место

Теорема 6.2.6. *Пусть A и F τ-периодичны по $t \in \mathbb{R}$. Уравнение (6.2.15) диссипативно, если выполнены следующие условия:*

(1) *существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$||U(t,A)U^{-1}(s,A)|| \le Ne^{-\nu(t-s)},$$

где $U(t,A)$ матрица Коши уравнения

$$\dot{u} = A(t)u. \qquad (6.2.16)$$

(2) *существует достаточно малые ε_0, что $||F(t,u)|| \le C + D||u||$ $(u \in E^n,\ C \ge 0$ и $0 \le D \le \varepsilon_0)$.*

Доказательство. Положим $f(t,u) = A(t)u + F(t,u)$. Согласно лемме 6.2.2 для доказательства теоремы 6.2.6 достаточно показать, что разностное уравнение (6.2.6) диссипативно. Перепишем уравнение (6.2.6) следующим образом

$$c_{k+1} = \widetilde{A}(k)c_k + \widetilde{F}(k, c_k), \qquad (6.2.17)$$

где $\widetilde{A}(k) = U(t_{k+1} - t_k, A_{t_k})$ и

$$\widetilde{F}(k,u) = \varphi(t_{k+1} - t_k, u, f_{t_k}) + s_k - \widetilde{A}(k)u.$$

Отметим, что в условиях теоремы 6.2.6 $\widetilde{A}(k)$ и $\widetilde{F}(k,u)$ являются p–периодическими по $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что нулевое решение однородного уравнения

$$c_{k+1} = \widetilde{A}(k)c_k \qquad (6.2.18)$$

равномерно асимптотически устойчиво. В силу периодичности $\widetilde{A}(k)$ достаточно показать что оно асимптотически устойчиво. Заметим, что

$$U(k, \widetilde{A}) = \prod_{m=0}^{k-1} U(t_{m+1} - t_m,\ A_{t_m}) = U(t_k - t_{p-1}, A_{t_{p-1}}),$$

поэтому, $||U(k,\widetilde{A})|| \le Ne^{-\nu(t_k-t_{p-1})}$, откуда и следует асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (6.2.18).

Далее покажем, что $||\widetilde{F}(k,u)|| \le \widetilde{C} + \widetilde{D}(D)||u||$ при всех $u \in E^n$, где $\widetilde{C}$ и $\widetilde{D}(D)$ – некоторые положительные константы, причем, $\widetilde{D}(D) \to 0$ при $D \to 0$. Действительно, так как $\varphi(t,u,f_l)$ есть решение уравнения

$$\dot{u} = f_l(t,u) = A_l(t)u + F_l(t,u),$$

то $\varphi(t,u,f_l) = U(t,A)\big(u + \int_o^t U^{-1}(s,A_l)F_l(,\varphi(s,u,f_l))ds\big)$ и, следовательно,

$$\widetilde{F}(k,u) = \int_0^{t_{k+1}-t_k} U(t_{k+1}-t_k, A_{t_k})U^{-1}(s,A_{t_k})$$
$$F_{t_k}(s,\varphi(s,u,f_{t_k}))ds + s_k. \qquad (6.2.19)$$

Рассуждая как и в теореме 3.8.9 можно показать, что

$$||\varphi(t,u,f_l)|| \le N||u||e^{(-\nu+ND)t} + \frac{CN}{\nu - DN} \qquad (6.2.20)$$

при всех $t \ge 0$, $l \in \mathbb{R}$ и $u \in E^n$ $(0 \le D \le \nu N^{-1})$. Тогда из (6.2.19) и (6.2.20) получаем

$$||\widetilde{F}(k,u)|| \le \int\limits_0^{t_{k+1}-t_k} Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k-s)}(C + D||\varphi(s,u,f_l)||)ds \le$$

$$Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k)} \int\limits_0^{t_{k+1}-t_k} \Big(Ce^{\nu s} + De^{\nu s}\Big[\frac{CN}{\nu - DN} + N||u||e^{-\nu+ND)s}\Big]\Big)ds$$

$$= Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k)}\Big(\Big[C + D\frac{CN}{\nu-DN}\Big]\frac{e^{\nu(t_{k+1}-t_k)}-1}{\nu} +$$

$$+N||u||D\frac{e^{ND(t_{k+1}-t_k)}-1}{ND}\Big) = \frac{NC}{\nu-DN}\Big(1 - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)}\Big) +$$

$$N||u||\Big(e^{(ND-\nu)(t_{k+1}-t_k)} - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)}\Big) \le \widetilde{C} + \widetilde{D}(D)||u||,$$

где $\widetilde{C} = NC(\nu - ND)^{-1}$ и

$$\widetilde{D}(D) = N \sup_{0 \le k \le p-1}\Big[e^{(ND-\nu)(t_{k+1}-t_k)} - e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)}\Big]. \qquad (6.2.21)$$

Из (6.2.21) следует, что $\widetilde{D}(D) \to 0$ при $D \to 0$, поэтому существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $\widetilde{D}(\varepsilon_0) < M^{-1}(1-q)$ (см. теорему 6.1.5). Согласно теореме 6.1.5 разностное уравнение (6.2.17) диссипативно, а следовательно, диссипативно и импульсное уравнение (6.2.15). Теорема доказана.

6.3. Импульсные периодические уравнения с конвергенцией

Следуя [**32**], [**79**], импульсное уравнение (6.2.4) назовем конвергентным, если (6.2.4) имеет единственное ω– периодическое решение $\varphi(t, u, \mathfrak{F})$, которое является равномерно асимптотически устойчивым в целом.

Аналогичным образом определяется понятие конвергенции для разностного уравнения (6.1.1). Из приведенного определения следует, что конвергентные уравнения составляют часть диссипативных уравнений, у которых центр Левинсона состоит из единственной периодической траектории (решения) уравнения (6.2.4).

Лемма 6.3.1. *Для того чтобы τ-периодическое импульсное уравнение (6.2.4) было конвергентным, необходимо и достаточно, чтобы (6.2.6) было конвергентным.*

Доказательство. Пусть (6.2.4) конвергентно. Тогда существует единственное τ-периодическое решение $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$ уравнения (6.2.4), которое равномерно асимптотически устойчиво в целом. Непосредственно из соответствующих определений следует, что $\varphi(t, u_0, \Phi)$ $(\Phi(k,\ u) := \varphi(t_{k+1} - t_k, u, f_{t_k}) + s_k)$ есть единственное p-периодическое решение уравнения (6.2.6) и оно равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Обратно, пусть (6.2.6) конвергентно и $\varphi(k, u_0, \Phi)$ – его единственное p-периодическое равномерно асимптотически устойчивое в целом решение. Очевидно, $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$ есть единственное ω-периодическое решение уравнения (6.2.4). Пусть $k \in E^n$ и $t \in [t_k, t_{k+1}[$. Согласно (6.2.5)

$$\begin{aligned} &||\varphi(t, u, \mathfrak{F}) - \varphi(t, u_0, \mathfrak{F})|| \\ &= ||\varphi(t - t_k, c_k, f_{\tau_k}) - \varphi(t - t_k, c_k^0, f_{t_k})||, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

где $c_k = \varphi(t_k, u, \mathfrak{F})$ и $c_k^0 = \varphi(t_k, u_0, \mathfrak{F})$. Для любого компакта $K \subset E^n$ отображение $\varphi : [0,\omega] \times K \times H(f) \to E^n$ $(\varphi : (s,u,g) \to \varphi(s,u,g))$ равномерно непрерывно и, в частности, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$||\varphi(s,u_1,g) - \varphi(s,u_2,g)|| < \varepsilon, \tag{6.3.2}$$

при всех $s \in [0,\omega]$, $||u_1 - u_2|| < \delta$, $u_1, u_2 \in K$ и $g \in H(f)$.

Из (6.3.1) и (6.3.2) и равномерной асимптотической устойчивости в целом $\varphi(k, u_0, \Phi) = c_k^0$ следует аналогичное свойство для $\varphi(t, u_0, \mathfrak{F})$. Лемма доказана.

Теорема 6.3.2. *Пусть $A(k)$ и $F(k,u)$ периодичны по $k \in \mathbb{Z}$ и выполнены условия:*

(1) *существуют положительные числа M и $q < 1$, что имеет место неравенство (6.1.5);*
(2) $||F(k,u_1) - F(k,u_2)|| \le L||u_1 - u_2||$ $(0 \le L < M^{-1}(1-q))$ *при всех $k \in \mathbb{Z}$ и $u_1, u_2 \in E^n$.*

Тогда уравнение (6.1.3) конвергентно.

Доказательство. Пусть $\varphi(k,u,\Phi)$ $(\Phi(k,u) = A(k)u = A(k)u + F(k,u))$ – решение уравнения (6.1.3), проходящее через u при $k = 0$. По формуле вариации постоянных имеем

$$\varphi(k,u,\Phi) = U(k,A)\Big(u + \sum_{m=0}^{k-1} U^{-1}(m+1,A)F(m,\varphi(m,u,\Phi))\Big),$$

откуда следует, что

$$\varphi(k,u_1,\Phi) - \varphi(k,u_2,\Phi) = U(k,A)\Big(u_1 - u_2 +$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} U^{-1}(m+1,A)[F(m,\varphi(m,u,\Phi)) - F(m,\varphi(m,u_2,\Phi))]\Big).$$

Следовательно,

$$||\varphi(k,u_1,\Phi) - \varphi(k,u_2,\Phi)|| \le Mq^k\Big(||u_1 - u_2||$$

$$+Lq^{-1}\sum_{m=0}^{k-1} q^{-m}||\varphi(k,u_1,\Phi) - \varphi(k,u_2,\Phi)||\Big). \tag{6.3.3}$$

Положим $u(k) := ||\varphi(k, u_1, \Phi) - \varphi(k, u_2, \Phi)||q^{-k}$. Из (6.3.3) следует, что

$$u(k) \leq M\Big(||u_1 - u_2|| + Lq^{-1} \sum_{m=0}^{k-1} u(m)\Big). \tag{6.3.4}$$

Обозначим через $v(k)$ правую часть (6.3.4). Имеет место неравенство

$$v(k+1) - v(k) = LMq^{-1}u(k) \leq LMq^{-1}v(k). \tag{6.3.5}$$

Из (6.3.5) получаем

$$v(k) \leq (1 + LMq^{-1})^{k-1}v(1) \tag{6.3.6}$$

и, следовательно,

$$u(k) \leq (1 + LMq^{-1})M||u_1 - u_2||, \tag{6.3.7}$$

так как $v(1) = M||u_1 - u_2||$. Из (6.3.7) получаем

$$||\varphi(k, u_1, \Phi) - \Phi(k, u_2, \Phi)|| \leq (q + LM)^{k-1}qM||u_1 - u_2|| \tag{6.3.8}$$

при всех $u_1, u_2 \in E^n$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что в условиях теоремы 6.3.2 применима теорема 6.1.5 и, следовательно уравнение (6.1.3) имеет хотя бы одно p-периодическое решение $\varphi(k, u_0, \Phi)$ (см. также следствие 6.1.6). Из (6.3.8) следует асимптотическая устойчивость в целом решения $\varphi(k, u_0, \Phi)$ и в силу периодичности уравнения (6.3.1) решение $\varphi(k, u_0, \Phi)$ будет равномерно асимптотически устойчивым в целом. Теорема доказана.

Теорема 6.3.3. *Пусть $A(t)$ и $F(t, u)$ τ-периодичны по $t \in \mathbb{R}$. Уравнение (6.2.15) конвергентно, если выполнены следующие условия:*

(1) *существуют положительные числа N и ν такие, что*

$$||U(t, A)U^{-1}(s, A)|| \leq Ne^{-\nu(t-s)} \quad (t \geq s);$$

(2) *существует достаточно малые ε_0 такое, что*

$$||F(t, u_1) - F(t, u_2)|| \leq L||u_1 - u_2||$$

$(u_1, u_2 \in E^n,\ t \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leq L \leq \varepsilon_0)$.

Доказательство. Согласно лемме 6.3.1 для доказательства конвергентности (6.2.15) достаточно установить, что в условиях теоремы 6.3.3 этим свойством обладает разностное уравнение (6.2.6). Как и при доказательстве теоремы 6.2.6, представим уравнение (6.2.6) в виде (6.2.17). В условиях теоремы 6.3.3 нулевое решение уравнения (6.2.18) равномерно асимптотически устойчиво. Далее, из (6.2.19) следует, что

$$||\widetilde{F}(k,u_1)-\widetilde{F}(k,u_2)|| = || \int\limits_0^{t_{k+1}-t_k} U(t_{k+1}-t_k,A_{t_k})U^{-1}(s,A_{t_k})\times$$

$$[F_{t_k}(s,\varphi(s,u_1,f_{t_k})-F_{t_k}(s,\varphi(s,u_2,f_{t_k}))]ds \leq \qquad (6.3.9)$$

$$\int\limits_0^{t_{k+1}-t_k} Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k-s)}L||\varphi(s,u_1,f_{t_k}-\varphi(s,u_2,f_{t_k})||ds.$$

Рассуждая как и в теореме 5.4.4, получим

$$||\varphi(t,u_1,f_{t_k}-\varphi(t,u_2,f_{t_k})|| \leq N||u_1-u_2||e^{-(\nu-LN)t} \qquad (6.3.10)$$

при всех $u_1,u_2\in E^n$ и $t\in\mathbb{R}_+$, где $f_{t_k}(t,u)=A_{t_k}(t)u+F_{t_k}(t,u)$. Из (6.3.9) и (6.3.10) получаем

$$||\widetilde{F}(k,u_1)-\widetilde{F}(k,u_2)|| \leq Ne^{-\nu(t_{k+1}-t_k)}L$$

$$\int\limits_0^{t_{k+1}-t_k} e^{LN^2s}N||u_1-u_2||ds \leq \widetilde{L}(L)||u_1-u_2||, \qquad (6.3.11)$$

где

$$\widetilde{L}(L) := \sup_{0\leq k\leq p-1}\Big[e^{(-\nu+LN^2)(t_{k+1}-t_k)}-e^{-\nu(t_{k+1}-t_k)}\Big]. \qquad (6.3.12)$$

Из (6.3.12) следует, что $\widetilde{L}(L)\to 0$ при $L\to 0$, поэтому найдется $\varepsilon_0>0$ такое, что $\widetilde{L}(L)<M^{-1}(1-q)$ при $0\leq L\leq\varepsilon_0$. Согласно теореме 6.3.2 уравнение (6.2.18) конвергентно и для завершения доказательства теоремы 6.3.3 достаточно сослаться на лемму 6.3.1.

Замечание 6.3.4. *а. Утверждение, близкое к теореме 6.3.3, доказано также в работе* [**70**].

б. Вопросы диссипативности и конвергентности уравнений с импульсами изучались в работах [**70**], [**139**], [**140**].

6.4. Асимптотическая устойчивость линейных функционально-дифференциальных уравнений

Используя некоторые идеи и методы, развитые для изучения диссипативных динамических систем, можно получить ряд условий, эквивалентных асимптотической устойчивости линейных неавтономных динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. В качестве приложения мож- но получить соответствующие утверждения для линейных функционально-дифференциальных уравнений.

Пусть (X, h, Y) – векторное расслоение со слоем E (E – банахово пространство) и $|\cdot| : X \to \mathbb{R}$ – норма на X, согласованная с метрикой X, т.е. $|\cdot|$ непрерывна и $|x| = \rho(x, \theta_y)$, где $x \in X_y$, θ_y – нулевой элемент X_y и ρ – метрика на X.

Динамическая система $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ называется локально-ком- пактной (вполне непрерывной), если для любого $x \in X$ существуют $\delta_x > 0$ и $l_x > 0$ такие, что $\pi^t B(x, \delta_x)$ $(t \geq l_x)$ относительно компактно.

Теорема 6.4.1. *Если система $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ локально– компактна и Y компактно, то следующие условия эквивалентны:*

(1) $\lim\limits_{t\to+\infty} |xt| = 0$ *при всех* $x \in X$;

(2) *все движения в* $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ *относительно компактны и в системе* $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ *нет нетривиальных компактных продолжаемых на* $\mathbb{S}$ *движений;*

(3) *существуют положительные числа* N *и* ν *такие, что* $|xt| \leq Ne^{-\nu t}|x|$ *при всех* $x \in X$ *и* $t \in \mathbb{S}_+$.

Доказательство. Из равенства $\lim\limits_{t\to+\infty} |xt| = 0$ следует, что Σ_x^+ относительно компактно и

$$\omega_x \subseteq \Theta = \{\theta_y : y \in J_Y, \text{ где } \theta_y -- \text{ нулевой элемент } X_y\}.$$

Таким образом, динамическая система $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ поточечно диссипативна и согласно теореме 1.4.3 является компактно диссипативной. Обозначим через J_X центр Левинсона динамической системы $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ и покажем, что $J_X = \Theta$. Очевидно, Θ является компактным и инвариантным ($\pi^t\Theta = \Theta$ при всех

$t \in \mathbb{S}_+$) множеством и, следовательно, $\Theta \subseteq J_X$. Из последнего включения следует, что $h(J_X) = J_Y$. Покажем теперь, что $J_X = \Theta$. Если допустить, что это не так, то $J_X \setminus \Theta \neq \emptyset$ и, следовательно, найдется $x_0 \in J_X \setminus \Theta$. Так как в J_X все движения продолжаемы на $\mathbb{S}$ (см. теорему 1.3.4), то существует непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{S} \to J_X$ такое, что $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s)$ при всех $s \in \mathbb{S}$ и $t \in \mathbb{S}_+$. С другой стороны, в силу линейности системы $\big\langle (X, \mathbb{S}_+, \pi), (Y, \mathbb{S}_+, \sigma), h \big\rangle$ наряду с точкой x_0 множеству J_X принадлежат и все точки $\lambda x_0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$, так как J_X есть максимальное компактное инвариантное множество в X. Но включение $\lambda x_0 \in J$ может иметь место при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $x_0 \in \Theta$. Последнее противоречит выбору x_0. Полученное противоречие показывает, что $J_X = \Theta$.

Покажем теперь, что в $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ нет нетривиальных компактных продолжаемых на $\mathbb{S}$ движений. Действительно, пусть $x \in X$ таково, что существует $\varphi : \mathbb{S} \to X$, обладающее следующими свойствами: $\varphi(\mathbb{S})$ относительно компактно, $\pi^t \varphi(s) = \varphi(t+s) \quad (t \in \mathbb{S}_+, \ s \in \mathbb{S})$ и $\varphi(0) = x_0$. Так как J_X – максимальное компактное инвариантное множество, то $\overline{\varphi(\mathbb{S})} \subseteq J_X$ и, в частности, $x_0 \in J_X \subseteq \Theta$, поэтому $|x_0| = 0$. Таким образом мы показали, что из 1. следует 2. . Обратная импликация очевидна.

Докажем, что из 1. следует 3.. Действительно, так как в условиях теоремы 6.4.1 из 1. следует, что $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ поточечно диссипативна, то согласно теореме 1.4.3 она является локально диссипативной. В силу компактности Y и локальной диссипативности $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \sup\{||xt|| : ||x|| < \delta\} = 0. \tag{6.4.1}$$

Из (6.4.1) стандартными рассуждениями (см., например, [**225**], [**246**], а также теорему 2.11.3) можно показать, что найдутся $N, \ \nu > 0$ такие, что $||xt|| \leq N e^{-\nu t} ||x||$ при всех $x \in X$ и $t \geq 0$. Наконец, очевидно, из 3. следует 1.. Теорема доказана.

Замечание 6.4.2. *а. Условие локальной вполне непрерывности в теореме 6.4.1 является существенным. Для подтверждения сказанного достаточно рассмотреть пример 1.6.6, в котором все движения стремятся к нулю при* $t \to$

$+\infty$, *но нет экспоненциальной устойчивости. Нетрудно убедиться, что динамическая система из примера 1.6.6 не является локально вполне непрерывной.*

b. Теорема 6.4.1 остается справедливой и в том случае, если Y *не являются метрическими, но являются псевдометрическими пространствами.*

Важным классом линейных неавтономных систем с бесконечномерным фазовым пространством, удовлетворяющих условию локальной вполне непрерывности, являются линейные неавтономные функционально-дифференциальные уравнения [**96**]. Напомним некоторые понятия и обозначения из [**96**]. Пусть $r > 0$, $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ – банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой sup. Если $[a,b] = [-r,0]$, то положим $C := C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ и $u \in C([\sigma - r, \sigma + A],\mathbb{R}^n)$. Для любого $t \in [\sigma, \sigma + A]$ определим $u_t \in C$ соотношением $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$. Обозначим через $D = D(C,\mathbb{R}^n)$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов действующих из C в $\mathbb{R}^n$, наделенное операторной нормой. Рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{u} = A(t, u_t), \tag{6.4.2}$$

$A : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ непрерывно и по второй переменной линейно, т.е. при каждом $t \in \mathbb{R}$ $A(t,\cdot) \in D$. Положим $H(A) := \overline{\{A_s : s \in \mathbb{R}\}}$, где $A_s(t,\cdot) = A(t+s,\cdot)$ и чертой обозначено замыкание в топологии равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{R} \times C$.

Наряду с уравнением (6.4.2) рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{v} = B(t, v_t), \tag{6.4.3}$$

где $B \in H(A)$. Пусть $\varphi(\cdot, \phi, B)$ – решение уравнения (6.4.3), проходящее через точку $\phi \in C$ при $t = 0$, определенное при всех $t \geq 0$.

Положим $Y := H(A)$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $H(A)$. Пусть $X := C \times Y$, а $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ динамическая система (полугрупповая) на X определенная по следующему правилу: $\pi((\phi, B), \tau) = (\varphi(\tau, \phi, B), B_\tau)$. Система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \sigma), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ является линейной. Отметим одно важное свойство построенной неавтономной динамической системы. Имеет место следующая

Лемма 6.4.3. *Пусть $H(A)$ компактно. Тогда какова бы ни было точка $x \in X := C \times H(A)$ существует окрестность U_x точки x и число $l_x > 0$ такие, что $\pi^t U_x$ относительно компактно при всех $t \geq l_x$, т.е. динамическая система $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ локально вполне непрерывна (локально–ком- пактна).*

Доказательство. Сформулированное утверждение вытекает из лемм 2.2.3 и 3.6.1 из **[96]** и компактности Y.

Применяя к построенной неавтономной динамической системе теорему 6.4.1 (см. также замечание 6.4.2) и учитывая лемму 6.4.3, получим следующее утверждение.

Теорема 6.4.4. *Пусть $H(A)$ компактно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *нулевое решение уравнения (6.4.2) равномерно экспоненциально устойчиво, т.е. существуют положительные числа N и ν такие, что $||\varphi(t, \phi, B)|| \leq Ne^{-\nu t}||\phi||$ при всех $B \in H(A)$ и $t \geq 0$;*

(2) *какого бы ни было $B \in H(A)$ нулевое решение уравнения (6.4.3) равномерно асимптотически устойчиво.*

6.5. Конвергентность эволюционного уравнения с равномерно положительным оператором

Обозначим через $L^p_{loc}(\mathbb{R}, H)$ пространство всех локально суммируемых вместе с p–ой степенью функций $\varphi : \mathbb{R} \to H$, т. е. таких, что

$$\int\limits_{|t| \leq k} |\varphi(t)|^p dt < +\infty \qquad (p > 1,\ k = 0, 1, 2 \ldots).$$

Топологию на $L^p_{loc}(\mathbb{R}, H)$ определим при помощи системы полунорм $|\cdot|$:

$$|\varphi|_k := \Big(\int\limits_{|t| \leq k} |\varphi(t)|^p dt \Big)^{\dfrac{1}{p}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и через $(L^p_{loc}(\mathbb{R}, H), \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на $L^p_{loc}(\mathbb{R}, H)$ (см. [**241**]).

Напомним [**163**], что оператор $A : D(A) \to H$ $(D(A) \subseteq H$ область определения A и H–вещественное гильбертово пространство) называется:

a. монотонным, если для любых $u_1, u_2 \in D(A) : \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0$;
b. полуненрерывным, если функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная равенством $\varphi(\lambda) := \langle A(u+\lambda v), w \rangle$, непрерывна;
c. равномерно монотонным, если существует положительное число $\alpha > 0$ такое, что $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha ||u - v||^2$ при всех $u, , v \in D(A)$.

Заметим, что семейство монотонных операторов можно частично упорядочить по включению графиков. Монотонный оператор называется максимальным, если он является максимальным среди монотонных операторов.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\dot{x} + Ax = f, \tag{6.5.1}$$

где $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$ и A – максимальный монотонный оператор с областью определения $D(A)$. Согласно [**241**], какого бы ни было $x_0 \in \overline{D(A)}$ существует единственное слабое решение $\varphi(t, x_0, f)$ уравнения (6.5.1), удовлетворящее условию $\varphi(0, x_0, f) = x_0$ и определенное на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $Y := H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$, где чертой обозначено замыкание в $L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$, и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y, индуцированную динамической системой $(L^1_{loc}(\mathbb{R}, H), \mathbb{R}, \sigma)$. Положим $X := \overline{D(A)} \times Y$ и определим $\pi : \mathbb{R}_+ \times \overline{D(A)} \times Y \to \overline{D(A)} \times Y$ равенством $\pi((v, g), t) := (\varphi(t, v, g), g_t)$ и $h := pr_2 : X \to Y$. Как показано в работе [**241**], тройка $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ является неавтономной динамической системой. Применяя к ней полученные ранее результаты, получим соответствующие утверждения для уравнения (6.5.1). Приведем одно из утверждений такого рода.

Теорема 6.5.1. *Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$ таково, что $H(f)$ компактно. Если A – максимальный монотонный оператор,* *который является полунепрерывным и равномерно монотонным, то уравнение (6.5.1) конвергентно, т.е. уравнение (6.5.1) имеет единственное компактное равномерно согласованное решение* $\varphi(t, u_f, f) \quad (u_f \in \overline{D(A)})$, *определенное на* $\mathbb{R}$ *и оно равномерно асимптотически устойчиво в целом. Более того, существуют положительные числа* N *и* ν *такие, что, каково бы ни было* $g \in H(f)$, *уравнение*

$$\dot{v} + Av = g \tag{6.5.2}$$

имеет единственное компактное равномерно согласованное решение $\varphi(t, v_g, g) \quad (v_g \in D(A))$, *определенное на* $\mathbb{R}$ *и такое, что*

$$|\varphi(t, v, g) - \varphi(t, v_g, g)| \leq Ne^{-\nu t}|v - v_g| \tag{6.5.3}$$

при всех $v \in \overline{D(A)}$ *и* $t \geq 0$.

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно получается из теоремы 2.5.5, если ее применить к построенной выше неавтономной динамической системе. При этом надо учесть, что согласно результатов работы [**241**] из равномерной монотонности оператора A следует существование положительных чисел N и ν таких, что

$$|\varphi(t, v_1, g) - \varphi(t, v_2, g)| \leq Ne^{-\nu t}|v_1 - v_2| \tag{6.5.4}$$

при всех $v_1, v_2 \in D(A)$ и $g \in H(A)$. Соотношение (6.5.4) гарантирует выполнение условия г. теоремы 2.5.5, если в качестве $V : X \times X \to \mathbb{R}_+$, взять, например, функцию $V((v_1, g), (v_2, g)) := |v_1 - v_2| \ \ g \in H(f), \ v_1, v_2 \in \overline{D(A)})$.

Следствие 6.5.2. *Пусть* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *рекуррентна (почти периодична,* τ*-периодична) и выполнены условия теоремы 6.5.1. Тогда уравнение (6.5.1) имеет единственное рекуррентное (почти периодическое,* τ*-периодическое) решение, которое равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Отметим, что в почти периодическом случае следствие 6.5.2 уточняет и усиливает один результат из [**61**, с.164].

В заключении приведем пример уравнения вида (6.5.1).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \phi\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) + f(t) \tag{6.5.5}$$

в открытой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с граничным условием $u = 0$ на $\partial\Omega$. Предположим, что функция $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям: $\phi(0) = 0$ и $0 < c_1 \leq \phi'(\xi) \leq c_2 \quad (\xi \in \mathbb{R})$. Тогда уравнение (6.5.5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta u - \phi(v) + f(t). \end{cases} \tag{6.5.6}$$

Наконец, положим $H := W_0^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и определим на H скалярное произведение

$$\langle (u,v),(u^*,v^*)\rangle := \int\limits_\Omega [vv^* + uv + \lambda uv^* + \lambda u^* v]dx,$$

где λ – некоторая положительная константа, зависящая только от c_1 и c_2. Можно проверить (см., например, [**193**]), что при сделанных предположениях все условия теоремы 6.5.1 выполнены, если $H(f) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ компактно.

6.6. Глобальные аттракторы неавтономных систем Лоренца

Системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}_i = \sum_{j,k=1}^n b_{ijk}u_j u_k + \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j + f_i \tag{6.6.1}$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$, где $\sum\limits_{i,j,k=1}^n b_{ijk}u_i u_j u_k \equiv 0$, $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}u_i u_j$ – отрицательно определенная квадратичная форма и f_i – постоянные, называются системами гидродинамического типа или системами Лоренца [**85**],[**233**]. Хорошо известно, что решения системы (6.6.1) погружаются в некоторый эллипс и в дальнейшем его не покидают, т.е. система (6.6.1) диссипативна и, следовательно, допускает компактный глобальный аттрактор. В векторно-матричной форме система (6.6.1) может быть записана следующим образом:

$$\dot{u} = Au + B(u,u) + f, \tag{6.6.2}$$

где A – положительно определенная $n \times n$ матрица, $B : R^n \times R^n \to R^n$ – билинейная форма, удовлетворяющая тождеству

$$(B(u,v),w) = -(B(v,w),u) \tag{6.6.3}$$

при всех $u, v, w \in R^n$. В работе [**229**] изучаются компактные глобальные оттягивающие назад (pullback) аттракторы системы (6.6.2) с нестационарной ограниченной правой частью f. В этом параграфе мы изучаем компактные глобальные аттракторы нестационарных систем вида (6.6.2), т.е. когда A, B и f нестационарны.

6.6.1. Квазилинейные неавтономные динамические системы и их аттракторы. Пусть Ω – компактное метрическое пространство, (Ω, R, σ) – динамическая система на Ω, E^n – n-мерное (вещественное или комплексное) евклидово пространство, $L(E^n)$ $(L^2(E^n))$ – пространство всех линейных (билинейных) форм на E^n и $C(Y,W)$ пространство всех непрерывных функций $f : Y \to W$ (Y и W полные метрические пространства) снабженное открыто–компактной топологией.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(\omega t)x \qquad (\omega \in \Omega,\ \omega t = \sigma(t,\omega)) \tag{6.6.4}$$

и возмущенное уравнение

$$\dot{y} = A(\omega t)y + F(\omega t, y), \tag{6.6.5}$$

где $A \in C(\Omega, L(E^n))$ и $F \in C(\Omega \times E^n, E^n)$ локально Липшицева по переменной $y \in E^n$. Мы будем предполагать, что функция $F \in C(\Omega \times E^n, E^n)$ является регулярной, т.е. для любых $\omega \in \Omega$ и $u \in E^n$ уравнение имеет единственное решение $\varphi(t,u,w)$ удовлетворяющее начальному условию $\varphi(o,u,w) = u$ и определенное на R_+. Тогда корректно определено отображение $\varphi : R_+ \times E^n \times \Omega \to E^n$ $(\varphi : (t,u,\omega) \to \varphi(t,u,w))$ и из общих свойств решений дифференциальных уравнений [**252**],[**95**] следует, что:

a. $\varphi(0,u,w) = u$ для любых $u \in E^n,\ \omega \in \Omega$ и $t, \tau \in R_+$;
b. $\varphi(t+\tau,u,w) = \varphi(t,\varphi(\tau,u,w),\sigma(\tau,\omega))$ при всех $u \in E^n,\ \omega \in \Omega$ и $t, \tau \in R_+$;
c. отображение $\varphi : R_+ \times E^n \times \Omega \to E^n$ непрерывно.

Таким образом дифференциальное уравнение (6.6.5) с регулярным возмущением $F \in C(\Omega \times E^n, E^n)$ естественным образом порождает коцикл $\langle E^n, \varphi, (\Omega, R, \sigma)\rangle$ над (Ω, R, σ) со слоем E^n. Применяя к построенному коциклу общие результаты глав 1 – 6, мы получим ряд результатов для (6.6.5). Ниже приводятся некоторые результаты такого типа.

Теорема 6.6.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *существует* $\alpha : \Omega \to R_+$ *такое, что*

$$Re\langle A(\omega)x, x\rangle \leq -\alpha(\omega)|x|^2 \tag{6.6.6}$$

при всех $\omega \in \Omega$ *и* $x \in E^n$*;*

(2) *существуют* $r > 0$ *и* $a : \Omega \to R_+$ *такие, что*

$$Re\langle F(\omega, x), x\rangle \leq a(\omega)|x|^2 \tag{6.6.7}$$

при всех $\omega \in \Omega$ *и* $|x| \geq r$*;*

(3) *существует* $\alpha_0 > 0$ *такое, что* $\alpha(\omega) - a(\omega) \geq \alpha_0$ *при всех* $\omega \in \Omega$.

Тогда уравнение (6.6.5) допускает компактный глобальный аттрактор.

Доказательство. Пусть $\langle E^n, \varphi, (\Omega, R, \sigma)\rangle$ – коцикл, порожденный уравнением (6.6.5) и $\langle (X, R_+, \pi), (\Omega, R, \sigma), h\rangle$ соответствующая этому коциклу неавтономная динамическая система (где $X := E^n \times \Omega$, $\pi := (\varphi, \sigma)$ и $h = pr_2 : X \to \Omega$). Рассмотрим функцию $V : X \to R_+$, определенную при помощи равенства $V(u, \omega) = |u|^2$. Тогда $V(\pi^t(u, \omega)) = |\varphi(t, u, \omega)|^2$ и

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(\pi^t(u,\omega)) &= 2Re\langle \dot{\varphi}(t,u,\omega), \varphi(t,u,\omega)\rangle = \\ &= 2Re\langle A(\omega t)\varphi(t,u,\omega), \varphi(t,u,\omega)\rangle + \\ &+ 2Re\langle F(\omega t, \varphi(t,u,\omega), \varphi(t,u,\omega)\rangle. \end{aligned} \tag{6.6.8}$$

Таким образом мы имеем

$$V'_\pi(u,\omega) := \frac{d}{dt}V(\pi^t(u,\omega))\Big|_{t=0} = 2Re\langle A(\omega)u, u\rangle \tag{6.6.9}$$
$$+ 2Re\langle F(\omega, u), u\rangle \leq -2\alpha(\omega)|u|^2 + 2a(\omega)|u|^2 \leq -2\alpha_0|u|^2$$

при всех $|u| \geq r$ и $\omega \in \Omega$. Согласно теореме 5.1.5 существует R_0 такое, что для любого $R > 0$ найдется $l(R) > 0$ для которого

$|\varphi(t,u,\omega)| \le R_0$ для всех $t \ge l(R)$, $|u| \le R$ и $\omega \in \Omega$. По теореме 2.7.3 коцикл $\langle E^n, \varphi, (\Omega, R, \sigma)\rangle$ допускает компактный глобальный аттрактор, т.е. существует семейство непустых компактов $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ $(I_\omega \subset E^n)$, удовлетворяющих следующим условиям:

i) $I := \cup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ компактно;

ii) $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ, т.е. $\varphi(t, I_\omega, \omega) = I_\omega$ при всех $\omega \in \Omega$ и $t \in R_+$;

iii) $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\limits_{\omega\in\Omega} \beta(\varphi(t,K,\omega), I) = 0$ для любого компакта $K \subset E^n$;

iv) $\lim\limits_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t,K,\omega_{-t}), I_\omega) = 0$ для каждого $\omega \in \Omega$ любого порядка $K \subset E^n$;

v) $u \in I_\omega$ тогда и только тогда, когда решение $\varphi(t,u,\omega)$ определено на R и ограничено;

vi) I_ω непустой связный компакт для каждого $\omega \in \Omega$.

Теорема доказана

6.6.2. Неавтономные системы Лоренца. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(\omega t)x + B(\omega t)(x,x) + f(\omega t), \tag{6.6.10}$$

где $A \in C(\Omega, L(E^n))$, $B \in C(\Omega, L^2(E^n))$ и $f \in C(\Omega, E^n)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) существует $\alpha : \Omega \to R_+$ такое что

$$Re\langle A(\omega)x, x\rangle \le -\alpha(\omega)|x|^2 \tag{6.6.11}$$

при всех $\omega \in \Omega$ и $u \in E^n$;

(2)

$$Re\langle B(\omega)(u,v), w\rangle = -Re\langle B(\omega)(v,w), u\rangle \tag{6.6.12}$$

при всех $u, v, w \in E^n$ и $\omega \in \Omega$.

Замечание 6.6.2. *a. Из условия (6.6.12) следует равенство*

$$Re\langle B(\omega)(v,u), u\rangle = 0 \tag{6.6.13}$$

при всех $u, v \in E^n$ и $\omega \in \Omega$;

b. существует $C : \Omega \to R_+$ такое, что

$$|B(\omega)(u,v)| \le C(\omega)|u||v| \tag{6.6.14}$$

при всех $u, v \in E^n$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* $C(\omega) := \max\{|B(\omega)(u,v)| : |u|, |v| \leq 1\}$.

Систему (6.6.10) с условиями (6.6.12) будем называть неавтономной системой Лоренца или неавтономной системой гидродинамического типа.

Так как коэффициенты системы (6.6.10) локально липшицевы по $u \in E^n$, то через каждую точку $u \in E^n$ проходит единственное решение $\varphi(t, u, \omega)$ уравнения (6.6.10) с начальным условием $\varphi(0, u, \omega) = u$. Пусть $[0, t_{(u,\omega)})$ - максимальный интервал, где определено решение $\varphi(t, u, \omega)$. Положим $w(t) = |\varphi(t, u, , \omega)|^2$. Тогда из (6.6.10)–(6.6.12) следует неравенство

$$w'(t) \leq -2\alpha(\omega t)w(t) + 2|f(\omega t)|w^{1/2}(t) \tag{6.6.15}$$

при всех $t \in [0, t_{(u,\omega)})$ и, следовательно,

$$|\varphi(t, u, \omega)| \leq v(t, u, \omega) \tag{6.6.16}$$

для всех $t \in [0, t_{(u,\omega)})$, где $v(t, u, \omega)$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = -\alpha(\omega t)z + |f(\omega t)| \tag{6.6.17}$$

удовлетворяющее условию $v(0, u, \omega) = |\varphi(0, u, \omega)| = |u|$. Таким образом

$$|\varphi(t, u, \omega)| \leq e^{-\int\limits_0^t \alpha(\omega\tau)d\tau}|u| + \int_0^t e^{-\int\limits_s^t \alpha(\omega\tau)d\tau}|f(\omega s)|ds \tag{6.6.18}$$

для любого $t \in [0, t_{(u,\omega)})$. Из неравенства (6.6.18) следует, что решение $\varphi(t, u, \omega)$ может быть продолжено на R_+. Таким образом неавтономной системой Лоренца определяется коцикл φ.

Теорема 6.6.3. *Пусть* Ω *компактно и существует* $\nu > 0$ *такое, что* $\alpha(\omega) \geq \nu_0$ *при всех* $\omega \in \Omega$, *тогда:*

(1) $|\varphi(t, u, \omega)| \leq \Big(|u| - \dfrac{||f||}{\nu_0}\Big)e^{-\nu t} + \dfrac{||f||}{\nu}$ *при всех* $t \in R_+, u \in E^n$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* $||f|| = \max\{|f(\omega)| \ : \ \omega \in \Omega\}$;

(2) *неавтономная система Лоренца (6.6.10) допускает компактный глобальный аттрактор* $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$;

(3) $|u| \leq \frac{||f||}{\nu}$ *при всех* $u \in I_\omega$ *и* $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Положим $w(t) := |\varphi(t,u,\omega)|^2$. Тогда $w'(t) \le -2\nu w(t) + 2||f||w^{1/2}(t)$ и, следовательно, $w(t) \le v(t)$, где $v(t)$ верхнее решение дифференциального уравнения $v' = -2\nu v + 2||f||v^{1/2}$ с начальным условием $v(0) = w(0) = |u|^2$. Таким образом, $v(t) = \Big[\Big(|u| - \frac{||f||}{\nu}\Big)e^{-\nu t} + \frac{||f||}{\nu}\Big]^2$ и, следовательно,

$$|\varphi(y,u,,\omega)| \le \Big(|u| - \frac{||f||}{\nu}\Big)e^{-\nu t} + \frac{||f||}{\nu} \tag{6.6.19}$$

при всех $t \in R_+, u \in E^n$ и $\omega \in \Omega$.

Из неравенства (6.6.19) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{|u|\le R,\, \omega\in\Omega} |\varphi(t,u,\omega)| \le \frac{||f||}{\nu} \tag{6.6.20}$$

для каждого $R > 0$, т.е. коцикл $\langle E^n, \varphi, (\Omega, R, \sigma)\rangle$, порожденный неавтономной системой Лоренца (6.6.10), компактно диссипативен. Согласно теореме 2.7.3 коцикл φ допускает компактный глобальный аттрактор $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ обладающий свойствами i) – v). Из свойства ii) вытекает, что $\varphi(t, I_{\omega_{-t}}, \omega_{-t}) = I_\omega$ при всех $t \in R_+$ и $\omega \in \Omega$. Пусть $u \in I_\omega$ и $t_n \to +\infty$, тогда найдется последовательность $\{u_n\} \subset I = \cup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ $(u_n \in I_{\omega_{-t_n}})$ такая, что

$$u = \varphi(t_n, u_n, \omega_{-t_n}). \tag{6.6.21}$$

Так как $I = \cup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\} \subset E^n$ компактно, то существует $R > 0$ такое, что $|u| \le R$ при всех $u \in I$. Тогда из (6.6.21) и (6.6.19) следует, что $|u| \le \frac{||f||}{\nu}$, если $u \in I_\omega$. Теорема полностью доказана.

6.6.3. Неавтономная система Лоренца с конвергенцией. Пусть (X, R_+, π) – полугрупповая динамическая система. Напомним, что точка $x \in X$ называется стационарной, если $\pi^t x = x$ и τ-периодической, если $\pi^{t+\tau}x = \pi^t x$ при всех $t \in R_+$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\tau \in R_+$ называется ε-сдвигом (почти периодом) точки $x \in X$, если $\rho(\pi^\tau x, x) < \varepsilon$ $(\rho(\pi^{t+\tau}x, \pi^t x) < \varepsilon$ при всех $t \in R_+)$. Точка x называется почти рекуррентной (почти периодической), если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что на каждом отрезке длины l найдется ε-сдвиг (ε-почти период) точки x.

Если точка $x \in X$ почти рекуррентна и множество $H(x) = \overline{\{\pi^t x | t \in R_+\}}$ компактно, тогда x называется рекуррентной.

Решение $\varphi(t, u, \omega)$ неавтономной системы Лоренца (6.6.10) назовчм рекуррентным (почти периодическим), если точка $(u, \omega) \in X = E^n \times \Omega$ является рекуррентной (почти периодической) относительно динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, \pi)$ ($X = E^n \times \Omega$ и $\pi = (\varphi, \sigma)$, т.е. $\pi(t, (u, \omega)) = (\varphi(t, u, \omega), \sigma(t, \omega))$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $(u, \omega) \in X$).

Замечание 6.6.4. *Если $\omega \in \Omega$ является стационарной (τ-периодической, почти периодической, рекуррентной) точкой динамической системы (Ω, R, σ) и $h : \Omega \to X$ гомоморфизм динамической системы (Ω, R, σ) на (X, R_+, π), тогда точка $x = h(\omega) \in X$ является стационарной (τ-периодической, почти периодической, рекуррентной) относительно (X, R_+, π).*

Теорема 6.6.5. *В условиях теоремы 6.6.3, если $C_B < \nu^2/||f||$, где*

$$C_B := \max\{|B(\omega)(u, v)| \ : \ \omega \in \Omega, \, |u| \leq 1, \, |v| \leq 1\},$$

то имеют место следующие утверждения:

(1) *уравнение (6.6.10) конвергентно, т.е. оно допускает компактный глобальный аттрактор $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ и множество I_ω состоит ровно из одной точки $u_\omega (I_\omega = \{u_\omega\})$ каково ни было $\omega \in \Omega$;*

(2) *$\varphi(t, u_\omega, \omega) = u_{\sigma(t,\omega)}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\omega \in \Omega$ и, следовательно равенством $h(\omega) = (u_\omega, \omega)$ определяется гомеоморфизмом динамических систем $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ и $(h(\Omega), \mathbb{R}_+, \pi)$;*

(3) *$\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t, u, \omega) - \varphi(t, u_\omega, \omega)| = 0$ при всех $\omega \in \Omega$ и $u \in E^n$;*

(4) *если Ω состоит из стационарной точки (τ-периодической траектории, почти периодического минимального множества, компактного минимального множества), тогда через точку $u_\omega \in E^n$ проходит единственное стационарное (τ-периодическое, почти периодическое, рекуррентное) решение $\varphi(t, u_\omega, \omega)$ уравнения (6.6.10),*

которое равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega$ и $u_1, u_2 \in I_\omega$. Положим $\psi(t) := \varphi(t, u_1, \omega) - \varphi(t, u_2, \omega)$ и $w(t) := |\varphi(t, u_1, \omega) - \varphi(t, u_2, \omega)|^2$, тогда по теореме 6.6.3 функция w ограничена на $\mathbb{R}$. С другой стороны,

$$w'(t) \leq -2\nu w(t) + 2Re\big\langle B(\omega_t)\psi(t), \psi(t)\big\rangle. \tag{6.6.22}$$

Из теоремы 6.6.3 и неравенства (6.6.22) следует что

$$w'(t) \leq -2\nu w(t) + 2C_B \frac{||f||}{\nu} w(t)$$

и, следовательно, $w(t) \leq w(0) e^{-2(\nu - C_B \frac{||f||}{\nu})t}$, т.е.

$$|\varphi(t, u_1, \omega) - \varphi(t, u_2, \omega)| \leq |u_1 - u_2| e^{-(\nu - C_B \frac{||f||}{\nu})t}$$

при всех $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ и $u_1, u_2 \in I_\omega$. В частности, имеем

$$|u_1 - u_2| \leq |\varphi(t, u_1, \omega) - \varphi(t, u_2, \omega)| e^{(\nu - C_B \frac{||f||}{\nu})t} \tag{6.6.23}$$

для любого $t \in \mathbb{R}_-$ и $u_1, u_2 \in I_\omega$. Так как $|\varphi(t, u_1, \omega) - \varphi(t, u_2, \omega)|$ ограничена на $\mathbb{R}$, то из (6.6.23) следует что $u_1 = u_2$.

Утверждения 2. - 4. вытекают из первого утверждения и теорем 6.6.3 и 2.4.3.

6.6.4. Принцип усреднения для системы Лоренца. Пусть Ω – компактное метрическое пространство и $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическая система на Ω. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(\omega t)x + \varepsilon B(\omega t)(x, x) + \varepsilon f(\omega t), \tag{6.6.24}$$

где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$) – малый параметр. Предположим, что выполнены условия (6.6.11) – (6.6.14) и существуют средние

$$\overline{A} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A(\omega t) dt, \tag{6.6.25}$$

$$\overline{B} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} B(\omega t) dt, \tag{6.6.26}$$

и

$$\overline{f} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(\omega t)dt \tag{6.6.27}$$

равномерно по $\omega \in \Omega$.

Наряду с уравнением (6.6.24) рассмотрим и усредненное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\overline{A}x + \varepsilon\overline{B}(x,x) + \varepsilon\overline{f}. \tag{6.6.28}$$

Если ввести "медленное время"$\tau := \varepsilon t$ ($\varepsilon > 0$), то уравнения (6.6.24) и (6.6.28) можно записать следующим образом

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\omega\frac{\tau}{\varepsilon})x + B(\omega\frac{\tau}{\varepsilon})(x,x) + f(\omega\frac{\tau}{\varepsilon}) \tag{6.6.29}$$

и

$$\frac{dx}{d\tau} = \overline{A}x + \overline{B}(x,x) + \overline{f}. \tag{6.6.30}$$

Замечание 6.6.6. *a. Из условий (6.6.13) и (6.6.26) следует, что*

$$Re\langle\overline{B}(v,u),u\rangle = 0 \tag{6.6.31}$$

при всех $u, v \in E^n$;

b. Если существует $\nu > 0$ такое, что $\alpha(\omega) \geq \nu > 0$ при всех $\omega \in \Omega$, то из неравенства (6.6.11) следует, что

$$Re\langle\overline{A}x,x)\rangle \leq -\nu|x|^2 \tag{6.6.32}$$

при всех $x \in E^n$.

Теорема 6.6.7. *Пусть выполнены перечисленные выше условия, тогда для любых $T > 0$ и $\rho > 0$*

$$\begin{gathered} m(\varepsilon) := \max\{|\varphi(t,x,\omega,\varepsilon) - \overline{\varphi}(t,x,\varepsilon)| : \\ 0 \leq t \leq T/\varepsilon,\ |x| \leq \rho \ \text{ и } \ \omega \in \Omega\} \to 0 \end{gathered} \tag{6.6.33}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varphi(t,x,\omega,\varepsilon)$ ($\overline{\varphi}(t,x,\varepsilon)$) – решение уравнения (6.6.24) (соответственно (6.6.28)), проходящее через точку x при $t = 0$.

Доказательство. Обозначим через $\psi(\tau, x, \omega, \varepsilon)$ ($\overline{\psi}(\tau, x)$) – решение уравнения (6.6.29) (соответственно (6.6.30)), проходящее через точку x при $\tau = 0$. Из первой теоремы Боголюбова (см., например, **[29]**,**[32]**) следует, что отображение

$$\psi : [0, T] \times B[0, \rho] \times \Omega \times [0, \varepsilon_0] \to E^n$$

непрерывно по совокупности переменных. Покажем, что

$$m_1(\varepsilon) := \max\{|\psi(\tau, x, \omega, \varepsilon) - \overline{\psi}(\tau, x)| : \\ \tau \in [0, T],\ |x| \le \rho,\ \omega \in \Omega\} \to 0 \tag{6.6.34}$$

при $\varepsilon \to 0$. Если допустить, что это не так, то найдутся $\tau_n \in [0, T]$, $x_n \in B[0, \rho]$, $\omega_n \in \Omega$, $\varepsilon_n \to 0$ и $m_0 > 0$ такие, что $\tau_n \to \tau_0$, $x_n \to x_0$, $\omega_n \to \omega_o$ и

$$|\psi(\tau_n, x_n, \omega_n, \varepsilon_n) - \overline{\psi}(\tau_n, x_n)| \ge m_0. \tag{6.6.35}$$

Переходя к пределу в неравенстве (6.6.35) и учитывая непрерывность ψ и равенство $\psi(T_0, x_0, \omega_0, 0) = \overline{\psi}(\tau_0, x_0)$, мы получим $0 \ge m_0$. Полученное противоречие доказывает соотношение (6.6.35). Теперь для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $\psi(\tau, x, \omega, \varepsilon) = \varphi(t, x, \omega, \varepsilon)$ и $\overline{\psi}(\tau, x) = \overline{\varphi}(t, x, \varepsilon)$ при всех $x \in E^n, \omega \in \Omega, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\tau \in [0, T]$ и $t = \frac{\tau}{\varepsilon} \in [0, T/\varepsilon]$ и, следовательно, $m(\varepsilon) = m_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

Теорема 6.6.8. *При выполнении перечисленных выше условий имеют место следующие утверждения:*

(1) *уравнение (6.6.30) допускает компактный глобальный аттрактор* $\overline{I} \subset E^n$*;*

(2) *при каждом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *уравнение (6.6.24) допускает компактный глобальный аттрактор* $\{I^\varepsilon_\omega \mid \omega \in \Omega\}$*;*

(3) *множество* $I = \cup\{I^\varepsilon \mid \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ *компактно, где* $I^0 = \overline{I}$ *и* $I^\varepsilon = \cup\{I^\varepsilon_\omega \mid \omega \in \Omega\}$*;*

(4)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(I^\varepsilon_\omega, \overline{I}) = 0 \tag{6.6.36}$$

и, в частности,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta(I^\varepsilon, \overline{I}) = 0.$$

Доказательство. Первые три утверждения теоремы вытекают из теоремы 6.6.3 и замечания 6.6.6. Докажем теперь четвертое утверждение теоремы. Для этого воспользуемся схемами рассуждений из [**42**],[**119**]. Пусть $\lambda > 0$ и $B(\overline{I}, \lambda) = \{x \in E^n \mid \rho(x, \overline{I}) < \lambda\}$. В силу орбитальной устойчивости I (см. теорему 1.3.4) для данного λ существует $\delta = \delta(\lambda) > 0$ (можно считать, что $\delta(\lambda) < \lambda/2$) такое, что

$$\overline{\varphi}(t, B(\overline{I}, \delta)) \subset B(\overline{I}, \lambda/2) \tag{6.6.37}$$

при всех $t \geq 0$. В силу компактности $I = \cup\{I^\varepsilon \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ можно выбрать $\rho > 0$ так, что $I \subset B(0, \rho) = \{x \in E^n \mid |x| < \rho\}$. Так как $\overline{I}$ является глобальным аттрактором системы (6.6.30), то для замкнутого шара $B[0, \rho] := \{x \in E^n | \, |x| \leq \rho\}$ и числа $\delta > 0$ найдутся $T = T(\rho, \delta) > 0$ такое, что

$$\overline{\varphi}(t, B[0, \rho]) \subset B(\overline{I}, \delta/2), \quad t \geq T. \tag{6.6.38}$$

Пусть теперь $x \in B[0, \rho]$, тогда по теореме 6.6.7 для чисел $\rho > 0$ и $T(\rho, \delta) > 0$ найдется $\mu = \mu(\rho, \delta) > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \mu$, $m(\varepsilon) < \lambda/2$ (см. (6.6.33)), т.е.

$$|\varphi(t, x, \omega, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, x)| < \delta/2 \tag{6.6.39}$$

при всех $x \in B[0, \rho]$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0, T/\varepsilon]$ и $0 < \varepsilon \leq \mu$. Согласно (6.6.38) мы имеем $\overline{\varphi}(T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon) \in B(\overline{I}, \delta/2)$ и, следовательно, с учетом (6.6.39), получаем $\varphi(T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon) \in B(\overline{I}, \delta)$. Возьмем теперь в качестве начальной точки $x_1 := \varphi(T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon)$ и повторим для нец проведенные выше рассуждения. С уччтом равенства $\varphi(t, x, \sigma(T/\varepsilon, \omega), \varepsilon) = \varphi(t + T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon)$, мы будем иметь

$$|\varphi(t + T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon) = \overline{\varphi}(t, x_1)| < \delta/2 \tag{6.6.40}$$

при всех $t \in [0, T/\varepsilon]$, $x \in B[0, \rho]$ и $\omega \in \Omega$, где $x_1 = \varphi(T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon)$.

Согласно (6.6.40) мы вновь получим $x_2 := \varphi(2T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon) \in B(\overline{I}, \delta)$ и, следовательно,

$$\varphi(t + T/\varepsilon, x, \omega, \varepsilon) \in B(\overline{I}, \lambda/2 + \delta/2) \subset B(\overline{I}, \lambda).$$

Продолжая этот процесс и далее (в силу равномерности по $|x| \leq \rho$ и $\omega \in \Omega$ оценки (6.6.39) этого возможно), мы получим

$$\varphi(t, x, \omega, \varepsilon) \in B(\overline{I}, \lambda) \tag{6.6.41}$$

при всех $t \ge T/\varepsilon$, $x \in B[0,\rho]$, $\omega \in \Omega$ и $o \le \varepsilon \le \mu$ и, следовательно,

$$\varphi(t, x, \sigma(-t,\omega), \varepsilon) \in B(\overline{I}, \lambda)$$

при всех $t \ge T/\varepsilon$ и $|x| \le \rho$. Так как $I = \cup\{I^\varepsilon \mid 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\} \subseteq B(0,\rho)$, то согласно 2.4.3

$$I^\varepsilon_\omega = \bigcap_{t\ge 0} \overline{\bigcup_{\tau \ge t} \varphi(\tau, B[0,\rho], \sigma(-\tau,\omega), \varepsilon)}$$

и, следовательно, из (6.6.41) имеем $I^\varepsilon_\omega \subset B(\overline{I}, \lambda)$ при всех $\omega \in \Omega$ и $0 < \varepsilon < \mu$. В силу произвольности выбора λ из последнего включения получаем равенство (6.6.36). Теорема полностью доказана.

Глава 7

Полунепрерывность сверху по параметру аттракторов неавтономных динамических систем с малым параметром

7.1. Максимальные компактные инвариантные множества

Пусть W – полное метрическое пространство, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, Ω – компактное метрическое пространство, $(\Omega, \mathbb{T}, \sigma)$ – групповая динамическая система на Ω и $\langle W, \varphi, (\Omega, \mathbb{T}, \sigma)\rangle$ – непрерывный коцикл (или просто φ) на $(\Omega, \mathbb{T}, \sigma)$ со слоем W, $X := W \times \Omega$, $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$ полугрупповая динамическая система на X определенная равенством $\pi = (\varphi, \sigma)$, т.е. $\pi^t x = (\varphi(t, u, \omega), \sigma(t, \omega))$ для любых $t \in \mathbb{T}_+$ и $x = (u, \omega) \in X$. Пусть $\langle (X, \mathbb{T}_+, \pi), (\Omega, \mathbb{T}, \sigma), h\rangle$ неавтономная динамическая система, где $h = pr_2 : X \mapsto \Omega$.

Напомним, что семейство непустых компактных подмножеств $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ ($I_\omega \subset W$) из W называется максимальным компактным инвариантным множеством коцикла φ, если выполнены следующие условия:

(1) $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ, т.е. $\varphi(t, I_\omega, \omega) = I_{\omega t}$ для любого $\omega \in \Omega$ и $t \in \mathbb{T}_+$;
(2) $I = \bigcup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ относительно компактно;
(3) $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ максимально, т.е. если семейство $\{I'_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ относительно компактно и инвариантно относительно коцикла φ, то $I'_\omega \subseteq I_\omega$ для любого $\omega \in \Omega$.

Лемма 7.1.1. *Семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ тогда и только тогда, когда множество $J = \bigcup\{J_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ ($J_\omega = I_\omega \times \{\omega\}$) является инвариантным множеством динамической системы $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$.*

Доказательство. Пусть семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ, $J = \bigcup\{J_\omega | \omega \in \Omega\}$ и $J_\omega = I_\omega \times \{\omega\}$). Тогда

$$\pi^t J = \bigcup\{\pi^t J_\omega \mid \omega \in \Omega\} = \bigcup\{(\varphi(t, I_\omega, \omega), \omega t) \mid \omega \in \Omega\},$$
$$J = \bigcup\{J_{\omega t} \mid \omega \in \Omega\} = \bigcup\{I_{\omega t} \times \{\omega t\} \mid \omega \in \Omega\} \qquad (7.1.1)$$

для любого $t \in \mathbb{T}_+$. Из равенств (7.1.1) следует что семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ тогда и только тогда, когда J является инвариантным множеством динамической системы $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$.

Теорема 7.1.2. *Пусть $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ максимальное компактное инвариантное множество коцикла φ, тогда множество $I = \cup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ замкнуто.*

Доказательство. Заметим, что множество $J = \bigcup\{J_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ $(J_\omega = I_\omega \times \{\omega\})$ относительно компактно и согласно лемме 7.1.1 оно инвариантно. Пусть $K = \overline{J}$, тогда K есть компакт. Покажем теперь, что K инвариантно. В самом деле, если $x \in K$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset J$ такая, что $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Так как $x_n \in J = \pi^t J$ для любого $t \in \mathbb{T}_+$, то для $t \in \mathbb{T}_+$ найдется $\overline{x}_n \in J$ такое что $x_n = \pi^t \overline{x}_n$. Так как J относительно компактно, то можно считать, что последовательность $\{\overline{x}_n\}$ является сходящейся. Обозначим через $\overline{x} := \lim_{n \to +\infty} \overline{x}_n$, тогда $\overline{x} \in \overline{J}, x = \pi^t \overline{x}$ и, следовательно, $x \in \pi^t \overline{J}$ для любого $t \in \mathbb{T}_+$, т.е. $\overline{J} = \pi^t \overline{J}$.

Пусть $I' = pr_1 K$, тогда мы имеем $I' = \bigcup\{I'_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, где $I'_\omega = \{u \in W \mid (u, \omega) \in K\}$ и $K_\omega = I'_\omega \times \{\omega\}$. Так как множество K инвариантно, то согласно лемме 7.1.1 семейство $\{I'_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ также инвариантно относительно коцикла φ. Множество I', как непрерывный образ компакта K, также является компактом. Согласно максимальности семейства $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ мы имеем $I'_\omega \subseteq I_\omega$ для любого $\omega \in \Omega$ и, следовательно, $I' \subseteq I$.

С другой стороны, $I \subseteq pr_1 \overline{J} = I'$ и, следовательно, $I' = I$. Таким образом множество I является компактом. Теорема доказана.

Семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ ($I_\omega \subset W$) непустых компактных подмножеств W называется (см., например, [**156**] и [**200**]) компактным оттягивающим назад аттрактором (равномерным аттрактором) коцикла φ, если выполнены следующие условия:

(1) множество $I = \bigcup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ относительно компактно;

(2) семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ инвариантно относительно коцикла φ, т.е. $\varphi(t, I_\omega, \omega) = I_{\sigma(t,\omega)}$ для любых $t \in \mathbb{T}_+$ и $\omega \in \Omega$;

(3) для любых $\omega \in \Omega$ (равномерно по $\omega \in \Omega$) и $K \in C(W)$

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi(t, K, \omega_{-t}), I_\omega) = 0, \tag{7.1.2}$$

где $\beta(A, B) := \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}$ – полуметрика Хаусдорфа.

Напомним, что семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}(I_\omega \subset W)$ непустых компактных подмножеств называется компактным глобальным аттрактором коцикла φ, если выполнены следующие условия:

(1) семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ компактно и инвариантно;

(2) для любого $K \in C(W)$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(\varphi(t, K, \omega), I) = 0, \tag{7.1.3}$$

где $I = \bigcup\{I_\omega | \omega \in \Omega\}$.

Теорема 7.1.3. *Семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ непустых компактных подмножеств ($I_\omega \subset W$) является максимальным компактным инвариантным множеством коцикла φ, если выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) *семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является компактным оттягивающим назад аттрактором коцикла φ;*

(2) *семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является компактным глобальным аттрактором коцикла φ.*

Доказательство. 1. Пусть семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является компактным оттягивающим назад аттрактором. Если семейство $\{I'_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является компактным и инвариантным относительно коцикла φ, тогда имеем

$$\beta(I'_\omega, I_\omega) = \beta(\varphi(t, I'_{\omega_{-t}}, \omega_{-t}), I_\omega) \le \beta(\varphi(t, K, \omega_{-t}), I_\omega) \to 0$$

когда $t \to +\infty$, где $K = \overline{\bigcup\{I'_\omega \mid \omega \in \Omega\}}$ и, следовательно, $I'_\omega \subseteq I_\omega$ для любого $\omega \in \Omega$, т.е. $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ максимально.

2. Если семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является компактным глобальным аттрактором коцикла φ, то согласно теореме 2.7.3 оно является равномерным оттягивающим назад компактным аттрактором и, следовательно, семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является максимальным компактным инвариантным множеством коцикла φ.

Замечание 7.1.4. *Семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является максимальным компактным инвариантным множеством коцикла φ тогда и только тогда, когда множество $J = \cup\{J_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, где $J_\omega = I_\omega \times \{\omega\}$, является компактным инвариантным множеством динамической системы $(X, \mathbb{T}, \pi)$.*

7.2. Полунепрерывность сверху

Лемма 7.2.1. *Если семейство $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ является максимальным компактным инвариантным множеством коцикла φ, то функция $F : \Omega \mapsto C(W)$, определенная равенством $F(\omega) = I_\omega$, полунепрерывна сверху, т.е. для каждого $\omega_0 \in \Omega$*

$$\beta(F(\omega_k), F(\omega_0)) \to 0,$$

при $\rho(\omega_k, \omega_0) \to 0$.

Доказательство. Пусть $\omega_0 \in \Omega, \omega_k \to \omega_0$, и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое что

$$\beta(F(\omega_k), F(\omega_0)) \geq \varepsilon_0,$$

тогда найдется $x_k \in I_{\omega_k}$, для которого

$$\rho(x_k, I_{\omega_0}) \geq \varepsilon_0. \tag{7.2.1}$$

Так как I компактно, то, не умаляя общности рассуждений, можно считать последовательность $\{x_k\}$ сходящейся к некоторой точке x и, следовательно, существует $\omega_0 \in \Omega$ такое что $x \in I_{\omega_0} \subset I$.

С другой стороны, согласно неравенству (7.2.1) $x \notin I_{\omega_0}$. Полученное противоречие показывает, что функция F полунепрерывна сверху.

Замечание 7.2.2. *Лемма 7.2.1 обобщает одно утверждение из* [**178**].

Лемма 7.2.3. *Пусть* Λ *– компактное метрическое пространство и отображение* $\varphi : \mathbb{T}_+ \times W \times \Lambda \times \Omega \mapsto W$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(1) φ *непрерывно;*
(2) *для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *функция* $\varphi_\lambda = \varphi(\cdot,\cdot,\lambda,\cdot) : \mathbb{T}_+ \times W \times \Omega \mapsto W$ *является коциклом над* $(\Omega, \mathbb{T}, \sigma)$ *со слоем* W*;*
(3) *коцикл* φ_λ *допускает оттягивающий назад аттрактор* $\{I^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$*;*
(4) *множество* $\cup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *относительно компактно, где* $I^\lambda = \cup\{I^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega\}$*,*

тогда имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0, \omega \to \omega_0} \beta(I^\lambda_\omega, I^{\lambda_0}_{\omega_0}) = 0 \tag{7.2.2}$$

для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$ *и* $\omega_0 \in \Omega$ *и*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \beta(I_\lambda, I_{\lambda_0}) = 0 \tag{7.2.3}$$

для любого $\lambda_0 \in \Lambda$*.*

Доказательство. Пусть $Y = \Lambda \times \Omega$ и $\mu : \mathbb{T} \times Y \mapsto Y$ – отображение, определенное при помощи равенства $\mu(t,(\lambda,\omega)) = (\lambda, \sigma(t,\omega))$ для любых $t \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \Omega$. Легко заметить что тройка $(Y, \mathbb{T}, \mu)$ является групповой динамической системой на Y и $\tilde{\varphi} : \mathbb{T}_+ \times W \times Y \mapsto W$ $(\tilde{\varphi}(t,x,(\lambda,\omega)) = \varphi(t,x,\lambda,\omega))$ является коциклом над $(Y, \mathbb{T}, \mu)$ со слоем W. В условиях леммы 7.2.3 коцикл $\tilde{\varphi}$ допускает компактное максимальное инвариантное множество $\{I_y \mid y \in Y\}$ (где $I_y = I_{(\lambda,\omega)} = I^\lambda_\omega$) так как

$$\cup\{I_y \mid y \in Y\} = \cup\{I^\lambda_\omega \mid \lambda \in \Lambda, \omega \in \Omega\} = \cup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Согласно лемме 7.2.1 функция $F : Y \mapsto C(W)$, определенная при помощи равенства $F(\lambda,\omega) = I^\lambda_\omega$, является полунепрерывной сверху и, следовательно, имеет место равенство (7.2.2).

Если допустить, что равенство (7.2.3) не имеет места, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda_k \to \lambda_0$, $\omega_k \in \Omega$ и $x_k \in I^{\lambda_k}_{\omega_k}$ такие, что

$$\rho(x_k, I_{\lambda_0}) \geq \varepsilon_0. \tag{7.2.4}$$

Не умаляя общности рассуждений, мы можем считать что $\omega_k \to \omega_0, x_k \to x_0$ так как множества Ω и $\bigcup\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ компактны. Согласно неравенству (7.2.4) мы имеем

$$\rho(x_0, I_{\lambda_0}) \geq \varepsilon_0.$$

С другой стороны $x_k \in I_{\omega_k}^{\lambda_k}$ и из равенства (7.2.3) имеем

$$x_0 \in I_{\omega_0}^{\lambda_0} \subset I_{\lambda_0}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_0 \leq \rho(x_0, I_{\lambda_0}) \leq \beta(I_{\omega_0}^{\lambda_0}, I_{\lambda_0}) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает равенство (7.2.3).

Следствие 7.2.4. *В условиях леммы 7.2.3 для каждого $\omega \in \Omega$ имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \beta(I_\omega^\lambda, I_\omega^{\lambda_0}) = 0.$$

Лемма 7.2.5. *Пусть выполнены условия леммы 7.2.3 и*

5. *для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$ отображение $F : \Omega \mapsto C(W)$, определенное равенством $F(\omega) = I_\omega^{\lambda_0}$ непрерывно, т.е. $\alpha(F(\omega), F(\omega_0)) \to 0$ при $\omega \to \omega_0$ для каждого $\omega_0 \in \Omega$, где α – метрика Хаусдорфа, т.е.*

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(I_\omega^\lambda, I_\omega^{\lambda_0}) = 0. \tag{7.2.5}$$

Доказательство. Предположим что равенство (7.2.5) не имеет места, тогда, с одной стороны, найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda_k \to \lambda_0$, $\omega_k \in \Omega$ такие что

$$\beta(I_{\omega_k}^{\lambda_k}, I_{\omega_k}^{\lambda_0}) \geq \varepsilon_0. \tag{7.2.6}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \quad &\leq \beta(I_{\omega_k}^{\lambda_k}, I_{\omega_k}^{\lambda_0}) \leq \beta(I_{\omega_k}^{\lambda_k}, I_{\omega_0}^{\lambda_0}) + \beta(I_{\omega_0}^{\lambda_0}, I_{\omega_k}^{\lambda_0}) \\ &\leq \quad \beta(I_{\omega_k}^{\lambda_k}, I_{\omega_0}^{\lambda_0}) + \alpha(I_{\omega_k}^{\lambda_0}, I_{\omega_0}^{\lambda_0}). \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

Согласно лемме 7.2.3 (см. равенство (7.2.2)) имеет место равенство

$$\lim_{k \to +\infty} \beta(I_{\omega_k}^{\lambda_k}, I_{\omega_0}^{\lambda_0}) = 0. \tag{7.2.8}$$

Согласно условию 5. леммы имеем

$$\lim_{k\to+\infty}\alpha(I^{\lambda_0}_{\omega_k}, I^{\lambda_0}_{\omega_0}) = 0. \tag{7.2.9}$$

Из (7.2.7) - (7.2.9), переходя к пределу, когда $k\to+\infty$, получаем $\varepsilon_0\le 0$. Полученное противоречие показывает, что имеет место равенство (7.2.5).

Семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется коллективно компактно диссипативным (равномерно коллективно компактно диссипативным), если существует непустое компактное множество $K\subseteq W$ такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\{\beta(U_\lambda(t,\omega)M,K)\mid \omega\in\Omega\}=0 \qquad \forall\ \ \lambda\in\Lambda \tag{7.2.10}$$

$$(\text{соотв. } \lim_{t\to+\infty}\sup\{\beta(U_\lambda(t,\omega)M,K)\mid \omega\in\Omega,\ \lambda\in\Lambda\}=0)$$

для любого $M\in C(W)$, где $U_\lambda(t,\omega)=\varphi_\lambda(t,\cdot,\omega)$.

Лемма 7.2.6. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ коллективно компактно диссипативно;*

(2) (a) *каждый коцикл φ_λ $(\lambda\in\Lambda)$ компактно диссипативен;*

(b) *множество $\cup\{I^\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ компактно, где I^λ – центр Левинсона коцикла φ_λ.*

Доказательство. Покажем, что из 1. следует 2.. Согласно равенству (7.2.10) каждый коцикл φ_λ $(\lambda\in\Lambda)$ компактно диссипативен и $\cup\{I^\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subseteq K$.

Предположим, что условие 2. выполнено. Положим $K=\overline{\cup\{I^\lambda|\lambda\in\Lambda\}}$, тогда имеет место равенство (7.2.10).

Пусть $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – семейство коциклов над $(\Omega,\mathbb{T},\sigma)$ со слоем W и $\tilde\Omega=\Omega\times\Lambda$. Определим на $\tilde\Omega$ динамическую систему $(\tilde\Omega,\mathbb{T},\tilde\sigma)$ равенством $\tilde\sigma(t,(\omega,\lambda))=(\sigma(t,\omega),\lambda)$ для любых $t\in\mathbb{T},\omega\in\Omega$ и $\lambda\in\Lambda$. Семейством коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ порождается коцикл $\tilde\varphi$ на $(\tilde\Omega,\mathbb{T},\tilde\sigma)$ со слоем W, определенный следующим образом: $\tilde\varphi(t,w,(\omega,\lambda))=\varphi_\lambda(t,w,\omega)$ для любых $t\in\mathbb{T}_+,w\in W,\omega\in\Omega$ и $\lambda\in\Lambda$.

Лемма 7.2.7. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ равномерно коллективно диссипативно;*
(2) *коцикл $\tilde{\varphi}$ компактно диссипативен.*

Доказательство. Это утверждение следует из равенства

$$\sup\{\beta(\tilde{U}(t,\tilde{\omega})M,K)\mid\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}\}$$

$$=\sup\{\beta(U_\lambda(t,\omega)M,K)\mid\omega\in\Omega,\lambda\in\Lambda\},$$

где $\tilde{U}(t,\tilde{\omega})=\tilde{\varphi}(t,\cdot,\tilde{\omega})$, и соответствующих определений.

Теорема 7.2.8. *Пусть Λ – компактное метрическое пространство и $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ семейство равномерно коллективно компактно диссипативных коциклов над $(\Omega,\mathbb{T},\sigma)$ со слоем W, тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *каждый коцикл φ_λ $(\lambda\in\Lambda)$ компактно диссипативен;*
(2) *семейство компактов $\{I_\omega^\lambda\mid\omega\in\Omega\}=I^\lambda$ является центром Левинсона (компактный глобальный аттрактор) коцикла φ_λ, где $I_\omega^\lambda=I_{(\omega,\lambda)}$ и $I=\{I_{(\omega,\lambda)}\mid(\omega,\lambda)\in\tilde{\Omega}\}$ – центр Левинсона коцикла $\tilde{\varphi}$;*
(3) *множество $\cup\{I^\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ компактно.*

Доказательство. Рассмотрим коцикл $\tilde{\varphi}$ порожденный семейством коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Согласно лемме 7.2.7 коцикл $\tilde{\varphi}$ компактно диссипативен и по теореме 2.7.3 имеют место следующие утверждения:

(1) $I_{\tilde{\omega}}=\Omega_{\tilde{\omega}}(K)\neq\emptyset$, компактно, $I_{\tilde{\omega}}\subseteq K$ и
$$\lim_{t\to+\infty}\beta(\tilde{U}(t,\tilde{\omega}_{-t})M,I_{\tilde{\omega}})=0 \tag{7.2.11}$$
для любого $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$, где
$$\Omega_{\tilde{\omega}}(K)=\bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcup_{\tau\geq t}\tilde{U}(\tau,\tilde{\omega}_{-\tau})K}, \tag{7.2.12}$$
$\tilde{\omega}_{-\tau}=\tilde{\sigma}(-\tau,\tilde{\omega})$ и K – непустой компакт, фигурирующий в равенстве (7.2.10);
(2) $\tilde{U}(t,\tilde{\omega})I_{\tilde{\omega}}=I_{\tilde{\omega}t}$ для любых $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ и $t\in\mathbb{T}_+$;
(3) $I=\cup\{I_{\tilde{\omega}}\mid\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}\}$ компактно.

Для завершения доказательства теоремы заметим, что из коллективной компактной диссипативности семейства коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ вытекает компактная диссипативность каждого коцикла φ_λ. Пусть $\{I^\lambda_\omega \mid \omega\in\Omega\}=I^\lambda$ – центр Левинсона коцикла φ_λ, тогда согласно теореме 2.7.3 имеет место равенство

$$I^\lambda_\omega=\bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcup_{\tau\geq t}U_\lambda(\tau,\omega^{-\tau})K}. \tag{7.2.13}$$

Из равенств (7.2.12) и (7.2.13) следует, что $I^\lambda_\omega=\Omega_{\tilde\omega}(K)=I_{\tilde\omega}$ и, следовательно, $I^\lambda=\cup\{I^\lambda_\omega \mid \omega\in\Omega\}\subseteq\cup\{I^\lambda_\omega \mid \omega\in\Omega,\lambda\in\Lambda\}=I$ для любого $\lambda\in\Lambda$. Таким образом $\bigcup\{I^\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}\subseteq I$ и, следовательно, оно компактно. Теорема доказана.

Семейство $\{(X,\mathbb{T}_+,\pi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ динамических систем называется коллективно (равномерно коллективно) асимптотически компактным, если для любого ограниченного положительно инвариантного множества $M\subseteq X$ существует непустой компакт K такой, что

$$\lim_{t\to+\infty}\beta(\pi^t_\lambda M,K)=0 \qquad \forall\ \lambda\in\Lambda \tag{7.2.14}$$

$$(\lim_{t\to+\infty}\sup_{\lambda\in\Lambda}\beta(\pi^t_\lambda M,K)=0).$$

Ограниченное множество $K\subset X$ называется поглощающим (равномерно поглощающим) для семейства $\{(X,\mathbb{T}_+,\pi_\lambda)\ :\ \lambda\in\Lambda\}$ динамических систем, если для любого ограниченного подмножества $B\subset X$ существует число $L=L(\lambda,B)>0$ $\quad(L=L(B)>0)$ такое, что $\pi^t_\lambda B\subseteq K$ для любых $t\geq L(\lambda,B)$ $\quad(t\geq L(B))$ и $\lambda\in\Lambda$.

Теорема 7.2.9. *Пусть Λ – компактное метрическое пространство. Если семейство $\{(X,\mathbb{T}_+,\pi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ динамических систем допускает ограниченное поглощающее множество $M\subset X$ и является коллективно асимптотически компактным, то $\{(X,\mathbb{T}_+,\pi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ допускает компактный глобальный аттрактор, т.е. существует непустое компактное множество $K\subset X$, такое что*

$$\lim_{t\to+\infty}\beta(\pi^t_\lambda B,K)=0 \tag{7.2.15}$$

для любого $\lambda\in\Lambda$ и любого ограниченного подмножества $B\subset X$.

Доказательство. Пусть семейство $\{(X, \mathbb{T}_+, \pi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ динамических систем коллективно асимптотически компактно и ограниченное множество M является ее поглощающим множеством. Согласно следствию 1.7.6 и теореме 1.2.5 множество $K = \Omega(M)$ непусто, компактно и имеет место равенство (7.2.15). Теорема доказана.

Теорема 7.2.10. *Пусть Λ – полное компактное метрическое пространство. Если семейство $\{(X, \mathbb{T}_+, \pi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ автономных динамических систем допускает равномерно поглощающее ограниченное множество $M \subset X$ и является равномерно коллективно асимптотически компактным, тогда $\{(X, \mathbb{T}_+, \pi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ допускает равномерный компактный глобальный аттрактор, т.е. существует непустое компактное множество $K \subset X$, такое что*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \beta(\pi_\lambda^t B, K) = 0 \tag{7.2.16}$$

для любого ограниченного подмножества $B \subset X$.

Доказательство. Рассмотрим динамическую систему $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ на $\tilde{X} = X \times \Lambda$, определенную равенством $\tilde{\pi}(t,(x,\lambda))= (\pi_\lambda(t, x), \lambda)$ для любых $t \in \mathbb{T}_+, x \in X$ и $\lambda \in \Lambda$. Заметим, что в условиях теоремы 7.2.10 ограниченное множество $K \times \Lambda$ является поглощающим для динамической системы $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$, если множество K является равномерно поглощающим для семейства $\{(X, \mathbb{T}_+, \pi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ асимптотически компактно. Согласно следствию 1.7.6 и теореме 1.2.5 динамическая система $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ допускает компактный глобальный аттрактор $\tilde{K} \subset \tilde{X} = X \times \Lambda$. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что множество $K = pr_1 \tilde{K} \subset X$ компактно и

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \beta(\pi_\lambda^t B, K) \le \beta(\tilde{\pi}_\lambda^t B, K_0) \to 0,$$

когда $t \to +\infty$, где $K_0 = K \times \Lambda \supset \tilde{K}$ для любого ограниченного подмножества $B \subset X$.

Пусть φ коцикл на $(\Omega, \mathbb{T}, \sigma)$ со слоем W и $(X, \mathbb{T}_+, \pi)$ полугрупповая динамическая система (косое произведение) на X, где $X = W \times \Omega$ и $\pi(t, (w, \omega)) = (\varphi(t, w, \omega), \omega t)$ для любых $t \in \mathbb{T}_+, w \in W$ и $\omega \in \Omega$.

Коцикл φ назовем асимптотически компактным (семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ коллективно асимптотически компактно), если косое произведение $(X,\mathbb{T}_+,\pi)$, соответствующее коциклу φ (семейство косых произведений $\{(X,\mathbb{T}_+,\pi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, соответствующее семейству коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$) асимптотически компактно.

Теорема 7.2.11. *Пусть Ω и Λ – компактные метрические пространства, W – банахово пространство и $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ семейство коциклов на $(\Omega,\mathbb{T},\sigma)$ со слоем W. Если существует $r>0$ и функция $V_\lambda : W\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ для каждого $\lambda\in\Lambda$, обладающая следующими свойствами:*

(1) *семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ коллективно асимптотически компактно;*
(2) *семейство функций $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ коллективно ограничено на ограниченных множествах и для любого $c\in\mathbb{R}_+$ множество $\{x\in X_r \mid V_\lambda(x)\le c\}$ равномерно ограничено;*
(3) *$V'_\lambda(w,\omega)\le -c(|w|)$ для любых $w\in W_r=\{w\in W| \quad |w|\ge r\}, \omega\in\Omega$ и $\lambda\in\Lambda$, где $c:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ положительна на $[r,+\infty)$, $V'_\lambda(w,\omega)=\limsup\limits_{t\to 0+} t^{-1}[V_\lambda(\varphi_\lambda(t,w,\omega),\omega t)-V_\lambda(w,\omega)]$, если $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$, и $V'_\lambda(w,\omega)=V_\lambda(\varphi_\lambda(1,w,\omega),\omega 1)-V_\lambda(w,\omega)$, если $\mathbb{T}=\mathbb{Z}_+$.*

Тогда каждый коцикл φ_λ $(\lambda\in\Lambda)$ допускает равномерный компактный глобальный аттрактор I^λ $(\lambda\in\Lambda)$ и множество $\cup\{I^\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ компактно.

Доказательство. Пусть $X=W\times\Omega$ и $(X,\mathbb{T},\pi_\lambda)$ – косое произведение, порожденное коциклом φ_λ, тогда (X,h,Ω), где $h=pr_2 : X\to\Omega$ – тривиальное расслоение со слоем W. В условиях теоремы 7.2.11 согласно следствию 1.7.6 и теореме 1.2.5 неавтономная динамическая система $\langle(X,\mathbb{T}_+,\pi_\lambda),(\Omega,\mathbb{T},\sigma),h\rangle$ допускает компактный глобальный аттрактор J^λ. По теореме 2.7.3 коцикл φ_λ допускает компактный глобальный аттрактор $I^\lambda=\{I^\lambda_\omega \mid \omega\in\Omega\}$, где $I^\lambda_\omega=pr_1 J^\lambda_\omega$ и $J^\lambda_\omega=pr_2^{-1}(\omega)\bigcap J^\lambda$.

Пусть $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Lambda$, $(\tilde{\Omega}, \mathbb{T}, \tilde{\sigma})$ – динамическая система на $\tilde{\Omega}$, определенная равенством $\tilde{\sigma}(t, (\omega, \lambda)) = (\sigma(t, \omega), \lambda)$ (для любых $t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$ и $\lambda \in \Lambda$), $\tilde{X} = W \times \tilde{\Omega}$ и $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ – динамическая система, определенная равенством $\tilde{\pi}(t, (w, \tilde{\omega})) = (\pi_\lambda(t, w), (\omega t, \lambda))$ для любых $\tilde{\omega} = (\omega, \lambda) \in \tilde{\Omega} = \Omega \times \Lambda$. Заметим, что тройка $(\tilde{X}, h, \Omega)$, где $h = pr_2 : \tilde{X} \to \tilde{\Omega}$ – тривиальное расслоение со слоем W, $\langle (\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ и $(\tilde{\Omega}, \mathbb{T}, \tilde{\sigma}), h \rangle$ является неавтономной динамической системой. Функция $\tilde{V} : \tilde{X}_r = W_r \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}_+$, определенная равенством $\tilde{V}(\tilde{x}) = V_\lambda(w, \omega)$ для любых $\tilde{x} = (w, (\omega, \lambda)) \in \tilde{X}_r$ в условиях теоремы **??** удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1.5 и, следовательно, динамическая система $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ допускает компактный глобальный аттрактор. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что если динамическая система $(\tilde{X}, \mathbb{T}_+, \tilde{\pi})$ допускает компактный глобальный аттрактор $\tilde{J}$, то семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ равномерно коллективно компактно диссипативно и согласно теореме 7.2.9 множество $I = \bigcup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ компактно, где $I^\lambda = \{I^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ – компактный глобальный аттрактор коцикла φ_λ. Теорема доказана.

7.3. Связность

Напомним, что пространство W обладает свойством (S), если для любого компакта $K \in C(W)$ существует компактное связное множество $V \in C(W)$ такое, что $K \subseteq V$.

Для каждого $\omega \in \Omega$ и $M \subseteq W$ пусть

$$\Omega_\omega(M) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \varphi(\tau, M, \omega^{-\tau})}.$$

Лемма 7.3.1. *Пусть коцикл φ допускает компактный оттягивающий назад аттрактор $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) $\emptyset \neq \Omega_\omega(M) \subseteq I_\omega$ *для любого* $M \in C(W)$ *и* $\omega \in \Omega$*;*
(2) *семейство* $\{\Omega_\omega(M) \mid \omega \in \Omega\}$ *компактно и инвариантно относительно* φ *для произвольного* $M \in C(W)$;
(3) *если* $I = \bigcup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\} \subseteq M$, *то для каждого* $\omega \in \Omega$ *имеет место включение* $I_\omega \subseteq \Omega_\omega(M)$.

Доказательство. Первые два утверждения непосредственно следуют из определения компактного оттягивающего назад аттрактора и равенств (7.1.2)-(7.1.3). Если I является подмножеством M, то

$$I_\omega = \varphi(t, I_{\omega^{-t}}, \omega^{-t}) \subseteq \varphi(t, I, \omega^{-t}) \subseteq \varphi(t, M, \omega^{-t}) \qquad (7.3.1)$$

и, согласно равенству (7.1.2), имеем $I_\omega \subseteq \Omega_\omega(M)$ для любого $\omega \in \Omega$.

Теорема 7.3.2. *Пусть W обладает свойством (S) и коцикл φ допускает компактный оттягивающий назад аттрактор $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, тогда:*

(1) *множество I_ω связно для каждого $\omega \in \Omega$;*
(2) *если пространство Ω связно, то и множество $I = \bigcup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ также связно.*

Доказательство. 1. Так как имеет место равенство (7.1.2) и пространство W обладает свойством (S), то существует связный компакт $V \in C(W)$ такой, что $I \subseteq V$ и для любого $\omega \in \Omega$

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\varphi(t, V, \omega^{-t}), I_\omega) = 0. \qquad (7.3.2)$$

Покажем, что множество I_ω связно. Если допустить, что это не так, то существуют $A_1, A_2 \neq \emptyset$, замкнутые и $A_1 \bigsqcup A_2 = I_\omega$. Пусть $0 < \varepsilon_0 < d(A_1, A_2)$ и $L = L(\varepsilon_0) > 0$ такие, что для любых $t \geq L(\varepsilon_0)$

$$\beta(\varphi(t, V, \omega^{-t}), I_\omega) < \frac{\varepsilon_0}{3}. \qquad (7.3.3)$$

Заметим, что множество $\varphi(t, V, \omega^{-t})$ связно, и поэтому, согласно включению (7.3.1) и равенству (7.3.3), имеем

$$\varphi(t, V, \omega^{-t}) \cap (W \setminus [B(A_1, \frac{\varepsilon_0}{3}) \cup B(A_2, \frac{\varepsilon_0}{3})]) \neq \emptyset$$

для любых $t \geq L(\varepsilon_0)$ и $\omega \in \Omega$, где $B(A, \varepsilon) = \{u \in W \mid \rho(u, A) < \varepsilon\}$. Тогда найдутся последовательности $t_n \to +\infty$ и $u_n \in W$ такие, что

$$u_n \in \varphi(t_n, V, \omega^{-t_n}) \cap (W \setminus [B(A_1, \frac{\varepsilon_0}{3}) \cup B(A_2, \frac{\varepsilon_0}{3})]). \qquad (7.3.4)$$

Согласно равенству (7.3.2) последовательность $\{u_n\}$ можно считать сходящейся. Обозначим через $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, тогда согласно лемме 2.7.1 $u \in \Omega_\omega(V)$. Так как $I \subseteq V$, то с одной стороны согласно лемме 2.7.1, имеем $u \in \Omega_\omega(V) \subseteq I_\omega \subseteq I$. С другой стороны, согласно (7.3.4) имеем $u \notin B(A_1, \frac{\varepsilon_0}{3}) \cup B(A_2, \frac{\varepsilon_0}{3})$. Полученное противоречие доказывает связность множества I_ω.

2. Пусть Ω – компактное связное пространство. Согласно лемме 2.7.1 функция $F : \Omega \mapsto C(W)$, определенная равенством $F(\omega) = I_\omega$, полунепрерывна сверху и согласно следствию 1.8.13 [**132**] (см. также лемму 3.1 из [**254**]) множество $I = \cup\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\} = F(\Omega)$ связно.

Следствие 7.3.3. *Пусть W обладает свойством (S) и коцикл φ допускает компактный глобальный аттрактор $\{I_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, тогда:*

(1) *множество I_ω связно при любом $\omega \in \Omega$;*
(2) *если пространство Ω связно, то множество $I = \cup\{I_\omega|\omega \in \Omega\}$ также связно.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теорем 7.1.3, 7.3.2 и леммы 7.2.1.

7.4. Квазиоднородные системы

Пусть E и F – конечномерные банаховы пространства. Напомним, что функция $f \in C(E \times F, E)$ называется однородной порядка m по переменой $u \in E$, если имеет место равенство $f(\lambda u, \omega) = \lambda^m f(u, \omega)$ для любых $\lambda > 0, u \in E$ и $\omega \in F$.

Теорема 7.4.1. *Пусть $f \in C^1(E, E)$, $\Phi \in C^1(F, F)$, $\Omega \subseteq F$ компактное инвариантное множество динамической системы*

$$\omega' = \Phi(\omega), \tag{7.4.1}$$

функция f однородна порядка $m > 1$ и нулевое решение уравнения

$$u' = f(u) \tag{7.4.2}$$

равномерно асимптотически устойчиво. Если $F \in C^1(E \times F, E)$ и

$$|F(u, \omega)| \leq c|u|^m$$

для любых $|u| \geq r$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* r *и* c – *некоторые положительные числа, то существует положительное число* λ_0, *такое что для любого* $\lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]$ *имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество* $I_\omega^\lambda := \{u \in E \mid \sup\{|\varphi_\lambda(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ *непусто, компактно и связно для каждого* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi_\lambda(t,u,\omega)$ – *единственное решение уравнения*

$$u' = f(u) + \lambda F(u, \omega t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi_\lambda(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi_\lambda(t, I_\omega^\lambda, \omega) = I_{\sigma(t,\omega)}^\lambda$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$;

(3) *множество* $I^\lambda = \cup\{I_\omega^\lambda \mid \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t, M, \omega_{-t}), I_\omega^\lambda) = 0 \tag{7.4.3}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t, M, \omega), I^\lambda) = 0$$

каковы бы ни были $\lambda \in \Lambda$, $\omega \in \Omega$ *и ограниченное множество* $M \subseteq E$;

(5) *множество* $\cup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *компактно;*

(6) *имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(I_\omega^\lambda, 0) = 0.$$

Доказательство. В условиях теоремы 7.4.1, согласно теореме 5.7.2, равенством

$$V(u) = \int_0^{+\infty} |\pi(t,u)|^k dt,$$

где $\pi(t,u)$ – решение уравнения (7.4.2) с условием $\pi(0,u) = u$, определяется непрерывно дифференцируемая функция $V : E \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:

a. $V(\mu u) = \mu^{k-m+1} V(u)$ для любых $\mu \geq 0$ и $u \in E$;

b. существуют положительные числа α и β такие что $\alpha |u|^{k-m+1} \leq V(u) \leq \beta |u|^{k-m+1}$ для всех $u \in E$;

c. $V'(u) = DV(u) f(u) = -|u|^k$ для любого $u \in E$, где $DV(u)$ производная Фреше функции V в точке u.

Определим теперь функцию $\mathcal{V} : X \to \mathbb{R}_+$ $(X := E \times \Omega)$ следующим образом: $\mathcal{V}(u,\omega) := V(u)$ для любых $(u,\omega) \in X$. Заметим, что

$$\mathcal{V}'(u,\omega) := \frac{d}{dt}V(\varphi_\lambda(t,u,\omega))|_{t=0} = -|u|^k + DV(u)\lambda F(u,\omega)$$

и существует $\lambda_0 > 0$ такое, что имеет место неравенство

$$\mathcal{V}'(u,\omega) \le -\nu|u|^k$$

при любых $\omega \in \Omega$ и $|u| \ge r$, где $\nu = 1 - \lambda_0 cL > 0$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 7.2.11 и лемму 7.2.5.

Теорема 7.4.2. *Пусть* $f \in C^1(E \times F, E)$, $\Phi \in C^1(F)$, $\Omega \subseteq F$ *– компактное инвариантное множество динамической системы (7.4.1), функция* f *однородна порядка* $m = 1$ *по переменной* $u \in E$ *и нулевое решение уравнения*

$$u' = f(u,\omega t) \quad (\omega \in \Omega) \tag{7.4.4}$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Если

$$|F(u,\omega)| \le c|u|$$

для любых $|u| \ge r$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* r *и* c *– некоторые положительные числа, то существует положительное число* λ_0 *такое, что для каждого* $\lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]$ *имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество* $I^\lambda_\omega := \{u \in E \mid \sup\{|\varphi_\lambda(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ *непусто компактно и связно для каждого* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi_\lambda(t,u,\omega)$ *– единственное решение уравнения*

$$u' = f(u,\omega t) + \lambda F(u,\omega t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi_\lambda(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi_\lambda(t, I^\lambda_\omega, \omega) = I^\lambda_{\sigma(t,\omega)}$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$;

(3) *множество* $I^\lambda = \cup\{I^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t,M,\omega_{-t}), I^\lambda_\omega) = 0$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t,M,\omega), I^\lambda) = 0 \tag{7.4.5}$$

каковы бы ни были $\lambda \in \Lambda,\ \omega \in \Omega$ *и ограниченное множество* $M \subseteq E$*;*

(5) *множество* $\cup\{I^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ *компактно;*

(6) *имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(I^{\lambda}_{\omega}, 0) = 0.$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично теореме 7.4.1.

7.5. Монотонные системы

В этом параграфе предпологается, что E – гильбертово пространство с скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $f \in C(E \times \Omega, E)$ и удовлетворяет следующему условию

$$Re\langle f(u_1, \omega) - f(u_2, \omega), u_1 - u_2 \rangle \le -k|u_1 - u_2|^{\alpha} \qquad (7.5.1)$$

для любых $\omega \in \Omega$ и $u_1, u_2 \in E$ ($k > 0$ и $\alpha \ge 2$).

Теорема 7.5.1. *(*[**88**],[**171**]*). Если функция* f *удовлетворяет условию (7.5.1), то имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество* $I_{\omega} = \{u \in E \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t, u, \omega)| < +\infty\}$ *содержит одну единственную точку* $\gamma(\omega)$ *для любого* $\omega \in \Omega$*, где* $\varphi(t, u, \omega)$ *– единственное решение уравнения (7.4.4) с условием* $\varphi(0, u, \omega) = u$*;*

(2) *имеют место неравенства*

$$|\varphi(t, u, \omega) - \gamma(\omega t)| \le e^{-kt}|u - \gamma(u)| \quad (\textit{если} \quad \alpha = 2)$$

и

$$|\varphi(t, u, \omega) - \gamma(\omega t)| \le (|u - \gamma(u)|^{2-\alpha} + (\alpha - 2)t)^{\frac{1}{2-\alpha}} \quad (\textit{если} \quad \alpha > 2)$$

для любых $t \ge 0, u \in E$ *и* $\omega \in \Omega$*;*

(3) *функция* $\gamma : \Omega \to E$*, определенная равенством* $\gamma(\omega) = I_{\omega}$*, непрерывна и* $\gamma(\omega t) = \varphi(t, \gamma(\omega), \omega)$ *для любых* $t \ge 0,\ u \in E$ *и* $\omega \in \Omega$*.*

Теорема 7.5.2. *Пусть $f \in C(E \times \Omega, E)$ удовлетворяет условию (7.5.1) и $F \in C(E \times \Omega, E)$ удовлетворяет условию*

$$Re\langle F(u_1,\omega) - F(u_2,\omega), u_1 - u_2\rangle \leq L|u_1 - u_2|^{\alpha} \tag{7.5.2}$$

для любых $u_1, u_2 \in E$ и $\omega \in \Omega$, где L – некоторое положительное число.

Тогда существует положительное число λ_0 такое, что для любого $|\lambda| \leq \lambda_0$ имеют место следующие утверждения:

(1) *множество $I^{\lambda}_{\omega} := \{u \in E \mid \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_{\lambda}(t,u,\omega)| < +\infty\}$ содержит одну единственную точку $\varphi_{\lambda}(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$, где $\varphi_{\lambda}(t,u,\omega)$ – единственное решение уравнения*

$$u' = f(u,\omega t) + \lambda F(u,\omega t) \quad (\omega \in \Omega), \tag{7.5.3}$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi_{\lambda}(0,u,\omega) = u$;

(2) *функция $\varphi_{\lambda} : \Omega \to E$, определенная равенством $\varphi_{\lambda}(\omega) = I^{\lambda}_{\omega}$, непрерывна и $\varphi_{\lambda}(\omega t) = \varphi_{\lambda}(t,\varphi(\omega),\omega)$ для любых $t \geq 0, u \in E$ и $\omega \in \Omega$;*

(3)
$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{\omega\in\Omega} |\varphi_{\lambda}(\omega) - \gamma(\omega)| = 0.$$

Доказательство. Пусть $g_{\lambda} = f + \lambda F$, тогда из (7.5.1) -(7.5.2) следует, что

$$\begin{aligned} & Re\ \langle g_{\lambda}(u_1,\omega) - g_{\lambda}(u_2,\omega), u_1 - u_2\rangle \\ \leq\ & (-k + L|\lambda|)|u_1 - u_2|^{\alpha} \end{aligned} \tag{7.5.4}$$

для любых $u_1, u_2 \in E$ и $\omega \in \Omega$. Из (7.5.4) следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $-k + L|\lambda| \leq -k + L\lambda_0 < 0$ для любого $|\lambda| \leq \lambda_0$ и согласно теореме 7.5.1, имеют место первые два утверждения теоремы.

Ясно, что при $|\lambda| \leq \lambda_0$ коцикл φ_{λ}, порожденный уравнением (7.5.3), допускает компактный глобальный аттрактор $I^{\lambda} = \{\varphi_{\lambda}(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$.

Покажем теперь, что множество $\cup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]\}$ компактно. Действительно, пусть $V(u) = \frac{1}{2}|u|^2$, тогда

$$\begin{aligned} V'(u) &:= \frac{d}{dt}V(\varphi_\lambda(t,u,\omega))|_{t=0} = Re\langle g_\lambda(u,\omega), u\rangle \\ &= Re\langle g_\lambda(u,\omega) - g_\lambda(0,\omega), u\rangle + Re\langle g_\lambda(0,\omega), u\rangle \qquad (7.5.5) \\ &\leq (-k + L|\lambda_0|)|u|^2 + C|u| = |u|^2(-k + L|\lambda_0| + \frac{C}{|u|^{\alpha-1}}), \end{aligned}$$

где $C := max\{|g_\lambda(0,\omega)| : \omega \in \Omega,\ \lambda \in \Lambda\}$. Из (7.5.5) следует существование $r > 0$ такого что для любых $|u| \geq r$

$$V'(u) \leq -\nu|u|^2, \qquad (7.5.6)$$

где $\nu = k - L|\lambda_0| - \frac{C}{r^{\alpha-1}} > 0$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 7.5.2 достаточно сослаться на теорему 7.2.11. Теорема доказана.

7.6. Квазилинейные системы

Рассмотрим на E неавтономную квазилинейную систему

$$u' = A(\omega t)u + \lambda f(u, \omega t) \quad (\omega \in \Omega),$$

где E – гильбертово пространство с скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Теорема 7.6.1. *Пусть $A \in C(\Omega, [E]), f \in C(E \times \Omega, E)$ и выполнены следующие условия:*

(1) *существует положительная константа α_0 такая, что $Re\langle A(\omega)u, u\rangle \leq -\alpha_0|u|^2$ для любых $u \in E$ и $\omega \in \Omega$;*

(2) *для любого $r > 0$ существует положительная константа $L(r)$ такая, что*

$$|f(u_1,\omega) - f(u_2,\omega)| \leq L|u_1 - u_2|$$

при всех $u_1, u_2 \in B[0,r] = \{u \in E \mid |u| \leq r\}$ и $\omega \in \Omega$.

Тогда существует положительная константа λ_0, такая что для любых $\lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]$ имеют место следующие утверждения:

(1) *множество* $I_\omega^\lambda := \{u \in E \mid \sup\{|\varphi_\lambda(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ *непусто, компактно и связно для любого* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi_\lambda(t,u,\omega)$ – *единственное решение уравнения*

$$u' = A(\omega t)u + \lambda F(u, \omega t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi_\lambda(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi_\lambda(t, I_\omega^\lambda, \omega) = I_{\sigma(t,\omega)}^\lambda$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$;

(3) *множество* $I^\lambda = \cup\{I_\omega^\lambda \mid \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t, M, \omega_{-t}), I_\omega^\lambda) = 0$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t, M, \omega), I^\lambda) = 0$$

для любых $\lambda \in \Lambda,\ \omega \in \Omega$ *и ограниченного множества* $M \subseteq E$;

(5) *множество* $\cup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *компактно;*

(6) *имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(I_\omega^\lambda, 0) = 0.$$

Доказательство. Пусть λ_0 – положительное число, такое что $\nu = \alpha_0 - \lambda_0\alpha > 0$, тогда функция $F_\lambda(u,\omega) = A(\omega)u + \lambda f(u,\omega)$ удовлетворяет условию

$$Re\langle F_\lambda(u,\omega), u\rangle \ \le -\nu|u|^2 + \lambda_0\beta \tag{7.6.1}$$

для любых $|\lambda| \le \lambda_0, \omega \in \Omega$ и $u \in E$.

Из (7.6.1) следует (см., например, [**178**]) неравенство

$$|\varphi_\lambda(t,u,\omega)|^2 \le |u|^2 e^{-2\nu t} + \frac{\lambda_0\beta}{\nu}(1 - e^{-2\nu t}) \tag{7.6.2}$$

при любых $t \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \Lambda$ и $(u,\omega) \in E \times \Omega$ и, следовательно, семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ допускает ограниченное равномерно поглощающее множество. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теоремы 7.2.9 и лемму 7.2.5.

7.7. Неавтономно возмущенные системы

Теорема 7.7.1. *Предположим что $f \in C(E,E)$ равномерно Липшицева и автономная система (7.4.2) допускает компактный глобальный аттрактор I. Кроме того, предположим, что $F \in C(E\times\Omega, E)$ равномерно Липшицева по $u \in E$ и равномерно ограничена на $E\times\Omega$, т.е.* $\sup\{|F(u,\omega)| : (u,\omega) \in E\times\Omega\} = K < +\infty$. *Тогда существует положительное число $\lambda_0 > 0$, такое что для любого $\lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]$ имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество $I^{\lambda}_{\omega} := \{u \in E \mid \sup\{|\varphi_{\lambda}(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ непусто компактно и связно для любого $\omega \in \Omega$, где $\varphi_{\lambda}(t,u,\omega)$ – единственное решение уравнения*

$$u' = f(u) + \lambda F(u, \omega t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi_{\lambda}(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi_{\lambda}(t, I^{\lambda}_{\omega}, \omega) = I^{\lambda}_{\sigma(t,\omega)}$ *для любых $t \in \mathbb{R}_+$ и $\omega \in \Omega$;*

(3) *множество $I^{\lambda} = \cup\{I^{\lambda}_{\omega} \mid \omega \in \Omega\}$ компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_{\lambda}(t, M, \omega_{-t}), I^{\lambda}_{\omega}) = 0$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_{\lambda}(t, M, \omega), I^{\lambda}) = 0$$

для любых $\lambda \in \Lambda$, $\omega \in \Omega$ и ограниченного множества $M \subseteq E$;

(5) *множество $\cup\{I^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ компактно;*

(6) *имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(I^{\lambda}_{\omega}, I) = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 22.5 из **[268]** (см. также **[228]** - **[230]**) в условиях теоремы существует непрерывная функция $V : E \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющая условиям:

a. V равномерно Липшицева в E, т.е. существует константа $L > 0$ такая что $|V(u_1) - V(u_2)| \le L|u_1 - u_2|$ для любых $u_1, u_2 \in E$;

b. существуют непрерывные строго возрастающие функции $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие условиям: $a(0) = b(0) = 0$, $0 < a(r) < b(r)$ для $r > 0$ и $a(\beta(u, I)) \le V(u) \le b(\beta(u, I))$ при всех $u \in E$;
c. существует константа $c > 0$ такая что $V'(u) \le -cV(u)$ при всех $u \in E$, где $V'(u) := \lim\limits_{t \to 0+} \sup t^{-1}[V(\pi(t, u)) - V(u)]$ и $\pi(t, u)$ – единственное решение уравнения (7.4.2) с начальным условием $\pi(0, u) = u$.

Определим теперь функцию $\mathcal{V} : X \to \mathbb{R}_+$ ($X = E \times \Omega$) следующим образом: $\mathcal{V}(x) := V(u)$ для всех $x = (u, \omega) \in X$. Заметим, что

$$\mathcal{V}'(u, \omega) := \lim_{t \to 0+} \sup V(\varphi_\lambda(t, u, \omega))|_{t=0} \le LKr - c\mathcal{V}(u, \omega)$$

(см. [**230**]) для любых $u \in E$. Тогда существуют $\lambda_0 > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что

$$\mathcal{V}'(u, \omega) \le -LK\lambda_0$$

при всех $|u| \ge r_0$ и $\omega \in \Omega$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 7.2.11 и лемму 7.2.5.

Замечание 7.7.2. *Теорема 7.7.1 обобщает и уточняет теорему 4.1 из* [**230**].

7.8. Двумерные уравнения Навье-Стокса

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с C^2-гладкой границей,

$$V = \{u \in (\dot{W}_2^1(G))^2,\ \mathrm{div} u(x) = 0\}, H = \overline{V}^{(L_2(G))^2},$$

V' – пространство сопряженное к $V, (\dot{W}_2^1(G))^2$ – пространство Соболева двухмерных вектор-функций, и π – ортогональная проекция из $(L_2(G))^2$ в H. Оператор $F(u, v) := \pi(u, \nabla)v$ принимает значения из V'.

Пусть Ω – компактное метрическое пространство, $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система на Ω, $\mathcal{F} \in C(V \times \Omega, V)$ и удовлетворяет при некоторых положительных L, M и N следующим условиям:

(i) $|\mathcal{F}(u_1,\omega)-\mathcal{F}(u_2,\omega)| \le L|u_1-u_2|$ для любых $u_1,u_2 \in V$ и $\omega \in \Omega$;

(ii) $Re\ \langle \mathcal{F}(u,\omega),u\rangle \le M|u|^2+N$ при всех $u \in V$ и $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим возмущенное двумерное уравнение Навье-Стокса

$$u' + \nu Au + F(u,u) = \mathcal{F}(u,\omega t) \quad (\omega \in \Omega) \tag{7.8.1}$$

на H, где A – расширение $-\pi\nabla$ с нулевыми граничными условиями на V и $\nu > 0$. В частности, существует $\lambda_1 > 0$ такое, что

$$\langle Au,u\rangle \quad \ge |u|^2_V \ge \lambda_1 |u|^2_H$$

для всех $u \in V$.

Согласно **[247]** и **[259]** уравнением (7.8.1) порождается коцикл $\varphi(t,u,\omega)$ на $(\Omega,\mathbb{R},\sigma)$ со слоем H, где $\varphi(t,u,\omega)$ – единственное решение уравнения (7.8.1) с условием $\varphi(0,u,\omega)=u$.

Лемма 7.8.1. *Если выполнены условия (i) и (ii), то имеют место следующие утверждения:*

(1) *для любых $T > 0$, $\nu > 0$, $\omega \in \Omega$ и $u \in H$ уравнение (7.8.1) имеет единственное решение $\varphi(t,u,\omega)$ из $C([0,T],H)$;*

(2) *это решение удовлетворяет энергетическому неравенству*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}|\varphi(t,u,\omega)|^2_H + \nu\lambda_1\varphi(t,u,\omega)|^2_H \\ \le\ & \frac{|\mathcal{F}(0,\omega t)|^2_H}{\nu\lambda_1} + 2L|\varphi(t,u,\omega)|^2_H \end{aligned} \tag{7.8.2}$$

для любых $t \in [0,T], u \in H$ и $\omega \in \Omega$;

(3) *отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times H \times \Omega \to H$ $(\varphi : (t,u,\omega) \to \varphi(t,u,\omega))$ непрерывно.*

Доказательство. Первые два утверждения следуют из **[184]** (см. также лемму 3.1 **[247]**).

Теперь мы покажем что отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \times H \times \Omega \to H$ непрерывно. Действительно, пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+, u_0 \in H$ и $\omega_0 \in \Omega$, тогда имеем

$$\begin{aligned} &|\varphi(t,u,\omega)-\varphi(t_0,u_0,\omega_0)|_H \le |\varphi(t,u,\omega)-\varphi(t,u_0,\omega_0)|_H \\ +\ & |\varphi(t,u_0,\omega_0)-\varphi(t_0,u_0,\omega_0)|_H. \end{aligned} \tag{7.8.3}$$

Обозначим через $w(t) = \varphi(t,u,\omega) - \varphi(t,u_0,\omega_0)$ и $f(t) = \mathcal{F}(\varphi(t,u,\omega),\omega t) - \mathcal{F}(\varphi(t,u_0,\omega_0),\omega_0 t)$, тогда функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} + \nu Aw + B(w,w) + B(w,u_1) + B(u_1,w) = f(t), \tag{7.8.4}$$

где $u_1 = \varphi(t,u_0,\omega_0)$.

Используя хорошо известное тождество $\langle B(u,v),v\rangle = 0$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в H, мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_H^2 = \langle \dot{w}, w\rangle = \langle -\nu Aw - B(w,w) - B(w,u_1) \\ - \quad & B(u_1,w) + f(t), w\rangle = -\nu\langle Aw,w\rangle - \langle B(w,w),w\rangle \\ - \quad & \langle B(w,u_1),w\rangle - \langle B(u_1,w),w\rangle + \langle f(t),w\rangle \\ = \quad & -\nu\langle Aw,w\rangle - \langle B(w,u_1),w\rangle + \langle f(t),w\rangle. \end{aligned} \tag{7.8.5}$$

Принимая во внимание неравенство $|u|_{L_4}^2 \le |w|_H|w|_V$ (см. [**59**]), мы получим

$$|\langle B(w,u_1),w\rangle| \le |w|_{L_4}^2|u_1|_V$$

$$\le |w|_H|w|_V|u_1|_V \le \frac{\nu}{2}|w|_V^2 + \frac{1}{2\nu}|w|_H^2|u_1|_V^2.$$

Так как $|(f,w)| \le |f|_H|w|_H$, то из (7.8.5) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_H^2 \le -\nu\lambda_1|w|_V^2 + \frac{\nu\lambda_1}{2}|w|_V^2 \\ + \quad & \frac{1}{2\nu\lambda_1}|w|_H^2|u_1|_V^2 + |f|_H|w|_H. \end{aligned} \tag{7.8.6}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & |f(t)|_H = |\mathcal{F}(\varphi(t,u,\omega),\omega t) - \mathcal{F}(\varphi(t,u_0,\omega_0),\omega_0 t)|_H \\ \le \quad & L|\varphi(t,u_0,\omega_0) - \varphi(t,u_0,\omega_0)| \\ + \quad & |\mathcal{F}(\varphi(t,u_0,\omega_0),\omega t) - \mathcal{F}(\varphi(t,u_0,\omega_0),\omega_0 t)| \end{aligned} \tag{7.8.7}$$

и, следовательно, из (7.8.5) -(7.8.7) мы получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_H^2 \le (\frac{1}{2\nu}|u_1|_V^2 + L + \frac{1}{2})|w|_H^2 + \frac{|f|^2}{2}. \tag{7.8.8}$$

Из этого дифференциального неравенства следует что

$$|w(t)|_H^2 \leq e^{\int_0^t (\frac{1}{2\nu}|\varphi(\tau,u_0,\omega_0)|_V^2 + L + \frac{1}{2})d\tau}(|u-u_0|_H^2$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_0^\tau}(\frac{1}{2\nu}|\varphi(s,u_0,\omega_0)|_V^2 + L + \frac{1}{2})ds \tag{7.8.9}$$
$$\frac{1}{2}|\mathcal{F}(\varphi(\tau,u_0,\omega_0),\omega\tau) - \mathcal{F}(\varphi(\tau,u_0,\omega_0),\omega_0\tau)|d\tau.$$

Так как $\mathcal{F} \in C(H \times \Omega, H)$, то

$$\max_{0\leq t\leq T} |\mathcal{F}(\varphi(t,u_0,\omega_0),\omega t) - \mathcal{F}(\varphi(t,u_0,\omega_0),\omega_0 t)| \to 0$$

при $\omega \to \omega_0$ и, следовательно, из (7.8.9) следует

$$\max_{0\leq t\leq T} |w(t)| \to 0. \tag{7.8.10}$$

Из (7.8.3) и (7.8.10) получаем непрерывность отображения φ. Лемма доказана.

Следствие 7.8.2. *Если выполнены условия (i) и (ii), то существует положительное число $L_0 < \frac{\nu\lambda_1}{2}$ такое, что при $L < L_0$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(t,u,\omega)|^2 \leq e^{(-\nu\lambda_1+2L_0)t}|u|^2 + \frac{|f|^2}{\nu\lambda_1(-2L_0+\nu\lambda_1)}$$

при любых $t \geq 0$, $u \in H$ и $\omega \in \Omega$, где $|f| = \max_{\omega\in\Omega}|\mathcal{F}(0,\omega)|$.

Доказательство. Это утверждение следует из второго утверждения леммы 7.8.1.

Теорема 7.8.3. *Существует положительное число $L_0 > 0$ такое, что коцикл φ, порожденный уравнением (7.8.1), допускает компактный глобальный аттрактор, если $L \leq L_0$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1 **[247]** существует $L_0 > 0$ (например, $L_0 < \frac{\nu\lambda_1}{2}$) такое, что коцикл φ допускает ограниченное поглощающее множество, если $L < L_0$. С другой стороны, коцикл φ является компактным, т.е. отображение $\varphi(t,\cdot,\cdot) : V \times \Omega \to V$ вполне непрерывно при всех $t > 0$.

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.7.3.

Теорема 7.8.4. *При выполнении условий (i) и (ii) существует положительное число λ_0 такое, что справедливы следующие утверждения:*

(1) *множество* $I^\lambda_\omega := \{u \in H \mid \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_\lambda(t,u,\omega)| < +\infty\}$ *непусто, компактно и связно при любых* $\omega \in \Omega$ *и* $\lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, -\lambda_0]$, *где* $h \in H$ *и* $\varphi_\lambda(t,u,\omega)$ *– единственное решение уравнения*

$$u' + \nu Au + F(u,u) + h = \lambda\mathcal{F}(u,\omega t) \quad (\omega \in \Omega) \tag{7.8.11}$$

с условием $\varphi_\lambda(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi_\lambda(t, I^\lambda_\omega, \omega) = I^\lambda_{\sigma(t,\omega)}$ *для любых* $\lambda \in \Lambda,\ t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$;

(3) *множество* $I^\lambda = \cup\{I^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t,M,\omega_{-t}), I^\lambda_\omega) = 0$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t,M,\omega), I^\lambda) = 0$$

для любых $\lambda \in \Lambda,\ \omega \in \Omega$ *и ограниченного множества* $M \subseteq E$;

(5) *множество* $\bigcup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *компактно и связно;*

(6) *имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(I^\lambda_\omega, I) = 0,$$

где I *– центр Левинсона уравнения*

$$u' + \nu Au + F(u,u) + h = 0\ .$$

Доказательство. Пусть $\tilde{F}(u,\omega t) = -h + \lambda\mathcal{F}(u,\omega t)$ и $\lambda_0 < \frac{\nu\lambda_1}{2L}$, тогда для уравнения

$$u' + \nu Au + F(u,u) = \lambda\tilde{F}(u,\omega t) \quad (\omega \in \Omega) \tag{7.8.12}$$

выполнены все условия теоремы 7.8.3. Пусть φ_λ – коцикл, порожденный уравнением (7.8.12), тогда согласно следствию 7.8.2 семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ допускает ограниченное равномерно поглощающее множество. Так как вложение V в H компактно, для завершения доказательства этой теоремы достаточно сослаться на теорему 7.2.8 и лемму 7.2.5. Теорема доказана.

7.9. Квазилинейные функционально-дифференциальные уравнения

Пусть $r > 0$, $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ – банахово пространство непрерывных функций $\nu : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\sup$. Если $[a,b] = [-r,0]$, то положим $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ и $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$. Для каждого $t \in [\sigma, \sigma + A]$ определим $u_t \in C$ равенством $u_t(\theta) := u(t+\theta), -r \leq \theta \leq 0$. Обозначим через $C(\Omega \times C, \mathbb{R}^n)$ пространство всех непрерывных функций $f : \Omega \times C \to \mathbb{R}^n$ с открыто-компактной топологией и через $(\Omega, \mathbb{R}, \sigma)$ динамическую систему на компактном метрическом пространстве Ω. Рассмотрим уравнение

$$u' = f(u_t, \omega t) \qquad (\omega \in \Omega), \tag{7.9.1}$$

где $f \in C(\Omega \times C, \mathbb{R}^n)$. Предположим что функция f регулярна, т.е. для любых $\omega \in \Omega$ и $u \in C$ уравнение (7.9.1) имеет единственное решение $\varphi(t, u, \omega)$ с условием $\varphi(0, u, \omega) = u$ и определенное на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Пусть $X = C \times \Omega$, и $\pi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ отображение определенная следующим образом: $\pi(\tau, (u, \omega)) = (\varphi_\tau(u,\omega), \omega\tau)$ (где $\varphi_\tau(u,\omega)(\theta) = \varphi(\tau + \theta, u, \omega)$), тогда тройка $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (\Omega, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$ $(h = pr_2 : X \to \Omega)$ есть неавтономная динамическая система.

Из общих свойств решений дифференциальных уравнений (7.9.1) (см., например, [**215**]) следует

Теорема 7.9.1. *Имеют место следующие утверждения:*

1. *неавтономная динамическая система $\langle (X, \mathbb{R}_+, \pi), (\Omega, \mathbb{R}, \sigma), h\rangle$, порожденная уравнением (7.9.1), локально вполне непрерывна;*
2. *пусть Ω компактно и функция $f : \Omega \times C \to \mathbb{R}^n$ ограничена на $\Omega \times B$ для любого ограниченного множества $B \subset C$, тогда неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (7.9.1), условно вполне непрерывна (в частности, она асимптотически компактна).*

Теорема 7.9.2. [**127**]. *Пусть $A \in C(\Omega, [C])$, $f \in C(C \times \Omega, E)$ и выполнены следующие условия:*

(1) *нулевое решение уравнения*

$$u' = A(\omega t)u_t \tag{7.9.2}$$

равномерно экспоненциально устойчиво, т.е. существуют положительные числа N *и* ν *такие что* $|\varphi_0(t,u,\omega)| \le Ne^{-\nu t}|u|$ *для любых* $t \ge 0$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi_0(t,u,\omega)$ – *решение уравнения (7.9.2) с условием* $\varphi_0(0,u,\omega) = u$;

(2) *существует положительное число* L *такое, что*

$$|f(u_1,\omega) - f(u_2,\omega)| \le L|u_1 - u_2|$$

при всех $u_1, u_2 \in C$ *и* $\omega \in \Omega$.

Тогда существует положительное число ε_0 ($\varepsilon_0 < \frac{\nu}{N}$) *такое, что*

$$|\varphi(t,u,\omega)| \le \frac{NM}{\nu - NL} + (N|u| - \frac{NM}{\nu - NL})e^{-(\nu - NL)t}$$

для любых $t \ge 0, u \in C$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi(t,u,\omega)$ – *решение уравнения*

$$u' = A(\omega t)u_t + f(u_t, \omega t)$$

с начальным условием $\varphi(0,u,\omega) = u$ *и* $M := \max\{|f(0,\omega)| : \omega \in \Omega\}$.

Рассмотрим неавтономную квазилинейную систему

$$u' = A(\omega t)u_t + \lambda f(u_t, \omega t) \quad (\omega \in \Omega) \tag{7.9.3}$$

на C.

Теорема 7.9.3. *Пусть* $f \in C(C \times \Omega, E)$ *и имеет место неравенство*

$$|f(u_1,\omega) - f(u_2,\omega)| \le L|u_1 - u_2|$$

при всех $u_1, u_2 \in C$ *и* $\omega \in \Omega$, *где* L – *некоторое положительное число.*

Тогда существует положительное число λ_0 *такое, что при всех* $\lambda \in \Lambda = [-\lambda_0, \lambda_0]$ *имеют место следующие утверждения:*

(1) *множество* $I_\omega^\lambda := \{u \in C \mid \sup\{|\varphi_\lambda(t,u,\omega)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty\}$ *непусто, компактно и связно для каждого* $\omega \in \Omega$, *где* $\varphi_\lambda(t,u,\omega)$ – *единственное решение уравнения (7.9.3) с условием* $\varphi_\lambda(0,u,\omega) = u$;

(2) $\varphi_\lambda(t, I^\lambda_\omega, \omega) = I^\lambda_{\sigma(t,\omega)}$ *для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega \in \Omega$*;*

(3) *множество* $I^\lambda = \cup\{I^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ *компактно и связно;*

(4) *имеют место равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t, M, \omega_{-t}), I^\lambda_\omega) = 0$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\varphi_\lambda(t, M, \omega), I^\lambda) = 0$$

для любых $\lambda \in \Lambda$, $\omega \in \Omega$ *и ограниченного множества* $M \subseteq E$*;*

(5) *множество* $\cup\{I^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *компактно;*

(6) *имеет место равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{\omega\in\Omega} \beta(I^\lambda_\omega, 0) = 0.$$

Доказательство. Пусть λ_0 – положительное число, удовлетворяющее условию $\lambda_0 L < \frac{\nu}{N}$, тогда функция $F_\lambda(u, \omega) := A(\omega)u + \lambda f(u, \omega)$ удовлетворят условию

$$|F_\lambda(u, \omega)| \le \nu|u| + M \tag{7.9.4}$$

($M = \max\limits_{\omega\in\Omega} |f(0, \omega|$) для любых $|\lambda| \le \lambda_0$, $\omega \in \Omega$ и $u \in E$.

Из неравенства (7.9.4) и теоремы 7.9.1 следует, что семейство коциклов $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ допускает ограниченное равномерно поглощающее множество. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на теоремы 7.2.8, 7.9.2 и лемму 7.2.5.

Предметный указатель

Литература

[1] В. М. Алексеев. *Символическая динамика.* Киев, Наукова думка, 1986. Одиннадцатая математическая школа.

[2] В. М. Алексеев и М. В. Якобсон. *Символическая динамика и гиперболические динамические системы.* Р.Боуэн. Методы символической динамики, 196–240. М., Мир, 1979.

[3] А. С. Андреев. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы. *Прикладная математика и механика*, 48(2):1225–1232, 1984.

[4] В. И. Арнольд. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1978.

[5] П. В. Атрашенок. Некоторые вопросы устойчивости движения. *Вестник ЛГУ, математика*, (8):79–106, 1954.

[6] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их размерности. *УМН*, 38(4(232)):133-187, 1983.

[7] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Оценка сверху и снизу размерности аттракторов эволюционных уравнений с частными производными. *Сибирский математический журнал*, 24(5):15–30, 1983.

[8] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Аттракторы параболических уравнений и системы Навье–Стокса и оценка их размерности. В сб. *Общая теория граничных задач. Киев*, 1983. Стр. 14–25.

[9] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения. *УМН*, 41(4(250)):3–34, 1986.

[10] А. В. Бабин и М. И. Вишик. О неустойчивых множествах эволюционных уравнений в окрестности критических точек стационарной кривой. *Известия АН СССР, Математика*, 51(1):44–78, 1987.

[11] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Полугруппы, зависящие от параметра, их аттракторы и асимптотическое поведение. В сб. *Глобальный анализ и нелинейные уравнения.* Из-во ВГУ, 1988.

[12] А. В. Бабин и М. И. Вишик. Аттракторы параболических и гиперболических уравнений, характер их компактности и притяжения к ним. *Вестник МГУ, серия I, Математика, Механика*, (3):71–73, 1988.

[13] А. В. Бабин и М. И. Вишик. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М., Наука, 1989.

[14] Е. А. Барбашин. *Введение в теорию устойчивости.* М., Наука, 1967.

[15] И. У. Бронштейн. *Расширение минимальных групп преобразований.* Кишинев, Штиинца, 1975.

[16] И. У. Бронштейн и А. И. Герко. *О вложении некоторых топологических полугрупп преобразований в топологические группы преобразований. Известия АН Молдавской ССР, серия физ.-тех. и матем. наук*, 3:18-24, 1970.

[17] И. У. Бронштейн. *Неавтономные динамические системы.* Кишинев, Штиинца, 1984.

[18] И. У. Бронштейн и А. Я. Копанский. *Инвариантные многообразия и нормальные формы.* Кишинев, Штиинца, 1992.

[19] Н. Бурбаки. *Топологические векторные пространства.* М., Мир, 1959.

[20] М. И. Вишик и В. В. Чепыжов. Аттракторы неавтономных динамических систем. *Математические заметки*, 51(6):141–143, 1992.

[21] Р. Ганнинг и Х. Росси. *Аналитические функции многих переменных.* М., Мир, 1969.

[22] А. И. Герко. *Расширения топологических полугрупп преобразований.* Кишинев, МолдГУ, 2001.

[23] В. М. Герштейн и М. А. Красносельский. Структура множества решений диссипативных уравнений. *Доклады АН СССР*, 183(2):267–269, 1968.

[24] В. М. Герштейн. О диссипативности одной двумерной системы. *Дифференциальные уравнения*, 5(8):1438–1444, 1969.

[25] В. М. Герштейн. Замечание о диссипативных потоках. *Труды математического факультета воронежского госуниверситета*, (1):26–34, 1970.

[26] В. М. Герштейн. К теории диссипативных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. *Функциональный анализ и его приложения*, 4(3):99–100, 1970.

[27] В. М. Герштейн. О непереодических диссипативных системах. *Труды математического факультета воронежского госуниверситета*, (6):12–20, 1972.

[28] В. А. Главан. Об одной задаче Джонсона–Селла. Разрывные динамические системы. *Тезисы докладов научной конференции*, стр. 9, Ивано–Франковск, Украина, 1990.

[29] Ю. Л. Далецкий и М. Г. Крейн. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М., Наука, 1970.

[30] Б. П. Демидович. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I. *Вестник МГУ*, (6):19–27, 1961.

[31] Б. П. Демидович. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, II. *Вестник МГУ*, (1):3–8, 1962.

[32] Б. П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости.* М., Наука, 1967.

[33] В. В. Жиков. К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений. *Научные труды ВВПИ, математика*, (8):94–188, 1969.

[34] В. В. Жиков. Об устойчивости и неустойчивости центра Левинсона. *Дифференциальные уравнения*, 8(12):2167–2170, 1972.

[35] В. Г. Задорожный. О нелокальных решениях V-диссипативных дифференциальных уравнений. *Украинский математический журнал*, 35(3):303–308, 1983.

[36] И. Л. Зинченко. О структуре асимптотически устойчивых инвариантных множеств периодических комплексных аналитических систем дифференциальных уравнений. *Вестник ЛГУ, математика, механика, астрономия*, 1(1):23–25, 1980.

[37] И. Л. Зинченко. Теорема о конвергенции комплексных аналитических систем. *Дифференциальные уравнения*, 25(10):1809–1810, 1989.

[38] В. И. Зубов. *Методы А.М.Ляпунова и их приложения.* Л., ЛГУ, 1957.

[39] В. И. Зубов. *Устойчивость движения.* М., Высшая школа, 1973.

[40] В. И. Зубов. *Теория колебаний.* М., Наука, 1979.

[41] А. О. Игнатьев. Некоторые обобщения теорем Барбашина–Красовского. *Математическая физика*, 34:19–22, 1983.

[42] А. А. Ильин. Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осцилирующими правыми частями. *Математический сборник*, 187(1996), стр.635-677.

[43] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнения Навье–Стокса. *УМН*, 36(3):243–244, 1981.

[44] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие динамические системы и аттракторы. *УМН*, 37(1):166, 1982.

[45] Ю. С. Ильяшенко и А. И. Четаев. О размерности аттракторов для одного класс диссипативных систем. *Прикладная математика и механика*, 46(3):374–381, 1982.

[46] Ю. С. Ильяшенко. О размерности аттракторов k-сжимающих систем в бесконечномерном пространстве. *Вестник МГУ, серия I, математика, механика*, 3:52–59, 1983.

[47] Л. В. Капитанский и И. Н. Костин. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их апроксимация. *Алгебра и Анализ*, 2(1):114–140, 1990.

[48] А. Картан. *Элементарная теория аналитических функций одной и нескольких комплексных переменных.* М., Мир, 1963, стр. 296.

[49] А. Б. Каток. *Динамические системы с гиперболической структурой.* Киев, Наукова думка, 1972, стр. 125–211. Девятая математическая школа.

[50] Дж. Л. Келли. *Общая топология.* М., Наука, 1981.

[51] Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Мир, 1958.

[52] М. А. Красносельский и П. П. Забрейко. *Геометрические методы нелинейного анализа.* М., Наука, 1975.

[53] К. Куратовский. *Топология.* М., Мир, 1966 В 2-х томах, том 1.

[54] К. Куратовский. *Топология.* М., Мир, 1969 В 2-х томах, том 2.

[55] Н. Н. Ладис. Асимптотика решений квазиоднородных систем. *Дифференциальные уравнения*, 9(12):2257–2260, 1973.

[56] О. А. Ладыженская. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 27:911–115, 1972.

[57] О. А. Ладыженская. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье–Стокса и других диссипативных систем. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 112:137–155, 1982.

[58] О. А. Ладыженская. Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 152:72–85, 1986.

[59] О. А. Ладыженская. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными. *УМН*, 42(6(258)):25–60, 1987.

[60] О. А. Ладыженская. Некоторые дополнения и уточнения к моим публикациям по теории аттракторов для абстрактных полугрупп. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*, 182:102–112, 1990.

[61] Б. М. Левитан и В. В. Жиков. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* М., МГУ, 1978.

[62] А. Лихтенберг и Н. Либерман. *Регулярная и стохастическая динамика.* М., Мир, 1984.

[63] Ю. И. Любич. Замечание об устойчивости комплексных динамических систем. *Известия ВУЗов, математика*, (10(257)):49–50, 1983.

[64] Х. Массера и Х. Шеффер. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.* М., Мир, 1970.

[65] А. А. Мартынюк, Д. Като и А. А. Шестаков. *Устойчивость движения: метод предельных уравнений* Киев, Наукова думка, 1990.

[66] В. М. Матросов. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 5(12):2129–2143, 1969.

[67] В. М. Миллионщиков. Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР*, 161(1):43–44, 1965.

[68] В. М. Миллионщиков. О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем. *Дифференциальные уравнения*, 4(9):1555–1559, 1968.

[69] В. М. Миллионщиков. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 7(3):387–390, 1971.

[70] Ю. А. Митропольский, Н. А. Перестюк и О. С. Черникова. Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. *Доклады АН УССР*, А(11):11–15, 1983.

[71] Ю. А. Митропольский и В. Л. Кулик. Ограниченные решения нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Украинский математический журнал*, 36(6):720–729, 1984.

[72] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1949.

[73] В. В. Немыцкий. О некоторых методах качественного исследования в "большом"многомерных автономных систем. *Труды ММО*, 5:455–482, 1956.

[74] В. В. Немыцкий. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. *УМН*, 22(4):3–36, 1965.

[75] З. Нитецки. *Введение в дифференциальную динамику.* М., Мир, 1975.

[76] А. И. Перов и Ю. В. Трубников. Монотонные дифференциальные уравнения, I. *Дифференциальные уравнения*, 10(5):804–815, 1974.

[77] А. И. Перов и Ю. В. Трубников. Монотонные дифференциальные уравнения, II. *Дифференциальные уравнения*, 12(7):1223–1237, 1976.

[78] С. Ю. Пилюгин. *Структура притягивающих множеств гиперболических систем дифференциальных уравнений.* Докт. дисс., Л., 1983.

[79] В. А. Плисс. *Нелокальные проблемы теории колебаний.* М., Наука, 1964.

[80] В. А. Плисс. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1977.

[81] Р. Рейсиг, Г. Сансоне и Р. Конти. *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1974.

[82] У. Рудин. *Функциональный анализ.* М., Мир, 1975.

[83] Н. Руш, П. Абетс и М. Лалуа. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* М., Мир, 1980.

[84] Б. Н. Садовский. Предельно компактные и уплотняющие операторы. *УМН*, 27(1(163)):81–146, 1972.

[85] *Странные аттракторы.* Сборник статей. М., Мир, 1981, стр. 253.

[86] К. С. Сибирский. *Введение в топологическую динамику.* Кишинев, РИО АН МССР, 1970.

[87] К. С. Сибирский и А. С. Шубэ *Полудинамические системы (топологическая теория).* Кишинев, Штиинца, 1970.

[88] Ю. В. Трубников, А. И. Перов *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями.* Минск, Наука и техника, 1986.

[89] Д. С. Факих. Центр Левинсона дисперсных диссипативных динамических систем. *Известия АН ССРМ*, (3):55–59, 1990.

[90] Д. С. Факих. О структуре центра Левинсона дисперсных динамических систем. *Известия АН ССРМ*, (1):62–67, 1991.

[91] Д. С. Факих. Аналог теоремы Левинсона–Плисса для дифференциальных включений. В сб.*Функциональные методы в теории дифференциальных уравнений, Математические исследования.* Выпуск 124:100–105, Кишинев, 1992.

[92] Д. С. Факих и Д. Н. Чебан. Связность центра Левинсона компактно диссипативной динамической системы без единственности. *Известия АН РМ, Математика*, (1):15–22, 1993.

[93] А. Халанай и Д. Векслер. *Качественная теория импульсных систем.* М., Мир, 1971.

[94] П. Халмош. *Гильбертово пространство в задачах.* Мир, М., Мир, 1970.

[95] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., Мир, 1970.

[96] Дж. Хейл. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* М., Мир, 1984.

[97] Д. Хьюзмоллер. *Расслоенные пространства.* М., Мир, 1970.

[98] Д. Н. Чебан. Асимтпотически устойчивые по Пуассону решения операторных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 13(8):1411–1417, 1977.

[99] Д. Н. Чебан. О сравнимости точек динамических систем по характеру возвращаемости в пределе. *Математические науки*, Кишинев, Штиинца, 1:66-71, 1977.

[100] Д. Н. Чебан. *Теория линейных дифференциальных уравнений (избранные главы).* Кишинев, Штиинца, 1980.

[101] Д. Н. Чебан. Об устойчивости центра Левинсона неавтономных диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 20(11):2016-2018, 1984.

[102] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. *Дифференциальные уравнения*, 21(5):913-914, 1985.

[103] Д. Н. Чебан. $\mathbb{C}$-аналитические диссипативные динамические системы. *Тезисы докладов 3-ей конференции по дифференциальным уравнениям и приложениям*, стр. 141. Русе, НРБ, 1985.

[104] Д. Н. Чебан. Диссипативные динамические системы. *Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И.Н.Векуа*, 1(3):154–157, 1985.

[105] Д. Н. Чебан. О втором методе Ляпунова в теории устойчивости динамических систем. *Дифференциальные уравнения и динамические системы.* Математические исследования, 80:139–147, Кишинев, 1985.

[106] Д. Н. Чебан. Квазипериодические решения диссипативных систем с квазипериодическими коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*, 22(2):267–278, 1986.

[107] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. *Доклады АН СССР*, 28(4):824–827, 1986.

[108] Д. Н. Чебан. Один признак конвергентности нелинейных систем в гильбертовом пространстве. *Дифференциальные уравнения и их инварианты* Математические исследования, 88:136–143, Кишинев, Штиинца, 1986.

[109] Д. Н. Чебан. Признак конвергентности нелинейных систем по первому приближению. *Дифференциальные уравнения и их инварианты* Математические исследования, 88:144–150, Кишинев, Штиинца, 1986.

[110] Д. Н. Чебан. Неавтономные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Тезисы докладов 6-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, стр. 197–198. Иркутск, 1986.

[111] Д. Н. Чебан. $\mathbb{C}$-аналитические диссипативные динамические системы. *Дифференциальные уравнения*, 22(11):1915–1922, 1986.

[112] Д. Н. Чебан. О неавтономных диссипативных динамических системах. *УМН*, 41(4(250)):169, 1986.

[113] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 23(3):464–474, 1987.

[114] Д. Н. Чебан. Ограниченность, диссипативность и почти периодичность решений линейных и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Динамические системы и краевые задачи*, Кишинев, Штиинца, стр. 143–159, 1987.

[115] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы. Метод функций Ляпунова. *Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 56–54, 1988.

[116] Д. Н. Чебан. Импульсные и разностные диссипативные системы с периодическими коэффициентами. *Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому анализу*, Кишинев, Штиинца, 127–142, 1988.

[117] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативных динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, 24(6):1086, 1988.

[118] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы. *Дифференциальные уравнения*, 24(9):1564–1576, 1988.

[119] Д. Н. Чебан. Принцип усреднения на полуоси для диссипативных систем. *Динамические системы и уравнения математической физики* Математические исследования, 99:149–161, Кишинев, Штиинца, 1988.

[120] Д. Н. Чебан. Неавтономные диссипативные динамические системы с гиперболическим подмножеством центра (одномерный случай). *Математические заметки*, 45(6):93-98, 1989.

[121] Д. Н. Чебан. Об одной проблеме Дж.Хейла. *Тезисы докладов 7-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, Рига, стр. 227, 1989.

[122] Д. Н. Чебан. *Некоторые вопросы теории диссипативных динамических систем, I*, Дифференциальные уравнения и математическая физика, стр. 147–163. Математические Исследования. Кишинев, Штиинца, 1989. Выпуск 106.

[123] Д. Н. Чебан. Об одной проблеме Дж.Хейла. *Математические заметки*, 46(1):120–121, 1989.

[124] Д. Н. Чебан. Неавтономные динамические системы с конвергенцией. *Дифференциальные уравнения*, 25(9):1633–1635, 1989.

[125] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. *Дифференциальные уравнения*, 26(5):913-914, 1990.

[126] Д. Н. Чебан. О структуре центра Левинсона диссипативной динамической системы с условием гиперболичности на замыкании множества рекуррентных движений. *Известия АН ССРМ, Математика*, (2):34–43, 1990.

[127] Д. Н. Чебан. Диссипативные функционально-дифференциальные уравнения. *Известия АН РМ, Математика*, (2(5)):3–12, 1991.

[128] Д. Н. Чебан. *Неавтономные диссипативные динамические системы.* Дисс. докт. физ.-мат. наук, Институт математики, Минск, 1991.

[129] Д. Н. Чебан. Некоторые вопросы теории диссипативных динамических систем,II. В сб.*Функциональные методы в теории дифференциальных уравнений, Математические исследования.* Выпуск 124:106–122, Кишинев, 1992.

[130] Д. Н. Чебан. Локально диссипативные динамические системы и некоторые их приложения. *Известия АН РМ, Математика*, (1):7–14, 1992.

[131] Д. Н. Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем, I. *Известия АН РМ, Математика*, (2(15)):12–21, 1994.

[132] Д. Н. Чебан и Д. С. Факих. *Глобальные аттракторы дисперсных динамических систем.* Кишинев, Сигма, 1994.

[133] Д. Н. Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем, II. *Известия АН РМ, Математика*, (1(17)):28–37, 1995.

[134] Д. Н. Чебан и Д. С. Факих. Глобальные аттракторы бесконечномерных динамических систем, III. *Известия АН РМ, Математика*, (2-3(18-19)):3–13, 1995.

[135] Д. Н. Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных неавтономных динамических систем.I. *Известия АН РМ, Математика*, (3(25)):42–55, 1997.

[136] Д. Н. Чебан. Асимптотика решений бесконечномерных однородных динамических систем. *Математическме заметки*, 63(1):111-126, 1998.

[137] Д. Н. Чебан. Глобальные аттракторы бесконечномерных неавтономных динамических систем.II. *Известия АН РМ, Математика*, (2(27)):25–38, 1998.

[138] В. В. Чепыжов. Неограниченные аттракторы некоторых параболических систем дифференциальных уравнений и оценка их размерности. *ДАН СССР*, 301(1):46-49, 1988.

[139] О. С. Черникова. О диссипативности систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. *Украинский математический журнал*, 35(5):656–660, 1983.

[140] О. С. Черникова. К вопросу об ограниченности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. *Украинский математический журнал*, 38(1):124–127, 1986.

[141] И. Д. Чуешов. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек. *Математический сборник*, 133(4):419–428, 1989.

[142] И. Д. Чуешов. Сильные решения и аттрактор системы уравнений Карамана. *Математический сборник*, 181(1):25–36, 1990.

[143] И. Д. Чуешов. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики. *УМН*, 48(3):135–162, 1993.

[144] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ*. М., Наука, 1969.

[145] А. Н. Шарковский. Аттракторы некоторых нелинейных краевых задач. *Тезисы докладов 6-ой Всесоюзной конференции по КТДУ*, стр. 205, Иркутск, 1986.

[146] А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко и Е. Ю. Романенко. *Разностные уравнения и их приложения*. Киев, Наукова думка, 1986.

[147] Л. Шварц. *Анализ*, том 1. М., Мир, 1972. В 2-х томах.

[148] Л. Шварц. *Анализ*, том 2. М., Мир, 1972. В 2-х томах.

[149] А. А. Шестаков. Обобщенный метод Ляпунова для абстрактных полудинамических процессов, I. Полудинамические процессы как полудинамические системы. Локализация предельного множества автономных и асимптотически автономных полудинамических процессов. *Дифференциальные уравнения*, 22(9):1475–1490, 1986.

[150] В. Н. Щенников. Исследование конвергенции в неавтономной дифференциальной системе с помощью векторфункции Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*, 19(11):1902–1907, 1983.

[151] В. Н. Щенников. Явление конвергенции сложных систем дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, 19(11):1568–1571, 1984.

[152] Б. А. Щербаков. *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1972.

[153] Б. А. Щербаков и Д. Н. Чебан. Асимптотически устойчивые по Пуассону движения динамических систем и сравнимость их возвращаемости в пределе. *Дифференциальные уравнения*, 13(5):898–906, 1977.

[154] Б. А. Щербаков. *Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений.* Кишинев, Штиинца, 1985.

[155] F. Abergel. Existence and Finite Dimensionality of the Global Attracor for Evolutin Equations and Unbounded Domains. *Journal of Differential Equations*, 83(11):85–108, 1990.

[156] L. Arnold. *Random Dynamical Systems.*. Springer–Verlag, Heidelberg, 1998.

[157] Z. Artstein. Uniform Asymptotic Stability via the Limiting Equations. *Journal of Differential Equations*, 27(2):172–189, 1978.

[158] J. Auslander and P. Seifert. Prolongation Stability in Dynamical Systems. *ann. Inst. Fourier*, Grenodle, 14(2):237–268, 1964.

[159] A. V. Babin and M. I. Vishik. Regular Attractor of Semigroups and Evolutional Equations. *Journal Math. Pures et Appl.*, 62:172–189, 1983.

[160] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[161] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. *Local Semi-Dynamical Systems.* Lecture Notes in Mathematics, v.90. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.

[162] J. E. Billotti and J. P. LaSalle. Dissipative Periodic Process. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77(6):1082–1088, 1971.

[163] H. Brezis. *Operateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, volume 5 of *Math.Studies.* North Holland, 1973.

[164] F. E. Browder. Some New Asymptotic Fixed Point Theorems. *Proc. Acad. Sci.*, 71:2734–2735, 1974.

[165] R. H. Cameron. Almost Periodic Properties of Bounded Solutions of Linear Differential Equation with Almost Periodic Coefficients. *J. Math. Phys*, 15:73–81, 1936.

[166] T. Caraballo, J. A. Langa and R. Robinson. Upper Semicontinuity of Attractors for Small Random Perturbations of Dynamical Systems. *Comm. in Partial Differential Equations*, 23:1557-1581, 1998.

[167] M. L. Cartwrigth and J. E. Littlewood. On Non-linear Differential Equations of the Second Order, I. The Equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)k$ large. *J. Math. Soc.*, 20:180–189, 1945.

[168] M. L. Cartwrigth and J. E. Littlewood. On Non-linear Differential Equations of the Second Order, II. The Equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)k$ for large k and its generalizations. *Acta Math.*, 97:3–4, 1957.

[169] M. L. Cartwrigth and J. E. Littlewood. On Non-linear Differential Equations of the Second Order, III. The General Equation . *Acta Math.*, 98:1–2, 1957.

[170] S. S. Cerons and O. Lopes. α-contractions and Attractors for Dissipative Semilinear Hiperbolic Equations and Systems. *Annali di Matematica Pura ad Applicata*, CLX(4):193–206, 1991.

[171] D. N. Cheban. The global attractors of nonautonomous dynamical systems and almost periodic limit regimes of some classes of evolution equations. *Anale Fac. de Mat. şi Inform.,* v. 1, 1999, pp. 1-26.

[172] Cheban D.N. and Schmalfuss B. The global attractors of nonautonomous disperse dynamical systems and differential inclusions . *Bulletin of Academy of sciences of Republic of Moldova. Mathematics,* 1999. No1(29), pp.3 - 22.

[173] Cheban D.N. Relations between the different type of stability of the linear almost periodical systems in the Banach space. *Electronic Journal of Differential Equations.* vol. 1999 (1999), No.46, pp.1-9.

[174] Cheban D. N., Kloeden P. E. and Schmalfuss B. Pullbac Attractors under Discretization. *Proceeding EQUADIFF99.*

Berlin 1999, vol.2 (Edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels). World Scientific 2000, pp.1024-1029.

[175] D. N. Cheban. Global Attractors of Quasihomogeneous Nonautonomous Dynamical Systems. *Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations.* May 18-21, 2000, Kennesaw, USA. pp.96-101.

[176] Cheban D.N. Uniform exponential stability of linear almost periodic systems in a Banach spaces. *Electronic Journal of Differential Equations.* vol. 2000 (2000), No.29, pp.1-18.

[177] Cheban D. N., Kloeden P. E. and Schmalfuss B. Relation Between pullback and Global Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems. *Berlin, Preprint 27/2000.* (To appear - Nonlinear Dynamics and Systems Theory)

[178] D. N. Cheban, B. Schmalfuß and P. E. Kloeden. Pullback Attractors in Dissipative Nonautonomous Differential Equations under Discretization. *Journal of Dynamics and Differential Equations,* vol.13, No.1, 2001, pp. 185-213.

[179] Cheban D.N. Uniform exponential stability of linear periodic systems in a Banach spaces. *Electronic Journal of Differential Equations.* vol. 2001 (2001), No.03, pp.1-12.

[180] Cheban D.N. An analog of Cameron-Johnson theorem for the linear C-analytic equations in Hilbert space. *Proceedings of the International Conference on "Differential Equations and Related Topics"dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G. Petrovskii.* Moscow, May 22-27, 2001, pp.86-87.

[181] Cheban D.N. Global Pullback Atttactors of C-Analytic Nonautonomous Dynamical Systems. *First conference of the mathematical society of th republic of Moldova.* Chişinău, august 16–18, 2001, p.25.

[182] Cheban D.N. Global Pullback Atttactors of C-Analytic Nonautonomous Dynamical Systems. *Stochastics and Dynamics.* 2001, v.1, No.4, pp.1-25.

[183] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. A Hausdorff Dimension Estimate for Kernel Sections of Non-autonomous Evolutions Equations. *Indian Univ. Math. J*, 42(3):1057–1076, 1993.

[184] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. Attractors of Non-autonomous Dynamical Systems and their Dimension. *J. Math. Pures Appl*, 73:279–333, 1994.

[185] C. C. Conley and R. K. Miller. Asymptotic Stability without Uniform Stability: Almost Periodic Coefficients. *Journal of Differential Equations*, 1:333–336, 1965.

[186] G. D. Cooperman. *α-condensing Maps and Dissipative Systems*. PhD thesis, Brown University, 1978.

[187] C. Corduneanu. Systems Differentiels Admettant des Solutions Bornées. *C.R. Acad. Sci., Ser.A–B.*, 245:21–24, 1957.

[188] H. Crauel and F. Flandoli. Attractors for Random Dynamical Systems. *Probability Theory and Related Fields*, (100):365–393, 1994.

[189] H. Crauel, A. Debusshe and F. Flandoli. Random Attractors. *J. Dyn. Diff. Eq.*, 9(2):307–341, 1997.

[190] C. M. Dafermos. An Invariance Principle for Compact Processes. *Journal of Differential Equations*, (9):239–252, 1971.

[191] C. M. Dafermos. Uniform Processes and semicontinuous Lyapunov Fonctionals. *Journal of Differential Equations*, (11):401–415, 1972.

[192] C. M. Dafermos. Semiflows Associated with Compact and Uniform Processes. *Math. Syst. Theory*, 8(2):142–149, 1974.

[193] C. M. Dafermos. Almost Periodic Process and Almost Periodic Solutions of Evolution Equations. *Dynamical Systems. Proceedings of a University of Florida international symposium*, 43–58, 1977.

[194] A. Denjoy. Sur les Courbes Definiés par les Equations Differentielles a la Surface du Tore. *Journal Math. Pures et Appll (Ser.9)*, (11):333–375, 1932.

[195] L. G. Deyseach and G. R. Sell. On the Existence of Almost Periodic Motions. *Michigan Mathematic Journal*, 12(1):87–95, 1965.

[196] V. P. Dymnikov and A. N. Filatov. *Mathematics of Climate Modeling*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1997.

[197] J. P. Eskman. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. *Rev.Mod.Phys*, 53:643–654, 1981.

[198] P. Fabrie and A. Miranville. *Attractors for Nonautonomous First-Order Evolution Equations*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4(2):225-240, 1998.

[199] A. M. Fink and P. O. Fredericson. Ultimate Boundness does not Imply Almost Periodicity. *Journal of Differential Equations*, (9):280–284, 1971.

[200] F. Flandoli and B. Schmalfuß. Random Attractors for the Stochastic 3-D Navier-Stokes Equations with multiplicative white noise. *Stochastics and Stochastic Reports*, 59:21-45, 1996.

[201] C. Foias, G. R. Sell and R. Temam. Inertial Manifolds of Nonlinear Evolutionary Equations. *Journal of Differential Equations*, 73(4):309–353, 1988.

[202] G. Fusco and M. Oliva. Dissipative Systems with Constraints. *Journal of Differential Equations*, 63:362–388, 1986.

[203] C. Galusinski, M. Hnid and A. Miranville. Exponential Attractors for Nonautonomous Partially Dissipative Equations. *Differential and Integral Equations*, 12(1):1-22, 1999.

[204] J. M. Ghidaglia and R. Temam. Attractor for Damped Nonlinear Hiperboliv Equations. *J. Pures et Appl.*, 66:273–319, 1987.

[205] M. Gobbino and M. Sardella. On the connectness of attractors for dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 133(1):1–14, 1997.

[206] L. Grüne and P. E. Kloeden. Discretization, Inflation and Perturbation of Attractors. *Ergodic Theory, Analyses and Efficient Simulation of Dynamical Systems*, Hrsg: B. Fiedler, Springer-Verlag, 399-416, 2001.

[207] J. K. Hale, J. P. LaSalle and M. Slemrod. Theory of a General Class of Dissipative Processes. *Journal Math. Appl.*, 39:177–191, 1972.

[208] J. K. Hale and O. F. Lopes. Fixed Point Theorems and Dissipative Process. *Journal of Differential Equations*, 13:391–402, 1973.

[209] J. K. Hale and G. Raugel. Upper Semicontinuity for a Singulary Perturbed Hyperbolic Equation. *Journal of Differential Equations*, 73(2):197–214, 1988.

[210] J. K. Hale and G. Raugel. Lower Semicontinuity of Attractors of Gradient Systems and Applications. *Ann. Math. Pura Appl.*, 4(154):281–326, 1989.

[211] J. K. Hale. α-contraction and Differential Equations. *Actes de la Conference Internationalle "Equa–Difs–73"*, Actualites Scientifiques et industrielles 1361, pages 16–41, Bruxelles et Louvain, 1973. Hermann.

[212] J. K. Hale. Some Recent Results on Dissipative Processes. Lecture Notes in Mathematics, pages 152–172. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.

[213] J. K. Hale. Asymptotic Behavior and Dynamics in Infinite Dimensions. *Nonlinear Differ. Equations*, 1–42. Boston e. á, 1985.

[214] J. K. Hale. Asymptotically Smooth Semigroups and Applications. *Lecture Notes in Math.*, (1248):85–93, 1987.

[215] J. K. Hale. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. *Mathematical surveys and Monographs*, 25, p. 198+. American Math. Soc., Providence, R.I., 1988.

[216] J. K. Hale. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (1):175–183, 1990.

[217] A. Haraux. Attractors of Asymptotically Compact Processes and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations. *Commun. in Partial Differ. Equat.*, 13(11):1383–1414, 1988.

[218] A. Haraux. *Systémes Dynamiques Dissipativs et Applications*. Masson, Paris–Milan–Barselona–Rome, 1991.

[219] I. Hitoshi. On the Existence of Almost Periodic Complete Trajectories for Contractive Almost Periodic Processes. *Journal of Differential Equations*, 43(1):66–72, 1982.

[220] V. Iftrode. A-Dissipativity for Periodic Solutions in Ordinary Differential Equations. *Rev. Roum. Pures et Appl.*, 23(6):513–521, 1983.

[221] Ju. S. Ilyashenko. The Concept of Minimal Attractor and Maximal Attractor of Partial Differential Equations of the Kuramoto–Sivashinsky Type. *Chaos*, 1(2):168–173, 1991.

[222] A. F. Izé and J. G. Reis. Contributions of Stability of Neutral Functional Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 29:58–65, 1978.

[223] R. A. Johnson. On a Floquet Theory for Almost Periodic Two-Dimensional Linear Systems. *Journal of Differential Equations*, 37:184–205, 1980.

[224] G. S. Jones. The existence of Critical Points in Generalized Dynamical Systems. Springer-Verlag, *Lecture Notes in Math.*, v. 60, p. 7–19, 1968. Seminaire on Differential Equations and Dynamical Systems.

[225] J. Kato and F. Nakajima. On Sacker–Sell's Theorem for a Linear Skew Flow. *Tôhoku Math. Journ.*, 28:79–88, 1976.

[226] P. E. Kloeden and V. S. Kozyakin. The inflation of Attractors and Discretization: the autonomous case. *Nonlinear Anal. TMAV*, 40:333-343, 2000.

[227] P. E. Kloeden and V. S. Kozyakin. The inflation of Nonuatonomous systems and Their Pullback Attractors. *Transactions of the Russian Academy of Natural Sciences, Series MMMIU*, 4(1-2):144-169, 2000.

[228] P. E. Kloeden and B. Schmalfuß. Lyapunov Functions and Attractors under Variable Time-step Discretization. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2(2):163–172, 1996.

[229] P. E. Kloeden and B. Schmalfuß. Cocycle Attractors of Variable Time-step Discretizations of Lorenzian Systems. *J. Difference Eqns. Applns*, 3:125-145, 1997.

[230] P. E. Kloeden and D. J. Stonier. Cocycle attractors in nonautonomously perturbed differential equations. *Continuous and Impulsive Systems.* 4: 211–226, 1998.

[231] J. P. LaSalle. Dissipative Systems. In *Proccedings of the Conference on Ordinary Differential Equations*, pages 165–174, Washington, D.C., 1971. New York.

[232] N. Levinson. Transformation Theory of Nonlinear Differential Equations of the Second Order. *Ann. Math.*, 45(4):723–737, 1944.

[233] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flows. *Journal of the Atmospherical Sciences*, 20:130–141, 1962.

[234] J. Mallet-Paret. Morse Decomposition for Delay-Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 72(2):270–315, 1988.

[235] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equations in Higher Space Dimentions. *Journal Amer. Math. Soc.*, (1):805–866, 1998.

[236] P. Massat. Stability and Fixed Points of Point-Dissipative Systems. *Journal of Differential Equations*, 40:217–231, 1981.

[237] P. Massat. On Obtaininig Ultimate Boundedness for α-Contraction Volterra and Functional-Differential Equations. In *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, p. 273–280. Dekker, New York, 1983.

[238] P. Massat. Attractivity Properties of α-Contractions. *Journal of Differential Equations*, 48:326–333, 1983.

[239] R. K. Miller. Almost Periodic Differential Equations as Dynamical System with Applications to the Existence of Almost Periodic Solutions. *Journal of Differential Equations*, 1:337–345, 1965.

[240] A. Miranville. *Exponential Attractors for a Class of Evolution Equations by a decomposition method. II. The Nonautonomous Case.* C. R. Acad. Sci. Paris, t.328, série 1, 907-912, 199.

[241] H. Nacer. Systems Dynamiques Nonautonomes Contractants et leur Applications. Theése de magister. Algerie, USTHB, 1983.

[242] Z. Opial. Sur une Equation Diffirentielle Presque-Periodique sans Solution Presque-periodique. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. Phys.*, 9:673–676, 1961.

[243] N. Pavel. On Dissipative Systems. *Bolletino Un. Mat. Ital.*, 4(5):701–707, 1971.

[244] N. Pavel. A Generalization of Ultimately Bounded Systems. *An. Sti. Uni. "Al.I.Cuza", Iaşi. Sect. I.a, Mat.*, 18:81–86, 1972.

[245] N. Pavel. On the Boundedness of Solutions of Systems of Differential Equations. *Tohoku Math. Journal*, 24:21–32, 1972.

[246] R. J. Sacker and G. R. Sell. Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems, I. *Journal of Differential Equations*, 15:429–458, 1974.

[247] B. Schmalfuß. Attractors for the Non-Autonomous Navier-Stokes equations (to appear).

[248] B. Schmalfuß. Attractors for the Non-Autonomous Dynamical Systems. *Proceeding EQUADIFF99*. Berlin 1999, vol.1 (Edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels). World Scientific 2000, pp.684-689.

[249] G. Seifert. Almost Periodic Solutions for Almost Periodic System of Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 2:305–319, 1966.

[250] G. R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I. The Basic Theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:241–262, 1967.

[251] G. R. Sell. Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, I. Limiting Equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:263–283, 1967.

[252] G. R. Sell. Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations, *Van Nostrand–Reinbold, London,* 1971.

[253] G. R. Sell. Global Attractors for the Three-Dimentiolnal Navier-Stokes Equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 8(1):1-33, 1996.

[254] Fang Shuhong. Global Attractors for General Nonautonomous Dynamical Systems. *Nonlinear World,* 2:191–216, 1995.

[255] Zhang Shunian. Functional Differential Equations and Topological Dynamics. *Chinese Science Bulletin*, 35(17):1441–1448, 1990.

[256] J. Skovronski and S. Ziemba. The Problem of Vibrations of Nonautonomic Systems with Strong Nonlinearity. *Arch. Mech. Stosowanej*, 10(4):517–523, 1958.

[257] P. Talpalaru. Sur les Systems dissipatifs. *Ann. Stiint. Univ. Iasi*, Sec. I.a, 13(1):43–47, 1967.

[258] D. N. Tchéban. Systemes Dynamiques Dissipativs. *II-Rencontre Nationale sur les Equations Differentielles Ordinaires. Resumes des Exposes*, p. 40–41, Alger, 1983.

[259] R. Temam. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. *North-Holland, Amsterdam,* 1979.

[260] R. Temam. Infininite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,* 1988.

[261] R. Temam. Induced Trajectories and Approximate Inertial Manifolds. *Math. Modelling. Numer. Anal.*, 23:541–561, 1989.

[262] R. Temam. Inertial Manifolds. *Math. Intelligencer*, 12(4):68–74, 1990.

[263] E. S. Titi. On Approximate-Inertial Manifolds to the Navier–Stokes Equations. *Journal Math. Anal. Appl.*, 149:540–557, 1990.

[264] M. I. Vishik. Nonautonomus Evolution Equations and Their Attractors. *Proceeding EQUADIFF99.* Berlin 1999, vol.1 (Edited by B. Fiedler, K. Groger and J. Sprekels). World Scientific 2000, pp.690-703.

[265] M. Xavier. Finite-Dimensional Attracting Manifolds in Reaction-Diffusion Equations. *Contemp. Math.*, 17:540–557, 1983.

[266] T. Yoshizawa. Note on the Boundedness and the Ultimate Boundedness of Solutions $x' = f(t,x)$. *Memoirs of the College of Science. University of Kyoto, Serie A*, 29(3):275–291, 1955.

[267] T. Yoshizawa. Lyapunov's Function and Boundedness of Solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2:95–142, 1959.

[268] T. Yoshizawa. Stability Theory by Lyapunov's Second Method. *The Mathematical Series of Japan. Tokyo,* 1966.

Rezumat

Monografia este didicată sistemelor dinamice (autonome şi Neautonome) care admit atractor compact global. Studierea atractorilor a sistemelor dinamice ocupă un rol important în teoria calitativă modernă a ecuaţiilor diferenţiale. Atractorii descriu comportarea asimptotică a sistemului dinamic la infinit. În monografie sunt introduse şi studiate diferite tipuri de disipativitate şi atracţie, şi se stabileşte relaţia dintre ele. Pentru diferite clase de ecuaţii diferenţiale sunt aduse aplicaţii a resultatelor generale obţinute. Monografia este destinată specialiştilor în domeniul teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale, sistemelor dinamice şi aplicaţii, la fel profesorilor universitari şi studenţilor.

Summary

The book is devoted to dynamical systems (autonomous and nonautonomous), which admit the global compact attractor. The study of attractors of dynamical systems occupies an important position in the modern qualitative theory of differential equations. Attractors describe the behaviour of dynamical system on the infinity. The different types of dissipativity and attraction are introduced and studied in this book, the connection between them is established. Application of obtained general rezults to different classes of differential equations are given. The book is intended to the experts in qualitative theory of differential equations, dynamical systems and their applications, also for the university professors and senior students.

Давид Николаевич ЧЕБАН

Глобальные аттракторы
неавтономных динамических систем

Подписано в печать 30.01.02
Формат – 60 × 84 1/16.
Печ. л. – 24,0. Уч.-изд. л. – 21,0.
Заказ – 16/02 Тираж – 50+50

Издательско-полиграфический Центр
Молдавского государственного университета.
MD 2009, Кишинев, ул. Матеевича, 60.